[dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z

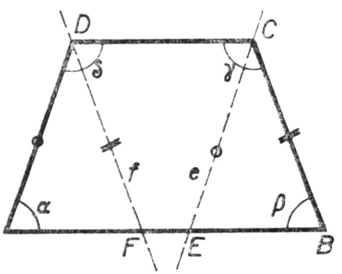
III. Důkazové úlohy

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor): [dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z. Sbírka řešených úloh z III. až XXX. ročníku soutěže. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982. pp. 189–214.

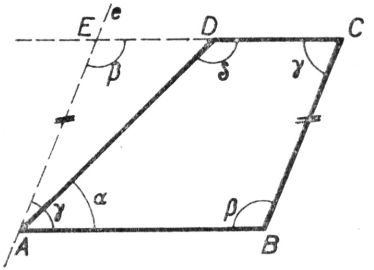
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405289

22. Sestrojte libovolný lichoběžník $ABCD$ tak, že $AB \parallel CD$, $AB > CD$.

Dokažte, že součet úhlů lichoběžníka při základně CD je větší než součet úhlů při základně AB.



Obr. 47



Obr. 48

Řešení. Úhly lichoběžníka $ABCD$ (viz obr. 47) při vrcholech A, B, C, D označme po řadě α, β, γ, δ. Z pomocného obrázku 47 se zdá, že tvrzení úlohy je zřejmé, neboť oba úhly při základně AB jsou ostré a při základně CD jsou oba úhly tupé. Avšak obr. 48 ukazuje, že tomu tak vždy nemusí být. Důkaz provedeme pro každý případ zvlášť.

a) Bodem C (obr. 47) veďme rovnoběžku e se stranou AD. Protože $AB \parallel DC$, $AB > DC$, protne přímka e úsečku AB

ve vnitřním bodě E tak, že $AE = DC$. Čtyřúhelník $AECD$ je tedy rovnoběžník, v němž $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DCE = \alpha$. Avšak podle konstrukce je úhel $\sphericalangle DCE$ částí úhlu $\sphericalangle DCB$, a platí tedy

$$\alpha < \gamma. \tag{1}$$

Pomocí přímky $f \parallel BC$ bodem D obdobně dokážeme, že

$$\beta < \delta. \tag{2}$$

Je tedy zřejmě součet velikostí úhlů na levých stranách nerovností (1) a (2) menší než součet velikostí úhlů na pravých stranách, tj.

$$\alpha + \beta < \gamma + \delta,$$

což jsme měli dokázat.

b) Také na obr. 48 vytvoříme přímkou $e \parallel BC$ vedenou bodem A, přímkou BC a přímkami $AB \parallel DC$ rovnoběžník $ABCE$. V tomto rovnoběžníku zřejmě platí

$$\sphericalangle AEC = \beta.$$

Protože $\sphericalangle ADC = \delta$ je vnějším úhlem trojúhelníka ADE, je

$$\beta < \delta. \tag{3}$$

Zároveň v rovnoběžníku $ABCE$ je

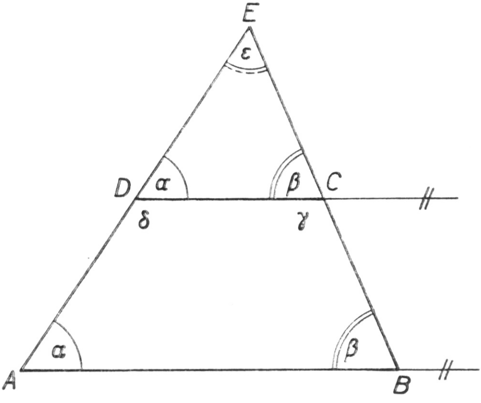
$$\sphericalangle EAB = \sphericalangle ECB = \gamma,$$

a protože $\alpha < \sphericalangle EAB$, dostáváme

$$\alpha < \gamma. \tag{4}$$

Nerovnosti (3) a (4) obdobně jako v případě a) vedou k dokazovanému vztahu

$$\alpha + \beta < \gamma + \delta.$$



Obr. 49

Jiné řešení. Lichoběžník *ABCD* doplníme na trojúhelník *ABE* (viz obr. 49). Úhel při vrcholu *E* označíme ε. (V další úvaze nezáleží na tom, zda lichoběžník *ABCD* má tvar jako na obr. 47 nebo na obr. 48.)

