[dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z

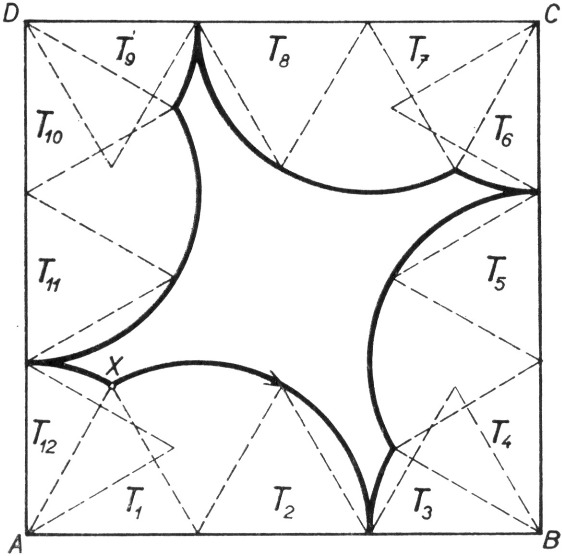
I. Úlohy na konstrukci čar vzniklých pohybem bodu

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor): [dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z. Sbírka řešených úloh z III. až XXX. ročníku soutěže. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982. pp. 135–152.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405287

I. Úlohy na konstrukci čar vzniklých pohybem bodu

1. Na obr. 19 je čtverec $ABCD$ o straně délky 9 cm a dále 12 shodných rovnostranných trojúhelníků $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_{12}$. Převedeme trojúhelník $\mathbf{T}_1$ v $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_2$ v $\mathbf{T}_3, \ldots, \mathbf{T}_{12}$ v $\mathbf{T}_1$ vždy otočením kolem společného vrcholu obou trojúhelníků, provedeným ve čtverci $ABCD$.



Obr. 19

a) Sestrojte čáru, která je dráhou vrcholu X ve všech těchto otočeních.

b) Vypočtěte její délku a porovnejte ji s délkou kružnice opsané i kružnice vepsané čtverci $ABCD$.

Řešení. a) Čára je vyznačena v obrázku tlustě (zmenšeno na tři čtvrtiny). Skládá se ze čtyř oblouků kružnice o poloměru AX délky 3 cm příslušných k středovému úhlu 120° a ze čtyř oblouků kružnic téhož poloměru příslušných k středovému úhlu 30°.

b) Délka čáry je (v cm)

$$d = 4 \, . \, \frac{3\pi}{180} \, . \, 120 + 4 \, \frac{3\pi}{180} \, 30 =$$

$$= 4 \, . \, \frac{3\pi}{3} \, . \, 2 + 4 \, . \, \frac{3\pi}{6} = 4 \, . \, 2\pi + 4 \, . \, \frac{1}{2} \, \pi = 10 \, \pi. \qquad (1)$$

Délka kružnice opsané čtverci $ABCD$ je

$$d_1 = \pi \, . \, 9 \, . \, \sqrt{2} \doteq 12{,}7\pi, \qquad (2)$$

délka kružnice vepsané čtverci $ABCD$ je

$$d_2 = 9\pi. \qquad (3)$$

Je tedy podle (1), (2), (3)

$$d_2 < d < d_1.$$

2. Do dané kružnice $k = (S; r = 4 \text{ cm})$ vepište rovnostranný trojúhelník ABC. Trojúhelník ABC se i s kružnicí k a polopřímkou AB otáčí rovnoměrně kolem bodu S. Na polopřímce AB se zároveň pohybuje rovnoměrně bod X tak, že jeho počáteční poloha je bod A, přičemž za dobu jedné otočky (tj. otočení o 360°) trojúhelníku urazí dráhu o velikosti $2 \,.\, AB$.

Uvažujte oba smysly otáčení.

