[dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z

VIII. Stereometrie

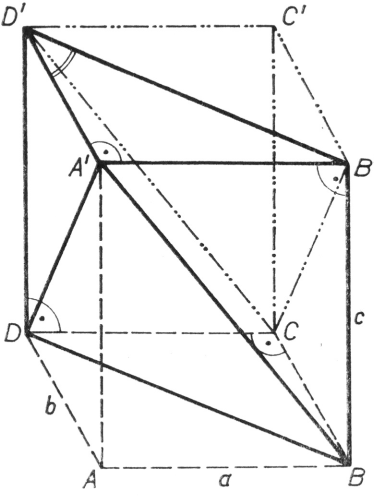
In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor): [dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z. Sbírka řešených úloh z III. až XXX. ročníku soutěže. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982. pp. 343–362.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405294

83. Kvádr $ABCDA'B'C'D'$ (s podstavou $ABCD$, přičemž je $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$) má rozměry $a = d(AB)$, $b = d(AD)$, $c = d(AA')$. Rovnoběžné roviny BDA' a $CB'D'$ oddělují od daného kvádru dva čtyřstěny $ABDA'$ a $C'CB'D'$.

a) Vyjádřete objem zbylého tělesa pomocí rozměrů a, b, c.

b) Narýsujte síť tohoto tělesa pro $a = 4$ cm, $b = 3$ cm a $c = 5$ cm.



Obr. 140

Řešení. a) Na obr. 140 je znázorněn kvádr $ABCD$ ve volném rovnoběžném promítání pro lepší názornost v »nadhledu zleva« (znamená to, že jsou viditelné: horní podstava, přední a levá pobočná stěna). Objem Z zbylého tělesa, jehož obraz je tlustě vytažen, vypočteme tak, že od objemu původního kvádru odečteme objemy oddělených čtyřstěnů.

Objem čtyřstěnu vypočítáme podle vzorce pro objem V jehlanu, tj.

$$V = \frac{1}{3} P \, . \, v,$$

kde P je obsah podstavy a v délka příslušné výšky. Považujme ve čtyřstěnu $ABDA'$ trojúhelník ABD za podstavu; pak příslušná výška je $v = d(AA') = c$. Obsah pravoúhlého trojúhelníka ABD o odvěsnách a, b je $P = \frac{1}{2} ab$. Proto je

$$V_1 = \frac{1}{3} \, . \, \frac{1}{2} \, ab \, . \, c = \frac{1}{6} \, abc.$$

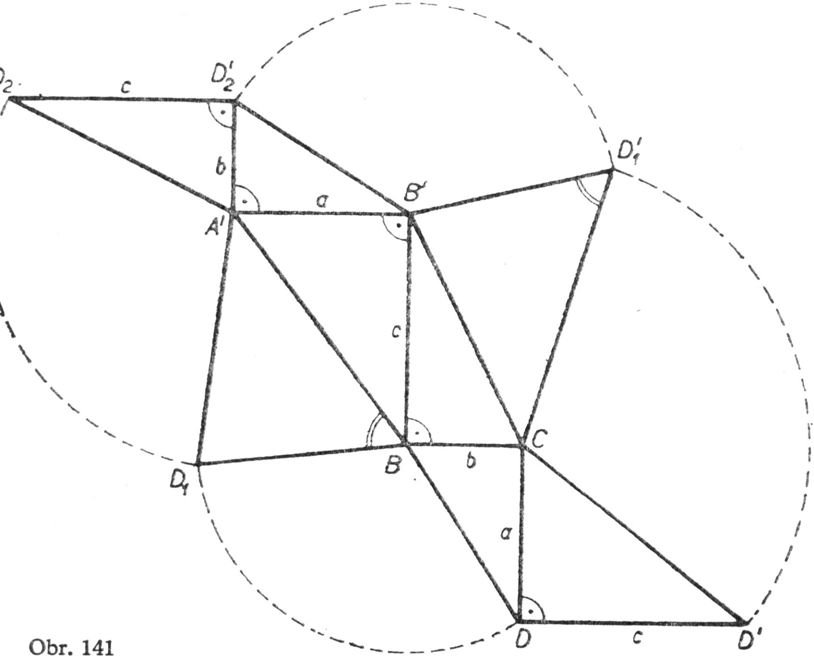
Objem V_2 druhého čtyřstěnu $C'CB'D'$ je rovněž $\frac{1}{6} abc$, neboť oba čtyřstěny mají shodné podstavy a výšky.