Protože přímky *AB* a *CD* jsou rovnoběžné, má podle věty o rovnoběžkách proťatých příčkou *AD*, popř. *BC*, trojúhelník

DCE při vrcholu *D* úhel α, při vrcholu *C* úhel β. V tomto trojúhelníku pro součet velikostí vnitřních úhlů platí $\alpha + \beta + \varepsilon = 180°$ čili

$$\alpha + \beta < 180°. \tag{1}$$

Úhly γ a δ jsou k úhlům α, β trojúhelníka *DCE* vedlejší, a tedy platí

$$\alpha + \delta = 180°,$$

$$\beta + \gamma = 180°.$$

Sečteme-li tyto nerovnosti, dostaneme známou rovnost pro součet velikostí úhlů v lichoběžníku *ABCD*:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$$

Protože podle (1) je $\alpha + \beta < 180°$, musí platit

$$\gamma + \delta > 180°. \tag{2}$$

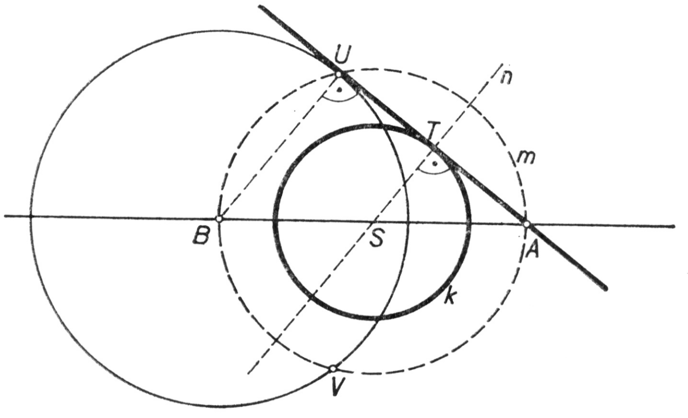
Porovnáním (1) a (2) dostaneme dokazovaný vztah

$$\alpha + \beta < \gamma + \delta.$$

23. Je dána úsečka *AB*. Kolem jejího středu *S* je opsána kružnice *k* s poloměrem $r < SA$. Dále jsou sestrojeny body *U*, *V* tak, aby platilo

$$BU = BV = 2r, SU = SV = SA.$$

Dokažte, že přímky AU, AV jsou tečnami kružnice k.



Obr. 50

Řešení (obr. 50). Jak poznáme, že přímka je tečnou kružnice? Např. podle toho, že tato přímka má od středu kružnice vzdálenost rovnou poloměru kružnice. Ze souměrnosti celého obrázku podle přímky AB vyplývá, že stačí vyšetřit vzdálenost přímky AU od bodu S.

Protože bod U leží na kružnici $m = (S; SA)$, je podle Thaletovy věty

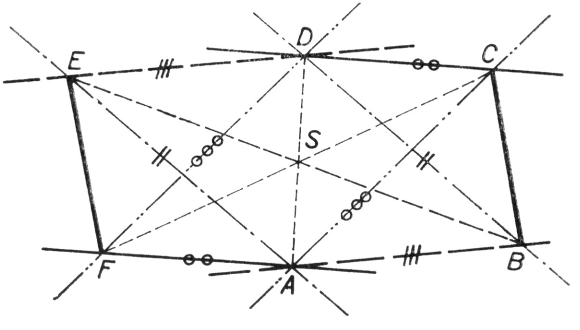
$$\sphericalangle BUA = 90°. \tag{1}$$

Sestrojíme-li bodem S kolmici n k přímce AU, je $n \parallel BU$; patu této kolmice označme T. Protože $SA = SB$, $BU \parallel ST$, je úsečka ST střední příčkou v trojúhelníku AUB a platí

$$ST = \frac{1}{2} BU = r. \tag{2}$$

Dále platí $ST \perp AU$ vzhledem ke vztahu (1) a k tomu, že $ST \parallel BU$; proto přímka AU má vzdálenost r od středu S kružnice k, a je tedy její tečnou.

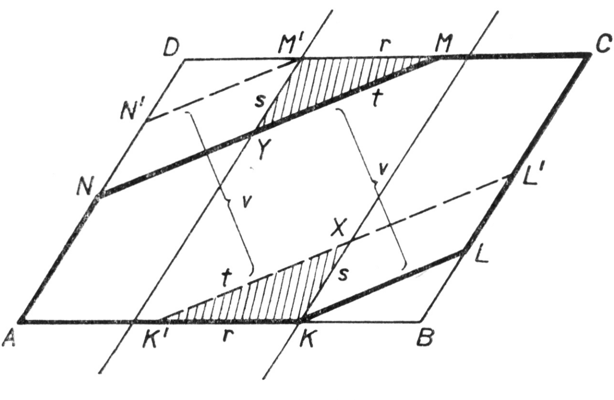
24. Jsou dány body A, B, C, D, z nichž žádné tři neleží v přímce. Sestrojte bod E tak, aby bylo $AE \parallel BD$, $DE \parallel AB$, a bod F tak, aby bylo $AF \parallel CD$, $DF \parallel AC$. Dokažte, že $EF = BC$.