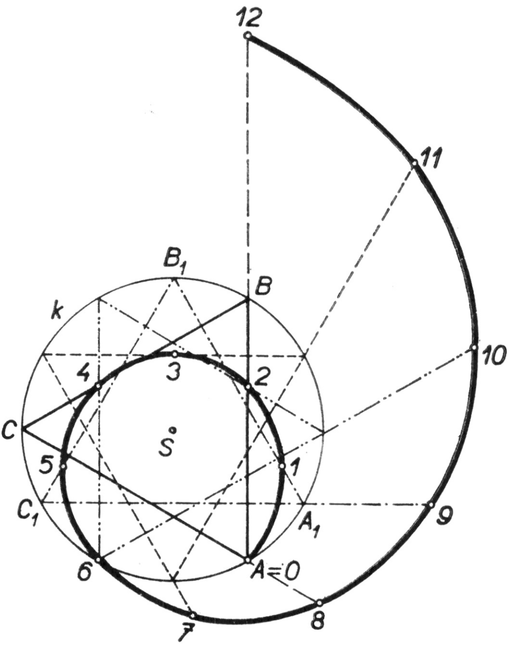
a) Narýsujte polohu bodu X v jednotlivých dvanáctinách první otočky.

b) Nakreslete co nejpřesněji čáru, kterou opíše bod X při svém pohybu během první otočky.

Řešení. Na obr. 20 (zmenšeno na polovinu) jsou čárkovaně vyznačeny polohy trojúhelníku ABC při otáčení v opačném smyslu než je pohyb hodinových ručiček. Např. poloha $A_1B_1C_1$ vznikla otočením o úhel velikosti $\frac{1}{12}$ ze 360°, tj. o 30°. Pohybující se bod X dostane se po polopřímce A_1B_1 do polohy 1, přičemž platí

$$d(A_1 1) = \frac{1}{12} \,.\, 2 \,.\, d(AB) = \frac{1}{6}\, d(AB).^{\star})$$

*) Zápis $d(A_1 1)$ ve významu »délka úsečky $A_1 1$« užíváme podobně jako v nově zaváděných učebnicích matematiky pro ZŠ.



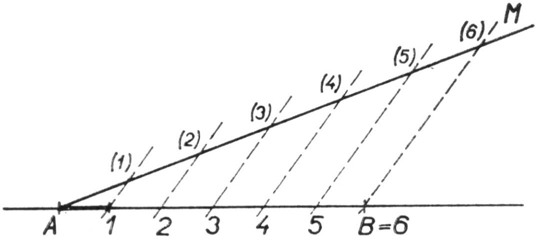
Obr. 20

Úsečku délky $\frac{1}{6}\,d(AB)$ sestrojíme na pomocném obr. 21 takto:

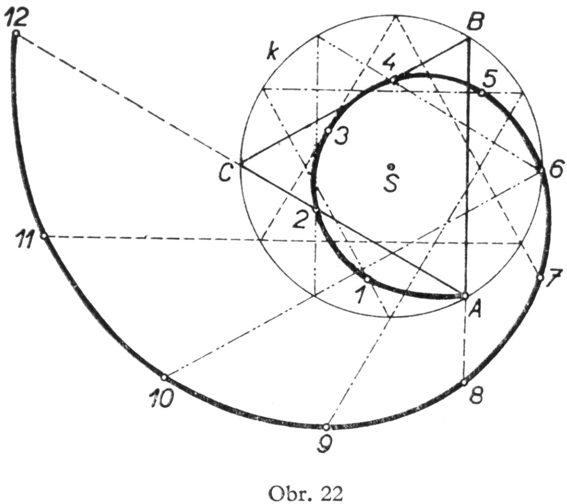
Bodem A vedeme polopřímku AM různoběžnou s přímkou AB. Na polopřímku AM naneseme postupně libovolné shodné úsečky tak, že vzniknou body (1), (2), ..., (6). Pak bod (6) spojíme s bodem B a systémem rovnoběžek vytvoříme podobné trojúhelníky

$$\triangle A1(1) \sim \triangle A2(2) \sim \ldots \sim \triangle A6(6).$$

Dostaneme tak úsečky $A1 = \frac{1}{6}AB$, $A2 = \frac{2}{6}AB$ atd. potřebné ke konstrukci poloh 1, 2, ... bodu X při daném pohybu (obr. 21).