Dostáváme tedy pro objem Z zbylého tělesa

$$Z = abc - V_1 - V_2$$

čili

$$Z = abc - 2 \cdot \frac{1}{6} abc = \frac{2}{3} abc.$$

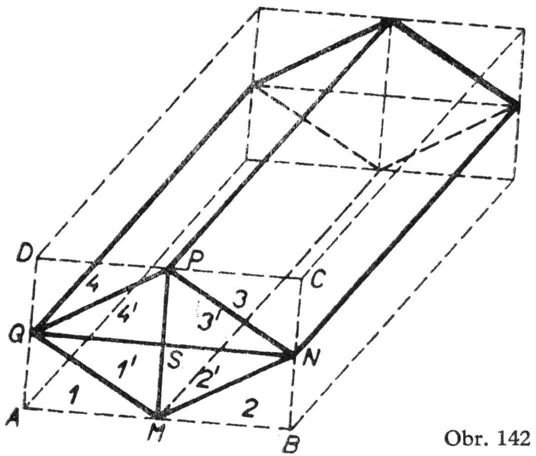


Obr. 141

Odpověď. Objem zbylého tělesa je $\frac{2}{3} abc$.

b) Síť zbylého tělesa je na obr. 141; při konstrukci vyjdeme nejvhodněji od stěny $A'B'B$ a její sousední stěny $B'BC$ a postupně připojujeme další stěny. Při rozvinutí povrchu v síť má např.

bod D tři obrazy (značené D, D_1, D_2); obdobně bod D' se zobrazí třikrát jako D', D_1' a D_2'.



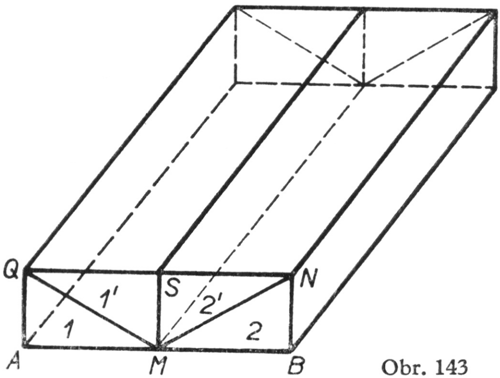
Obr. 142

84. Je dán kvádr o rozměrech a, b, c (viz obr. 142). Od kvádru oddělíme tělesa rovinnými řezy tak, že zbude těleso, které je na obrázku vyznačeno tlustými čárami. Jeho vrcholy leží ve středech hran přední a zadní stěny daného kvádru.

a) Narýsujte obrázek, z něhož je vidět, že se odříznuté části dají složit v jiný kvádr.

b) Vypočtěte objem tělesa, které zbylo po odříznutí.

Řešení. a) Označme středy hran stěny $ABCD$ daného kvádru stejně jako na obr. 142. Střední příčky MP, NQ tohoto obdélníka a dále úsečky MN, NP, PQ, QM dělí obdélník $ABCD$ na osm shodných pravoúhlých trojúhelníků; ty jsou na obr. 142 očíslovány 1, 2, 3, 4, 1′, 2′, 3′, 4′. Trojúhelníky se totiž shodují v odvěsnách, tedy podle věty *sus*. Proto můžeme trojúhelník 3 přemístit do polohy 1′, trojúhelník 4 do polohy 2′. S trojúhelníky 3, 4 přemístíme zároveň i odříznuté části kvádru, které k nim příslušejí.