Obr. 51

Řešení. Obrazec $ABDE$ je rovnoběžník, neboť body A, B, D neleží v přímce. Průsečík jeho úhlopříček označme S (obr. 51). Pak $AS = DS$, $BS = ES$. Obrazec $ACDF$ je rovněž rovnoběžník, neboť ani body A, C, D neleží v přímce. Jeho úhlopříčky se rovněž protínají v bodě S, neboť úhlopříčka AD je oběma rovnoběžníkům společná; proto také $CS = FS$. Z podmínek $BS = ES$, $CS = FS$ plyne $EF = BC$, neboť body B, E a C, F tvoří dvojice bodů souměrně sdružených podle středu S.

25. Je dán rovnoběžník $ABCD$. Uvnitř stran AB, BC, CD, DA zvolme po řadě body K, L, M, N tak, aby $KL \parallel MN$. Uvnitř týchž stran zvolme další body K', L', M', N' tak, aby $K'L' \parallel M'N' \parallel KL$ a aby vzdálenost rovnoběžek $K'L'$, $M'N'$ byla táž jako vzdálenost rovnoběžek KL, MN. Dokažte, že šestiúhelníky $AKLCMN$ a $AK'L'CM'N'$ mají týž obvod.



Obr. 52

Řešení (obr. 52). Předpokládejme, že bod K' leží uvnitř úsečky AK (kdyby tomu tak nebylo, zaměníme označení bodů K, L, M, N a K', L', M', N'). Pak bod M' leží uvnitř úsečky DM a $KK' = MM'$. Veďme body K, M' rovnoběžky se stranou BC a označme po řadě X, Y jejich průsečíky s přímkami $K'L'$, MN. Zřejmě platí $\triangle K'KX \cong \triangle MM'Y$. Označme $d(KK') = d(MM') = r$, $d(KX) = d(M'Y) = s$, $d(K'X) = d(MY) = t$. Potom (také vzhledem k vlastnostem stran pomocně vzniklých rovnoběžníků) dostáváme:

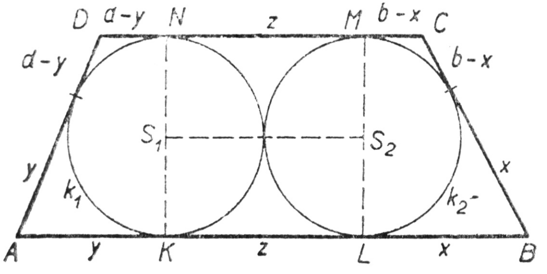
$$
\begin{aligned}
d(AK') &= d(AK) - r;\\
d(K'L') &= d(KL) + t;\\
d(L'C) &= d(LC) - s;\\
d(CM') &= d(CM) + r;\\
d(M'N') &= d(MN) - t;\\
d(N'A) &= d(NA) + s;
\end{aligned}
$$

sečteme-li tyto rovnosti, dostaneme vztah, z něhož pro vyšetřované úsečky vyplývá:

$$AK' + K'L' + L'C + CM' + M'N' + N'A =$$

$$= AK + KL + LC + CM + MN + NA,$$

což znamená, že obvody obou šestiúhelníků jsou si rovny.



Obr. 53

26. Do lichoběžníka $ABCD$ jsou vepsány kružnice k_1, k_2, které se dotýkají stran AB, CD a AD, popř. AB, BC a CD (viz obr. 53). O délkách stran lichoběžníka platí

$$a + c > b + d.$$

Dokažte větu: Má-li výška lichoběžníku délku $\frac{1}{2}$ $(a + c - b - d)$, potom mají kružnice k_1, k_2 vnější dotyk.

Řešení. Body a délky úseček označme podle obrázku. (Platí, že úsečky ohraničené daným bodem a dotykovým bodem na tečnách vedených z bodu ke kružnici mají rovné délky.) Potom $KLMN$ je pravoúhelník. Dále platí

$$a = x + y + z, c = b + d - x - y + z.$$

Sečtením obou rovností dostaneme

$$a + c = b + d + 2z$$

čili

$$z = \frac{1}{2}(a + c - b - d).$$

Pravoúhelník $KLMN$ je tedy čtverec, délka středné S_1S_2 je rovna součtu poloměrů kružnic k_1, k_2, a obě kružnice mají tedy vnější dotyk.

27. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC o straně délky a a dále úsečka délky q. Střed kružnice opsané tomuto trojúhelníku označme O.

Na prodloužení úsečky AB za bod B sestrojte bod X tak, aby platilo $d(BX) = q$. Na prodloužení úsečky BC za bod C sestrojte bod Y tak, aby platilo $d(CY) = q$. Na prodloužení úsečky CA za bod A sestrojte bod Z tak, aby platilo $d(AZ) = q$.