Obr. 21



Obr. 22

Na obr. 22 je znázorněno otáčení trojúhelníku ve smyslu pohybu hodinových ručiček. Konstrukce se provede obdobně jako na obr. 21; v tomto případě se bod X pohybuje po polopřímce AC.

3. V bodě A na okraji gramofonové desky sedí brouk. Označme S střed desky a AB její průměr. Brouk začne lézt z bodu A po úsečce AB do bodu B; v okamžiku, kdy se dá brouk do pohybu, počne se deska otáčet. Když se deska jednou otočí, dorazí brouk právě do bodu B.

Narýsujte cestu brouka po desce, jak se jeví pozorovateli při pohledu shora. Přitom předpokládáme, že pohyb brouka i otáčení desky se děje rovnoměrně.*) Průměr AB volte 12 cm.

Pro narýsování cesty brouka sestrojte přesně body, v nichž je brouk v jednotlivých dvanáctinách jedné otočky desky.

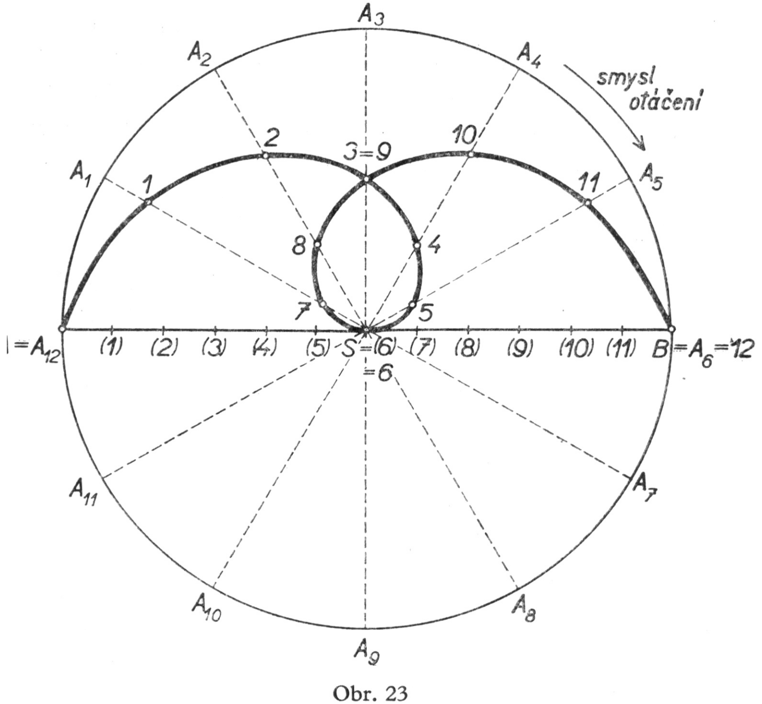
Řešení je pro jeden možný smysl otáčení desky provedeno na obr. 23. Jednotlivé polohy brouka na desce dostaneme takto: Kdyby se deska neotáčela, dostal by se brouk na cestě z bodu A do bodu B postupně do poloh (1), (2), (3) atd. Protože se však deska otáčí i s broukem a s úsečkou AB, bude se brouk např. místo v poloze (1) nalézat na polopřímce SA_1. Tato polopřímka vznikne otočením polopřímky SA o úhel velikosti $\frac{1}{12}$ z 360°, tj. o 30°. Přitom platí $S(1) = S1$.

Obdobně zkonstruujeme body 2, 3, 4, 5 a 6. Bod (7) a další leží už na polopřímce opačné k SA; proto bod 7 (a další) bude ležet na polopřímce opačné k SA_7 atd. Uvedenou kon-

*) Všimněte si, že v úloze jde vlastně o skládání dvou rovnoměrných pohybů: posunutí a otočení.

strukcí, kterou můžeme nazvat »bodovou«, získáme jen jednotlivé body cesty; jejich spojením plynulou čárou dostaneme hledanou cestu.