Obr. 143

b) Podle výsledku úlohy a) dostaneme z odřezaných částí kvádr, jehož přední stěnou je obdélník *ABNQ* (obr. 143); rozměry tohoto kvádru jsou $a, \frac{1}{2} b, c$ a jeho objem V' je

$$V' = a \cdot \frac{b}{2} \cdot c$$

neboli

$$V' = \frac{1}{2} \cdot abc.$$

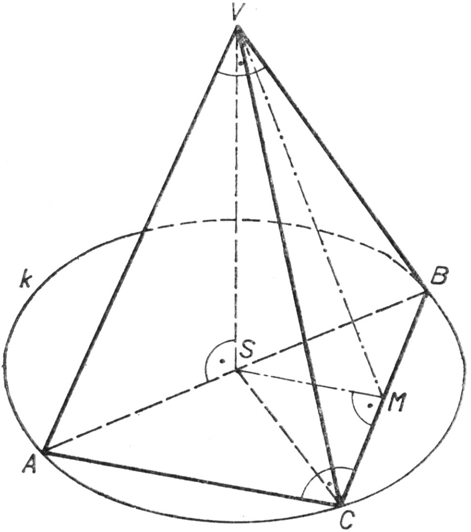
Protože objem daného kvádru je abc, rovná se objem odřezaných částí polovině objemu daného kvádru. Z toho plyne, že zbytek tělesa má objem rovný polovině objemu daného kvádru neboli $\frac{1}{2} \cdot abc$. Tím je úloha rozřešena.

85. Osový řez rotačního kužele je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník VAB o přeponě AB délky d. Přímkou AV je vedena rovina, která protne kužel v rovnostranném trojúhelníku VAC.

Pomocí proměnné d vyjádřete

a) objem jehlanu $ABCV$;

b) povrch jehlanu $ABCV$.



Obr. 144

Řešení (obr. 144). a) Pro výpočet objemu jehlanu $ABCV$ podle vzorce

$$V = \frac{1}{3} P \,.\, v$$

potřebujeme znát obsah podstavy P a velikost výšky v. Zjistíme potřebné údaje.

Bod V je vrcholem kužele a pravého úhlu rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka ABV s přeponou AB délky d; je tedy

$$d(AV) = d(BV) = \frac{d}{\sqrt{2}}. \tag{1}$$

Je-li S střed podstavy kužele, je jeho výška

$$v = d(SV) = \frac{d}{2}. \tag{2}$$

Protože trojúhelník VAC je rovnostranný, je

$$d(AC) = \frac{d}{\sqrt{2}}. \tag{3}$$

Trojúhelník ABC je podle Thaletovy věty pravoúhlý s přeponou AB. Pomocí Pythagorovy věty vypočítáme druhou odvěsnu

$$d(BC) = \sqrt{(d(AB))^2 - (d(AC))^2} = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{2}} = \frac{d}{\sqrt{2}}. \qquad (4)$$

Vzhledem k (1), (3) a (4) je

$$\triangle VAB \cong \triangle CAB;$$

proto je i trojúhelník VBC rovnostranný.

Pro objem jehlanu $ABCV$ s podstavou ABC a výškou SV dostaneme

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{d}{2} = \frac{d^3}{24}.$$

b) Vzhledem ke vztahům (1) až (4) platí $VA \cong VB \cong VC \cong \cong AC \cong BC$. Toho použijeme při výpočtu povrchu S našeho jehlanu. Nejprve zjistíme obsah P trojúhelníka ABC, který je týž jako obsah s ním shodného trojúhelníka VAB. Platí

$$P = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d^2}{4}.$$

Pomocí Pythagorovy věty vypočteme výšku VM trojúhelníka VBC:

$$d(VM) = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{8}} = \sqrt{\frac{3d^2}{8}} = \frac{d\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