Dokažte: a) Trojúhelník YXZ je také rovnostranný.
b) Trojúhelníku XYZ lze opsat kružnici se středem v bodě O.

Řešení. a) Vzhledem ke konstrukci bodů X, Y, Z (obr. 54) je jednak

$$d(BX) = d(CY) = d(AZ) = q, \tag{1}$$

jednak

$$d(AX) = d(BY) = d(CZ) = a + q. \tag{2}$$

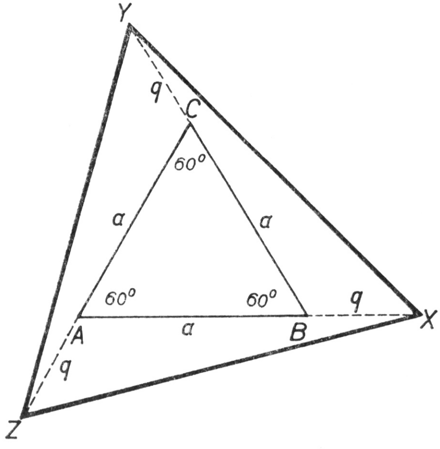
Protože úhly $\sphericalangle XBY$, $\sphericalangle YCZ$ a $\sphericalangle ZAX$ jsou vedlejšími k vnitřním úhlům rovnostranného trojúhelníka ABC, mají velikost 120°, a jsou tedy navzájem shodné. Proto vzhledem k (1) a (2) platí podle věty *sus*

$$\triangle XBY \cong \triangle YCZ \cong \triangle ZAX$$

a rovněž

$$XY \cong YZ \cong ZX,$$

takže trojúhelník XYZ je rovnostranný.

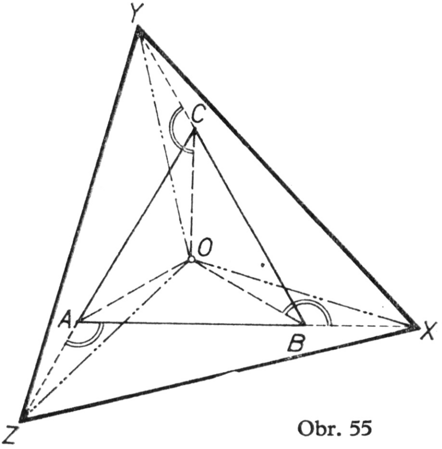


Obr. 54

b) Dokážeme-li, že

$$OX \cong OY \cong OZ, \tag{3}$$

je zřejmé, že trojúhelníku XYZ lze opsat kružnici se středem O a poloměrem OX.



Obr. 55

Na obr. 55 jsou vyznačeny úsečky OX, OY, OZ.

Podle konstrukce platí (1) a vzhledem k tomu, že bod O je středem kružnice opsané trojúhelníku ABC, je

$$OB \cong OC \cong OA. \tag{4}$$

Polopřímky BO, CO, AO v rovnostranném trojúhelníku jsou i osami vnitřních úhlů trojúhelníka, neboť středy opsané a vepsané kružnice splynou. Proto platí pro velikosti úhlů

$$\sphericalangle OBY = \sphericalangle OCZ = \sphericalangle OAX = 30°.$$

V trojúhelníku OBX je zřejmě

$$\sphericalangle OBX = \sphericalangle OBY + \sphericalangle YBX = 30° + 120° = 150°.$$

Obdobně zjistíme, že i úhly $\sphericalangle OCY$ a $\sphericalangle OAZ$ mají velikost 150°. Proto vzhledem k (1) a (4) platí

$$\triangle OBX \cong \triangle OCY \cong \triangle OAZ \ (sus)$$

a rovněž

$$OX \cong OY \cong OZ,$$

takže trojúhelníku XYZ lze opsat kružnici $(O; OX)$.

28. Narýsujte libovolný pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Na prodloužené straně AC za bod C sestrojte bod B_1 tak, aby bylo $CB_1 \cong CB$. Na prodloužení strany BC za bod C určete bod A_1 tak, aby bylo $CA_1 \cong CA$.

a) Dokažte, že trojúhelníky ABC a A_1B_1C jsou shodné.

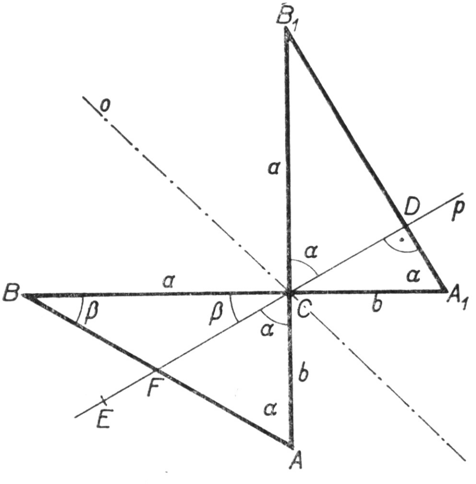
b) Bodem C sestrojte přímku p kolmou k přímce A_1B_1; její patu označte D. Dokažte, že přímka p protne úsečku AB v jejím středu.