Čím přesněji chceme dráhu narýsovat, tím více jejích bodů se pokusíme sestrojit. Na obr. 23 je pohyb rozdělen do 12 poloh; můžete ho však rozdělit též např. do 16 nebo 24 poloh.



Obr. 23

4. Narýsujte pravidelný osmiúhelník

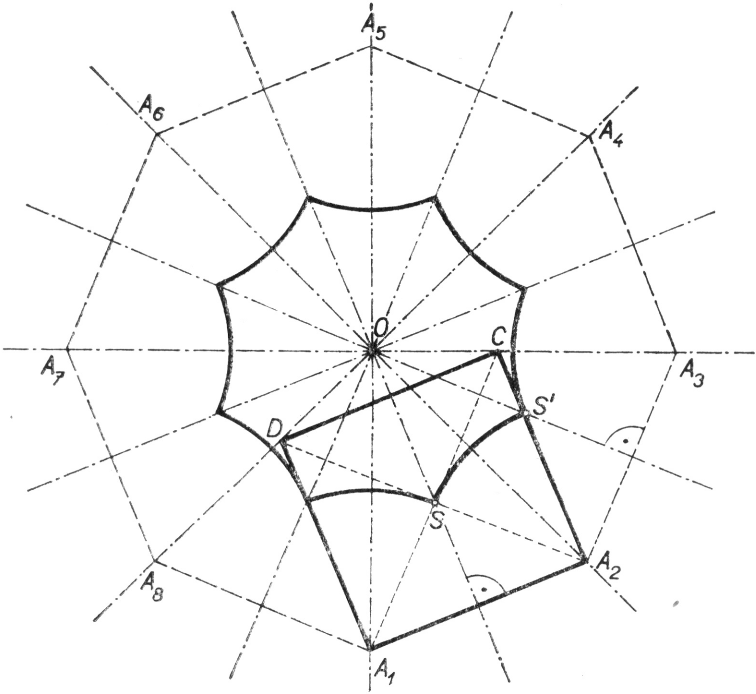
$$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$$

se středem O. Uvnitř tohoto osmiúhelníka sestrojte nad úsečkou A_1A_2 čtverec A_1A_2CD; jeho střed označte S.

Čtvercem, který jste sestrojili, budete pohybovat tak, že stále zůstane v daném osmiúhelníku. Čtverec nejdříve otočíte kolem bodu A_2 tak, že vrchol C splyne s bodem A_3; novou polohu bodu D označte D'. Čtverec, který jste tak dostali, pak otočíte opět, tentokrát kolem bodu A_3, a to tak, že bod D' po otočení splyne s bodem A_4. Stejným způsobem postupně provedete další otočení čtverce kolem bodů $A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_1$. Při posledním otočení se čtverec dostane do své původní polohy.

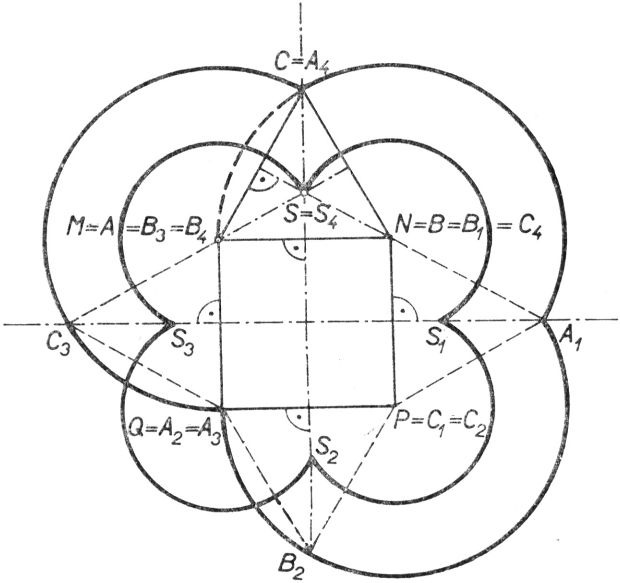
Vyšetřte, jakou čáru při všech osmi otočeních opsal střed S daného čtverce. Zjistěte všechny osy souměrnosti vzniklé dráhy bodu S.