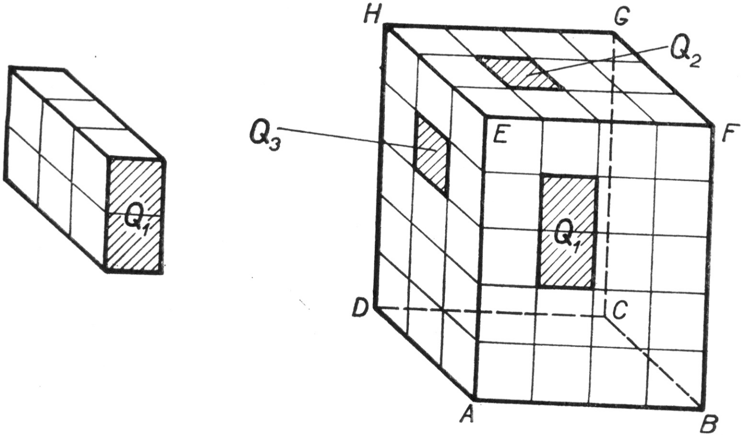
Obsah P' trojúhelníka VBC je roven obsahu s ním shodného trojúhelníka VCA. Platí

$$P' = \frac{1}{2} \, . \, d(BC) \, . \, d(VM) = \frac{1}{2} \frac{d}{\sqrt{2}} \, . \, \frac{d\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{d^2\sqrt{3}}{8} \, .$$

Povrch S jehlanu je tedy

$$S = 2P + 2P' = 2 \, . \, \frac{d^2}{4} + 2 \, . \, \frac{d^2\sqrt{3}}{8} = \frac{2d^2 + d^2\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{d^2}{4} (2 + \sqrt{3}).$$



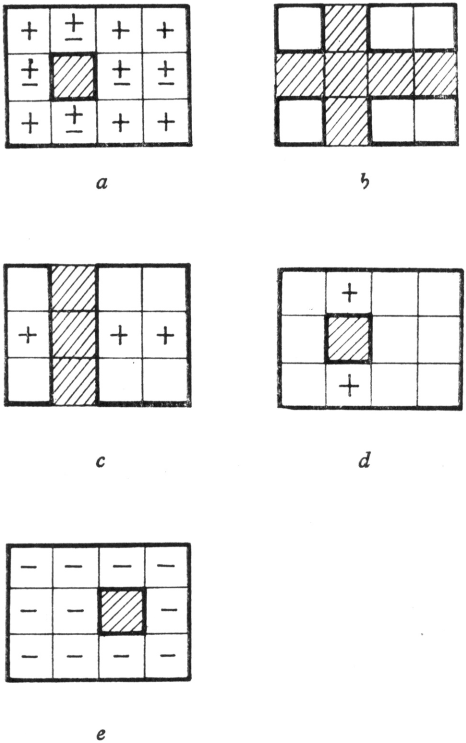
Obr. 145

86. Na připojeném obr. 145 vidíte kvádr o rozměrech $d(AB) = 4$ cm, $d(AD) = 3$ cm, $d(AE) = 5$ cm; tento kvádr je stmelen z krychliček o hranách délky 1 cm. Na povrchu kvádru je vyznačen obdélník $\mathbf{Q}_1$ o rozměrech 1 cm a 2 cm a dále pak dva čtverce $\mathbf{Q}_2$, $\mathbf{Q}_3$ o stranách 1 cm.

Nad obdélníkem $\mathbf{Q}_1$ vyrazíme z daného kvádru ve směru hrany AD sloupec (tvaru kvádru) složený celkem ze šesti krychliček; vyňatá část je znázorněna vlevo na obrázku. Tím vznikne v daném kvádru otvor. Obdobným způsobem sestrojíme nad čtvercem $\mathbf{Q}_2$ otvor dlouhý 5 cm ve s… hrany AE a nad čtvercem $\mathbf{Q}_3$ otvor dlouhý 4 cm v… s… hrany AB.