Řešení. a) Podle konstrukce (obr. 56) platí $BC \cong B_1C$, $\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle B_1CA_1$, $AC \cong A_1C$, a tedy

$$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C \ (sus),$$

přičemž pravé úhly $\sphericalangle BCA$ a $\sphericalangle B_1CA_1$ jsou vrcholové.

b) Shodné úhly při vrcholech A, A_1 označíme α, při vrcholech B, B_1 je označíme β. Protože oba úhly α, β jsou ostré, padne pata D kolmice p dovnitř úsečky A_1B_1; polopřímka CD leží tedy uvnitř úhlu $\sphericalangle B_1CA_1$. Polopřímka CE opačná k polopřímce CD prochází vnitřkem úhlu $\sphericalangle BCA$, který je vrcholový k $\sphericalangle B_1CA_1$. Průsečík polopřímky CE s úsečkou AB nazveme F.



Obr. 56

Jak dokážeme, že F je střed úsečky AB, tj. střed přepony AB pravoúhlého trojúhelníka ABC? Nastane-li to, je F středem kružnice opsané $\triangle ABC$, tj. $FA \cong FB \cong FC$. Obráceně, je-li $FA \cong FB \cong FC$, je bod F středem kružnice opsané trojúhelníku ABC. Musíme tedy dokázat, že trojúhelníky ACF, BCF jsou rovnoramenné s hlavním vrcholem F. Důkaz shodnosti stran převedeme na důkaz shodnosti úhlů.

V pravoúhlém trojúhelníku CDB_1 má druhý ostrý úhel $\sphericalangle B_1CD$ zřejmě velikost α; pak úhel k němu vrcholový $\sphericalangle ACF$ je rovněž velikosti α. Protože trojúhelník ACF má dva shodné úhly velikosti α, je rovnoramenný se základnou AC a platí

$$FC \cong FA. \tag{1}$$

Obdobně dokážeme, že trojúhelník CBF je rovnoramenný se základnou CB, pro jehož ramena platí

$$BF \cong FC. \tag{2}$$

Spojením rovnosti (2) a (1) dostaneme konečně

$$BF \cong FA,$$

a protože polopřímky FA, FB jsou opačné, je bod F středem úsečky AB, což jsme měli dokázat.

Poznámka 1. Ze vztahů (1) a (2) rovněž vyplývá, že »střed přepony pravoúhlého trojúhelníka je středem kružnice tomuto trojúhelníku opsané«. Protože jsme v úloze vyšli od zcela libovolného pravoúhlého trojúhelníka, provedli jsme v bodě b) také vlastně důkaz věty uvedené v uvozovkách pro libovolný pravoúhlý trojúhelník.

Poznámka 2. Vraťme se nyní k obrázku 56. Po konstrukci trojúhelníka A_1B_1C sestrojíme osu o úsečky AA_1. Protože $CA_1 \cong CA$, prochází o bodem C a obsahuje osy úhlů ACA_1 i BCB_1. Dále je podle konstrukce $CB_1 \cong CB$, takže i body B, B_1 jsou souměrně sdružené podle osy o. Trojúhelníky ABC a A_1B_1C jsou tedy souměrně sdružené podle osy o, a proto jsou i shodné. Tím jsme vlastně úlohu a) vyřešili jiným způsobem.

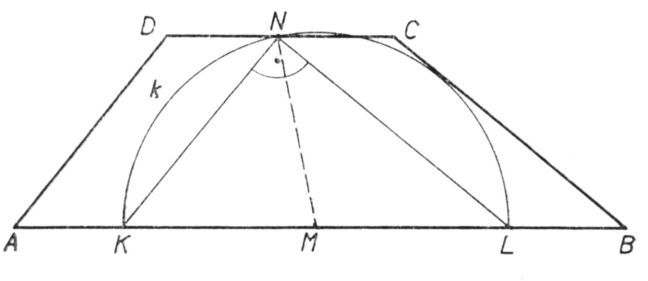
29. Je dán lichoběžník $ABCD$, v němž $AB > CD$. Označme M a N po řadě středy základen AB a CD.