Řešení (obr. 24). Platí $\sphericalangle A_1OA_2 = \dfrac{360°}{8} = 45°, \sphericalangle OA_1A_2 = 67{,}5°$, $\sphericalangle A_8A_1A_2 = 135°$. Protože je $\sphericalangle SA_1A_2 = 45°$, je $\sphericalangle SA_1A_2 < \sphericalangle OA_1A_2$ a bod S tedy padne dovnitř trojúhelníka OA_1A_2; je tedy $A_1S < A_1O$. Při prvním pohybu čtverce A_1A_2CD se bod S otáčí kolem bodu A_2 po oblouku kružnice z polohy S do polohy S', kde $\sphericalangle S'A_2A_3 = 45°$. Je tedy $\sphericalangle SA_2S' = \sphericalangle A_1A_2A_3 - 2 . \sphericalangle A_1A_2S = 135° - 2 . 45° = 45°$ (to plyne i z toho, že $\sphericalangle CA_2A_3 = \sphericalangle A_1A_2A_3 - \sphericalangle A_1A_2C$). Protože je $\sphericalangle SA_2C = 45°$, padne bod S' právě dovnitř úsečky A_2C, neboť je $A_2S < A_2C$ (odvěsna pravoúhlého trojúhelníka A_2CS je menší než jeho přepona A_2C).



Obr. 24

Odtud výsledek: Dráha, kterou postupně bod S opíše, se skládá z osmi shodných oblouků. První oblouk má střed A_2 a poloměr A_2S, tj. polovinu úhlopříčky čtverce A_1A_2CD, úhel $\sphericalangle SA_2S' = 45°$; přímka A_2O je osou souměrnosti tohoto oblouku. Snadno se zjistí, že celá dráha bodu S má osm os souměrnosti. Jsou to jednak čtyři hlavní úhlopříčky A_1A_5, A_2A_6, A_3A_7, A_4A_8 daného osmiúhelníka, jednak čtyři osy stran osmiúhelníka (přitom totiž osy protějších stran daného osmiúhelníka - např. A_1A_2, A_5A_6 - navzájem splývají).



Obr. 25

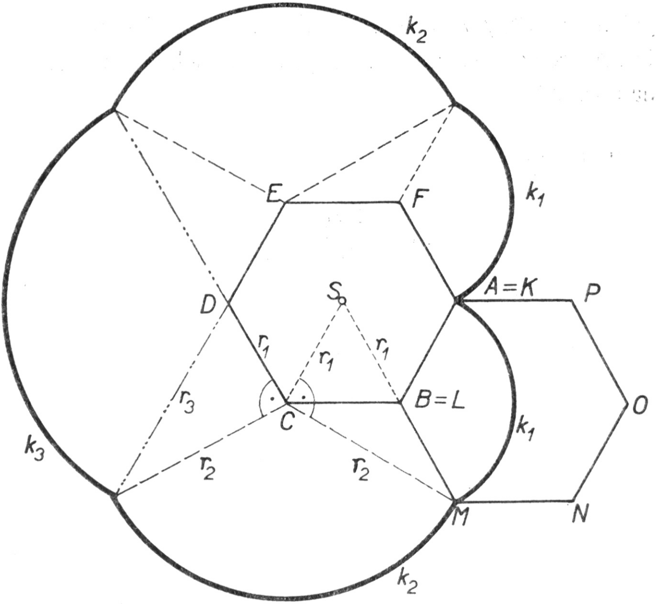
5. Daný čtverec $MNPQ$ má stranu délky 4,5 cm. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, že $A = M$, $B = N$ a vrchol C leží vně daného čtverce.

Trojúhelník ABC se pohybuje po obvodu čtverce $MNPQ$ takto: Nejprve se otočí okolo bodu N do polohy $A_1B_1C_1$ tak, že $C_1 = P$, $B_1 = B = N$ a bod A_1 leží vně daného čtverce. Při dalších pohybech se otočí trojúhelník po řadě okolo bodů P, Q a M, N, až se dostane do své původní polohy ABC, ale tak, že $A_4 = C$.