Vypočtěte objem a povrch (tj. včetně …chu dutiny) tělesa, které takto vzniklo.

Řešení. Abychom úlohu rozřešili, rozřežeme vzniklé těleso (tj. daný kvádr po sestrojení otvorů) na vrstvy, a to rovinnými řezy rovnoběžnými s rovinou horní podstavy $EFGH$ daného kvádru. Dostaneme tak pět vrstev, které jsou v obr. 146 seřazeny ve směru shora dolů; přitom si myslíme, že se na vrstvu díváme shora (z nadhledu). Patří-li horní stěna krychličky v určité vrstvě k povrchu tělesa, označíme ji v našem obrázku znaménkem $+$; patří-li spodní (dolní) stěna krychličky k povrchu tělesa, označíme ji v obrázku znaménkem $-$. Jestliže náleží povrchu boční stěna krychličky, vyznačíme ji v obrázku vrstvy tlustou úsečkou. Podle toho spočítáme v každé vrstvě počet stěn krychliček, které patří povrchu tělesa; zároveň spočítáme i počet krychliček v každé vrstvě (obr. 146 a, b, c, d, e).



Obr. 146

Značka vrstvy	Počet stěn ve vrstvě krychliček, které patří povrchu tělesa			Celkem stěn	Počet krychliček ve vrstvě
	horních stěn (+)	dolních stěn (—)	bočních stěn (v obrázku tlustě vytažených)		
a	11	5	18	34	11
b	—	—	20	20	6
c	3	—	18	21	9
d	2	—	18	20	11
e	—	11	18	29	11
			Součet	124	48

Odpověď. Povrch vzniklého tělesa je tedy 124 cm², objem tělesa je 48 cm³. (Odpadlo 60 — 48 = 12 krychliček.)

Jiné řešení. Na obrázku 147 máme znázorněno těleso, které jsme z kvádru odebrali. (Svislé šrafy značí zelenou barvu, šikmé šrafy červenou a vodorovné žlutou; stejně jsou obarveny i stěny vzniklé dutiny.)

Označme V objem a S povrch původního kvádru a V', S' objem a povrch kvádru s dutinou.

Dutina nad Q_1 vznikla vyjmutím šesti krychlí a vezmeme ji celou; má objem $V_1 = 6$ cm³, povrch $S_1 = 14$ cm².

Dutina nad Q_2 vznikla vyjmutím dalších tří krychlí; objem je $V_2 = 3$ cm³, povrch $S_2 = 12$ cm².

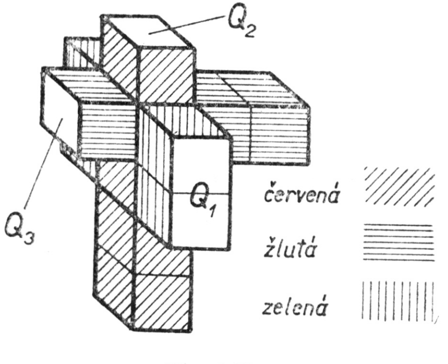
Dutina nad $\mathbf{Q}_3$ vznikla vyjmutím ještě dalších tří krychlí; objem je $V_3 = 3\ \text{cm}^3$, povrch $S_3 = 12\ \text{cm}^2$.

Obsahy obrazců $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$, $\mathbf{Q}_3$ označíme Q_1, Q_2, Q_3.

Podle obrázků vidíme, že platí (objem je vyjádřen v cm^3, povrch v cm^2):

$$V' = V - (V_1 + V_2 + V_3) = 4\,.\,3\,.\,5 - (6 + 3 + 3) =$$
$$= 60 - 12 = 48;$$
$$S' = S + (S_1 + S_2 + S_3) - 2\,(Q_1 + Q_2 + Q_3) =$$
$$= 2.(4.5 + 3.5 + 4.3) + (14 + 12 + 12) - (4 + 2 + 2) =$$
$$= 94 + 38 - 8 = 124.$$

Odpověď. Kvádr s dutinou má objem $48\ \text{cm}^3$ a povrch $124\ \text{cm}^2$.