Dokažte: Je-li

$$MN = \frac{1}{2}(AB - CD),$$

pak

$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABC = 90°.$$



Obr. 57

Řešení. Bodem N veďme (obr. 57) rovnoběžky s přímkami AD a BC, jejich průsečíky s přímkou AB označme po řadě K a L. Z konstrukce bodů K a L plyne, že $AK \cong BL \cong \frac{1}{2}\, CD$. Bod M je tedy středem úsečky $KL = AB - CD$, takže z předpokladu plyne

$$KM \cong ML \cong MN.$$

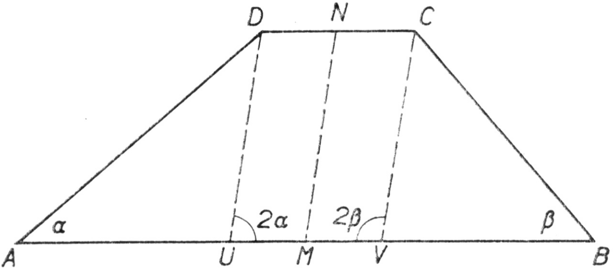
Bod N leží tedy na půlkružnici nad průměrem KL, takže

$$\sphericalangle KNL = 90°,$$

a tedy

$$\sphericalangle NKL + \sphericalangle KLN = 90°.$$

Protože $\sphericalangle NKL \cong \sphericalangle DAB$ a $\sphericalangle NLK \cong \sphericalangle CBA$, plyne dokazovaná rovnost z poslední rovnosti.



Obr. 58

Jiné řešení. Body C a D vedeme rovnoběžky s přímkou MN. Průsečíky s přímkou AB označme U a V (obr. 58). Platí

$$UM \cong MV \cong DN \cong NC \cong \frac{1}{2}\, CD < \frac{1}{2}\, AB,$$

takže U *a* V jsou vnitřní body úsečky AB. Z konstrukce bodů U a V plyne

$$DU \cong CV = \frac{1}{2}\,(AB - CD) \tag{1}$$

a

$$\begin{aligned} AU &\cong AM - UM \cong \frac{1}{2}\,(AB - CD),\\ BV &\cong BM - VM \cong \frac{1}{2}\,(AB - CD). \end{aligned} \tag{2}$$

Trojúhelníky AUD a BVC jsou podle (1) a (2) rovnoramenné s hlavními vrcholy U a V. Z vlastnosti vnějšího úhlu trojúhelníka vyplývá:

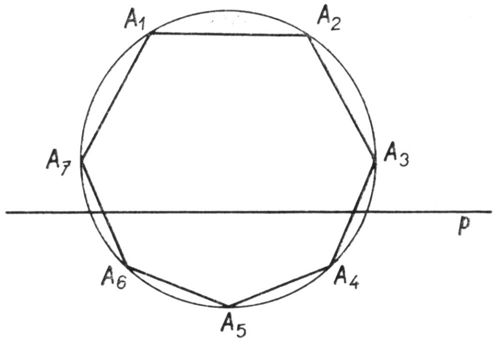
$$\begin{aligned} \sphericalangle UAD &\cong \frac{1}{2}\, \sphericalangle MUD\\ \sphericalangle VBC &\cong \frac{1}{2}\, \sphericalangle MVC \end{aligned} \tag{3}$$

Podle konstrukce bodů U a V je $UD \parallel VC$, takže

$$\sphericalangle MUD + \sphericalangle MVC = 180°. \tag{4}$$

Zřejmě $\sphericalangle UAD \cong \sphericalangle BAD$ a $\sphericalangle VBC \cong \sphericalangle ABC$, takže z (3) a (4) dostáváme dokazovanou rovnost.

30. Do kružnice je vepsán sedmiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Přímka p prochází středy stran A_3A_4, A_6A_7. Kolik úhlopříček daného sedmiúhelníka přímka p protíná?



Obr. 59

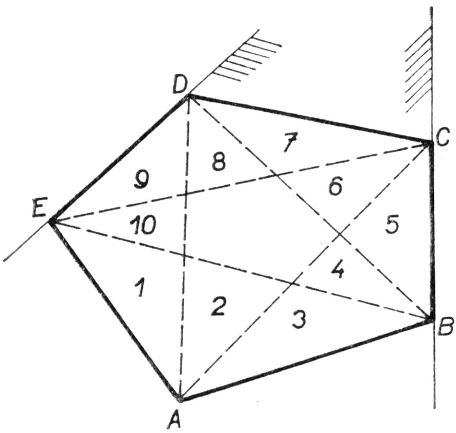
Řešení. Přímka p protíná úhlopříčku daného sedmiúhelníka, právě když její krajní body leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou p. V jedné z těchto polorovin (obr. 59) leží body A_7, A_1, A_2, A_3 a ve druhé A_6, A_5, A_4. Počet úseček, jejichž jeden krajní bod je A_7 a druhý z množiny $\{A_6, A_5, A_4\}$, se zřejmě rovná třem. Obdobně je tomu pro body A_1, A_2, A_3. Tedy úseček, jejichž jeden krajní bod je z množiny $\{A_7, A_1, A_2,$

$A_3\}$ a druhý z množiny $\{A_6, A_5, A_4\}$, je $4 \cdot 3 = 12$. Ovšem mezi těmito dvanácti úsečkami jsou též strany A_6A_7 a A_3A_4 daného sedmiúhelníka. Zbývajících deset je úhlopříčkami. Tedy přímka p protíná 10 úhlopříček daného sedmiúhelníka.