Narýsujte a) polohy, do nichž se dostane trojúhelník vždy po vykonání jednotlivých otočení, a dráhu bodu A;

b) čáru, kterou opíše střed S trojúhelníka ABC.

Řešení je patrné z obr. 25; úhly otočení jsou rovny 210°.



Obr. 26

6. Jsou dány dva různé pravidelné šestiúhelníky $ABCDEF$ a $KLMNOP$, které mají společnou stranu ($A = K$, $B = L$).

a) Určete dráhu, kterou opíše vrchol K šestiúhelníka $KLMNOP$, který se kotálí vně po obvodě šestiúhelníka $ABCDEF$.

b) Vypočítejte délku této dráhy.

Řešení. a) Dráha bodu K se skládá z pěti oblouků kružnice, jak je naznačeno na obr. 26.

b) Každému z pěti oblouků odpovídá středový úhel velikosti $120°$; k_1, k_2, k_3 jsou délky příslušných oblouků. Označíme-li a délku strany daného šestiúhelníka, budou mít příslušné poloměry délky $r_1 = a$, $r_2 = a\sqrt{3}$, $r_3 = 2a$ (jak plyne podle Pythagorovy věty z pravoúhlých trojúhelníků vyznačených na obr. 26).

Platí tedy

$$k_1 = \frac{2\pi r_1}{3} = \frac{2}{3}\pi a,$$

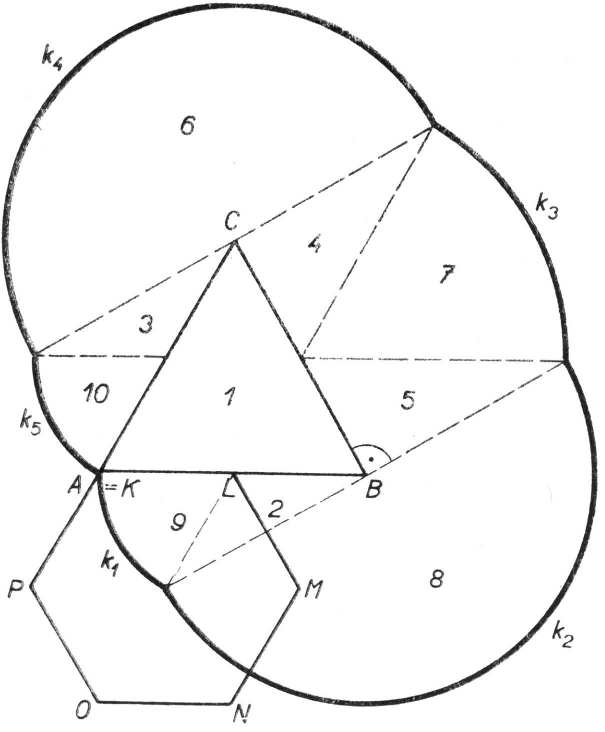
$$k_2 = \frac{2\pi r_2}{3} = \frac{2}{3}\pi a\sqrt{3},$$

$$k_3 = \frac{2\pi r_3}{3} = \frac{}{3}\pi a.$$

Odpověď: Celková dráha bodu K je tedy

$$d = 2k_1 + 2k_2 + k_3 = \frac{4}{3}\pi a\,(2 + \sqrt{3}).$$

(Je-li např. $a = 4$ cm, dostaneme $d \doteq 62{,}3$ cm.)



Obr. 27

7. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC se stranou a délky 8 cm. Dále je dán pravidelný šestiúhelník $KLMNOP$ se stranou délky 4 cm, takový, že vrcholy A a K v základní poloze splývají

a vrchol L leží na polopřímce AB. Oba útvary leží v opačných polorovinách vyťatých přímkou AB.

Šestiúhelník $KLMNOP$ se kotálí po obvodě trojúhelníka ABC.

a) Najděte dráhu vrcholu K.

b) Vypočítejte obsah útvaru ohraničeného dráhou bodu K.

Řešení (obr. 27). a) Dráha bodu K se skládá z pěti kružnicových oblouků, jak je vyznačeno na obrázku.

b) Obsah útvaru ohraničeného dráhou bodu vypočítáme jako součet obsahů celkem deseti obrazců, z nichž je pět trojúhelníků a pět kruhových výsečí (viz obr. 27). Obsah obrazce označeného číslem i bude P_i v cm^2 ($i = 1, 2, \ldots, 10$).

Obsah rovnostranného trojúhelníka ABC je

$$P_1 = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 16 \cdot \sqrt{3} \doteq 27{,}68. \qquad (1)$$

Dále je $P_2 = P_3$, takže

$$P_2 + P_3 = 2\left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8 \cdot \sqrt{3} \doteq 13{,}84. \qquad (2)$$

Podobně $P_4 = P_5$, takže

$$P_4 + P_5 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sqrt{3}\right) = 16\sqrt{3} \doteq 27{,}68. \qquad (3)$$

Kruhová výseč označená na obr. 27 číslem 7 má poloměr $a = 8$ cm a středový úhel velikosti $60°$; její obsah je tedy

$$P_7 = \frac{1}{6}\pi \,.\, 64 \doteq 33{,}60. \tag{4}$$

Dále je $P_6 = P_8 = \frac{1}{2}\pi(4\,.\,\sqrt{3})^2 = 24\pi$, takže

$$P_6 + P_8 = 48\pi \doteq 150{,}72. \tag{5}$$

Nakonec $P_9 = P_{10}$, proto je

$$P_9 + P_{10} = 2\left(\frac{1}{6}\pi\,.\,4^2\right) = 16\,.\,\frac{\pi}{3} \doteq 16{,}80. \tag{6}$$

Sečtením výsledků (1), (2), (3), (4), (5) a (6) dostaneme

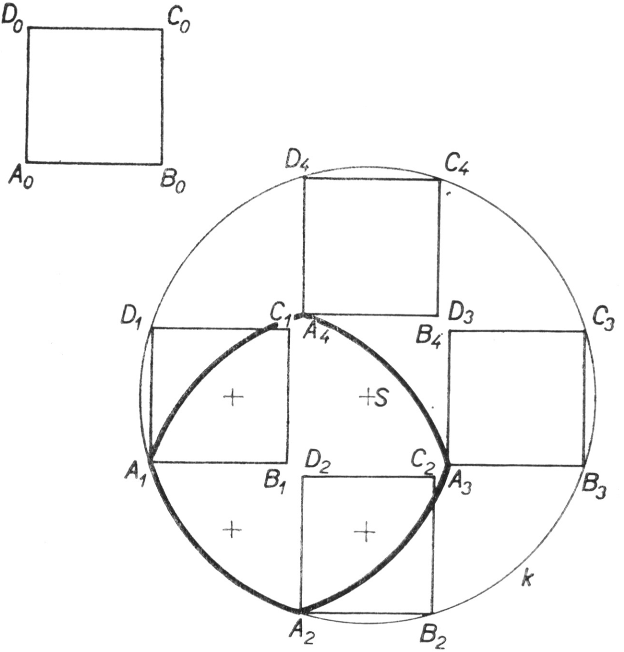
$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \ldots + P_{10} \doteq 270 \text{ cm}^2.$$

Odpověď. Obsah útvaru ohraničeného dráhou bodu K je přibližně 270 cm^2.

8. V rovině je dána kružnice k o poloměru délky 6 cm a čtverec $A_0B_0C_0D_0$, jehož strana má délku 3,5 cm. Označme $ABCD$ čtverec těchto vlastností:

1. Vznikne rovnoběžným posunutím čtverce $A_0B_0C_0D_0$;
2. náleží kruhu **K** s hranicí k;
3. aspoň jeden jeho vrchol náleží kružnici k.

Narýsujte čáru, kterou vyplní vrcholy A všech takových čtverců.