31. Je dán konvexní*) pětiúhelník $ABCDE$.

a) Dokažte, že žádné jeho tři úhlopříčky nemohou procházet týmž bodem.

b) Narýsujte tento pětiúhelník a všechny jeho úhlopříčky. Potom ho vystřihněte a rozstříhejte podél jeho úhlopříček. Zjistěte, kolik částí vzniklo a jaké jsou to útvary.

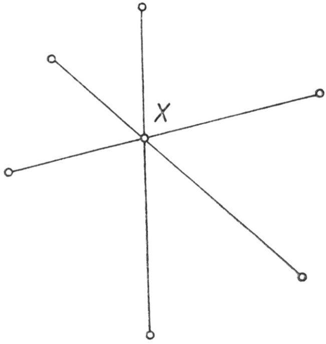


Obr. 60

*) Pro naši úvahu je účelná tato vlastnost konvexního mnohoúhelníka v rovině: Zvolme jeho libovolnou stranu a veďme jí přímku, která rozdělí rovinu na dvě opačné poloroviny. Potom mnohoúhelník (až na zvolenou stranu) leží v právě jedné z těchto polorovin.

Příklad: Pětiúhelník $ABCDE$ leží (až na stranu ED) celý v polorovině EDB; strana ED, ale jenom ona, patří též polorovině opačné (obr. 60).

Řešení. a) Pětiúhelník má celkem 5 vrcholů; z každého z nich vycházejí právě dvě strany a dvě úhlopříčky (např. na obr. 60 z vrcholu A dvě strany AB, AE a dvě úhlopříčky AC, AD - jiné možnosti nejsou). Kdyby tři úhlopříčky procházely týmž bodem, nemohl by to tedy být vrchol pětiúhelníka.



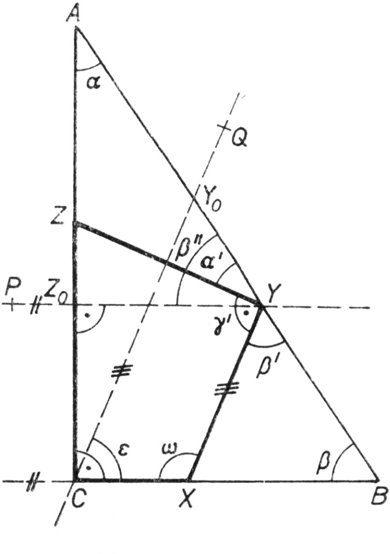
Obr. 61

Další úvahu provedeme formou tzv. »nepřímého důkazu«. Při důkazu tohoto typu obyčejně vylučujeme platnost jisté vlastnosti nebo situace tak, že nejprve její platnost pomocně předpokládáme, a pak na základě dalších správně vedených úvah dojdeme k neplatnému závěru. Z toho soudíme, že předpokládaná vlastnost neplatí. Ukážeme si to konkrétně v naší úloze:

Předpokládejme, že tři navzájem různé úhlopříčky se protínají v bodě X, který je vnitřním pro každou z nich. Na každé z úhlopříček leží dva vrcholy. Žádný z těchto vrcholů nemůže být společný dvěma různým úhlopříčkám; takové dvě úhlopříčky by měly společný vrchol a průsečík, a proto by splynuly.

Existuje tedy celkem 6 různých vrcholů (obr. 61), což však není možné, neboť pětiúhelník má jen 5 vrcholů. (Někdy říkáme, že jsme došli ke »sporu«.) Neplatí tedy náš předpoklad, že tři navzájem různé úhlopříčky procházejí bodem X, který je vnitřním pro každou z nich. Tím je důkaz a) zcela proveden.

b) Rozstříháním vypuklého pětiúhelníka vznikne 10 trojúhelníků a jeden pětiúhelník.



Obr. 62

32. Načrtněte pravoúhlý trojúhelník ABC tak, aby odvěsna BC byla menší než odvěsna CA. Uvnitř úsečky BC zvolte bod X a uvnitř úsečky AB najděte bod Y tak, že platí $XY \cong XB$. Bodem Y veďte kolmici k přímce XY; její průsečík s přímkou AC označte Z.

Dokažte, že obvod čtyřúhelníka $CXYZ$ je stále týž, ať zvolíme bod X kdekoli uvnitř úsečky BC.

Vypočtěte tento obvod pomocí stran trojúhelníka ABC.