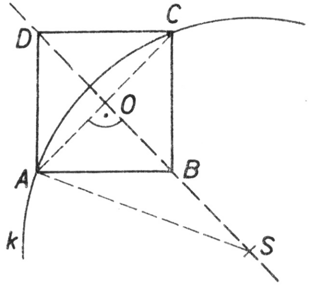
Obr. 28

Řešení. Poloměr kružnice opsané čtverci $A_0B_0C_0D_0$ se rovná polovině délky jeho úhlopříčky, tj.

$$\frac{1}{2} \cdot 3{,}5 \cdot \sqrt{2},$$

takže je menší než poloměr kružnice k. Čtverec $A_0B_0C_0D_0$ lze tedy rovnoběžně posunout tak, aby náležel kruhu $\mathbf{K}$ (např. čtverec $A_1B_1C_1D_1$ na obr. 28). Přitom na kružnici k mohou ležet nejvýše dva jeho vrcholy. Totiž, kdyby na kružnici k

ležely tři jeho vrcholy, pak by střed čtverce $ABCD$ byl středem S kružnice k, což však není možné. Leží-li na k dva vrcholy čtverce $ABCD$, pak musí být sousední. Kdyby byly protější, potom by čtverec $ABCD$ neležel uvnitř kruhu **K**. Toto tvrzení dokážeme.



Obr. 29

Nechť na kružnici k leží např. vrcholy A a C. Střed S pak leží (obr. 29) na přímce BD; předpokládejme, že náleží polopřímce OB, kde bod O je střed čtverce $ABCD$. (Kdyby střed S ležel na polopřímce OD, byly by další úvahy obdobné.) Protože platí $AS > AB$, má trojúhelník ASD při vrcholu A tupý úhel, takže $DS > AS$ a bod D leží vně kruhu **K**.

Čtverce, které dostaneme ze čtverce $A_0B_0C_0D_0$ rovnoběžným posunutím a jež náleží kruhu **K** a mají dva vrcholy na kružnici k, jsou právě čtyři (obr. 28). Konstrukce těchto čtyř čtverců je jednoduchá. Přímky A_1B_3 a D_1C_3 jsou rovnoběžné s přímkou A_0B_0 a jejich vzdálenosti od středu S kružnice k jsou 1,75 cm. Obdobně přímky A_2D_4 a B_2C_4 jsou rovnoběžné s přímkou A_0D_0 a jejich vzdálenosti od bodu S jsou 1,75 cm. Body A_1, A_2, A_3, A_4 leží na hledané čáře.

Představme si, že čtverec $ABCD$ se z polohy $A_1B_1C_1D_1$ pohybuje tak, že v každé své další poloze je obrazem čtverce $A_0B_0C_0D_0$ v rovnoběžném posunutí, přitom náleží kruhu **K** a zároveň vrchol A leží na kružnici k. Při tomto pohybu se bod A pohybuje na obr. 28 proti směru hodinových ručiček a pohyb čtverce $ABCD$ skončí v poloze $A_2B_2C_2D_2$. Kdyby se totiž čtverec $ABCD$ uvedeným způsobem dále pohyboval, pak by vrchol B opustil kruh **K**. Bod A proběhl při uvažovaném pohybu oblouk A_1A_2 kružnice k, který je tedy částí hledané čáry.

Nyní budeme obdobně pohybovat čtvercem $ABCD$ z polohy $A_2B_2C_2D_2$ tak, aby vrchol B ležel na kružnici k. Tak se dospěje až do polohy $A_3B_3C_3D_3$, odkud už nebude možno v pohybu pokračovat, neboť vrchol C by opustil kruh **K**. Vrchol A při tomto pohybu opíše oblouk A_2A_3, jenž získáme z oblouku B_2B_3 kružnice k rovnoběžným posunutím ($B_2 \to A_2$). Oblouk A_2A_3 je další částí hledané čáry.

Obdobně zjistíme, že zbývajícími částmi hledané čáry jsou oblouky A_3A_4 a A_4A_1, jež vzniknou z oblouků C_3C_4 a D_4D_1 rovnoběžnými posunutími ($C_3 \to A_3$) a ($D_4 \to A_4$).

Hledaná čára je na obr. 28 vyznačena tlustě.