Řešení (obr. 62). Označme $d(BC) = a$, $d(CA) = b$; podle textu úlohy je

$$a < b. \tag{1}$$

Bod X jsme podle textu úlohy zvolili uvnitř úsečky BC. Myslíme si, že sestrojení bodů X, Z lze provést tak, jak je naznačeno v obrázku 62, tj. že je

$$XY \cong XB, \tag{2}$$

přičemž bod Y leží uvnitř úsečky BA, a dále, že je

$$YZ \perp XY,$$

přičemž bod Z padne dovnitř úsečky CA. Podle (2) je trojúhelník XBY rovnoramenný a úhly β, β' při jeho základně BY jsou shodné; je tedy

$$\beta' = \beta. \tag{3}$$

Dále podle konstrukce kolmice k je

$$\gamma' = 90°. \tag{4}$$

Vypočítejme nyní velikost úhlu α'. Víme, že v daném trojúhelníku ABC je $\gamma = 90°$, a tedy

$$\alpha + \beta = 90° \tag{5}$$

(součet velikostí ostrých úhlů v pravoúhlém trojúhelníku je 90°). Je tudíž

$$\alpha' = 180° - \beta' - \gamma'$$

neboli [dosazujeme sem ze vztahů (3), (4)]

$$\alpha' = 180° - \beta - 90°,$$

a tedy

$$\alpha' = 90° - \beta.$$

Ze vztahu (5) plyne, že $\alpha = 90° - \beta$; odtud porovnáním obou posledních vztahů dostáváme

$$\alpha' = \alpha. \tag{6}$$

Z této rovnosti (podle známé věty o úhlech a protějších stranách trojúhelníka) plyne pro trojúhelník AYZ, že je

$$ZY \cong ZA. \tag{7}$$

Nyní vyjádříme obvod p čtyřúhelníka $CXYZ$; je

$$p = (d(CX) + d(XY)) + (d(CZ) + d(ZY)).$$

Dosaďme sem za XY ze vztahu (2) a za ZY ze vztahu (7); dostaneme

$$p = (d(CX) + d(XB)) + (d(CZ) + d(ZA)). \tag{8}$$

Podle obr. 62 však platí

$$d(CX) + d(XB) = d(CB) = a,$$

$$d(CZ) + d(ZA) = d(CA) = b.$$

Dosaďme tyto výsledky do (8); dostaneme

$$p = a + b.$$

Odpověď. Obvod čtyřúhelníka $CXYZ$ je roven součtu délek odvěsen daného pravoúhlého trojúhelníka ABC.

Než však ukončíme řešení, musíme ještě dokázat, že při volbě bodu X uvnitř úsečky CB (viz obr. 62)

[1] bod Y padne dovnitř úsečky AB,
[2] bod Z padne dovnitř úsečky CA.

Důkaz (viz označení z obrázku 62). V polorovině BCA sestrojme polopřímku $CQ \parallel XY$. Vnější úhel ω rovnoramenné-ho trojúhelníka XBY je roven $\beta + \beta'$, a protože je $\beta' = \beta$ [viz (3)], platí

$$\omega = 2\beta. \tag{9}$$

O přilehlých úhlech ε, ω mezi rovnoběžkami CQ, YX platí $\varepsilon + \omega = 180°$; dosaďme sem ze vztahu (9). Dostaneme $\varepsilon + 2\beta = 180°$; proto je

$$\varepsilon = 2\alpha,$$

neboť $2(\alpha + \beta) = 2 \,.\, 90°$ [viz vztah (5)]. Ale $\alpha < 45°$, $\beta > 45°$, neboť v daném trojúhelníku ABC je $a < b$, $\gamma = 90°$; je tedy $\varepsilon = 2\alpha < 90°$ a polopřímka CQ leží v pravém úhlu γ. Proto společný bod Y_0 polopřímky CQ a úsečky AB padne dovnitř této úsečky. Leží tedy celá přímka $XY \parallel CY_0$ uvnitř poloroviny CY_0B, a bod Y padne tudíž vždy dovnitř úsečky Y_0B, a tím také dovnitř úsečky AB.

Nyní sestrojme přímku $YP \parallel BC$; je tedy $CA \perp YP$. Protože přímka YP leží uvnitř poloroviny BCA a protože bod Y je vnitřním bodem úsečky AB, padne společný bod Z_0 kolmic CA, YP dovnitř úsečky CA. V trojúhelníku AYZ_0 je úhel $\sphericalangle Z_0 = 90°$ a úhel $\beta'' = 90° - \alpha$, tj. $\beta'' = \beta$. Protože je $\alpha < \beta$, je podle (6) též $\alpha' < \beta''$ a polopřímka YZ leží v úhlu β'', a tudíž bod Z padne dovnitř úsečky Z_0A; tato úsečka však je částí úsečky CA, a proto bod Z leží též uvnitř úsečky CA, což jsme měli dokázat.

Tím je celý důkaz proveden.