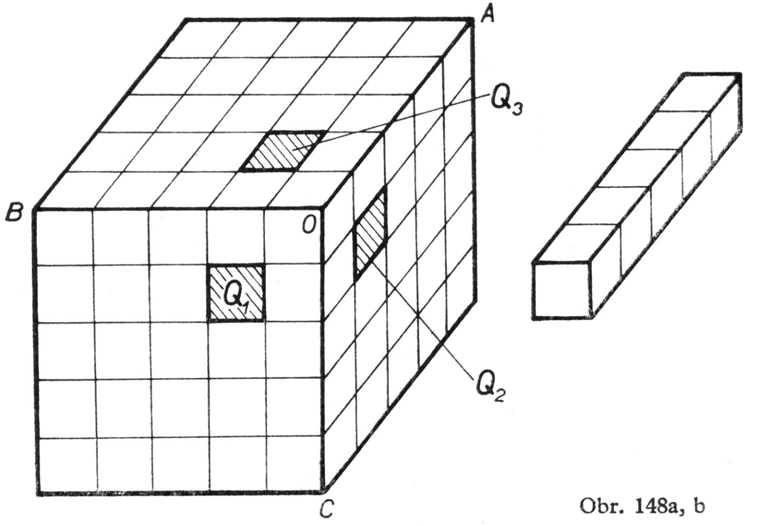


Obr. 147

87. Budiž dána krychle o hraně délky 5 cm; krychle je slepena z krychliček o hraně 1 cm. Zvolme na povrchu dané krychle tři čtverečky Q_1, Q_2, Q_3 o stranách délky 1 cm tak, jak je naznačeno v obr. 148a. Nad čtverečkem Q_1 ve směru hrany OA (viz obr. 148a) vyrazíme sloupec složený z pěti krychliček (vyňatá část je znázorněna v obr. 148b); tím vznikne v dané krychli otvor. Obdobným způsobem sestrojíme otvor nad čtverečkem Q_2 ve směru hrany OB a dále nad čtverečkem Q_3 otvor ve směru hrany OC. (Celkem bylo vyňato 13 krychliček.)

Provrtanou krychli ponoříme nyní do červené barvy, aby se povrch a dutiny obarvily. Po uschnutí krychli rozbijeme na krychličky o hranách délky 1 cm.

Určete, kolik jsme dostali krychliček, které mají obarvenou 1. jednu, 2. dvě, 3. tři, 4. čtyři, 5. pět, 6. šest, 7. žádnou stěnu.



Obr. 148a, b

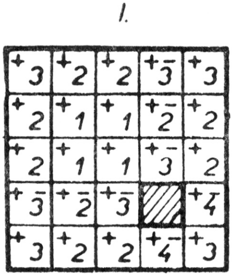
Řešení. Abychom snadněji úlohu rozřešili, rozřežeme krychli na desky tvaru kvádru, a to rovinnými řezy rovnoběžnými s horní podstavou krychle. Tím dostaneme pět desek tvaru kvádru o rozměrech 5 cm, 5 cm, 1 cm; tyto desky na dané krychli odshora dolů očíslujeme číslicemi I, II, III, IV, V. Desky zobrazíme čtverci o rozměrech 5 cm (viz obr. 149 až 153); mysleme si, že se na desky díváme shora, takže vidíme horní stěnu čtvercové desky. Je-li horní stěna krychličky v určité desce obarvena, napíšeme do čtverečku, který krychličku znázorňuje, znaménko +; je-li obarvena dolní stěna, napíšeme znaménko —. Je-li obarvena boční stěna krychličky, vytáhneme stranu čtverečku v obrázku tlustou úsečkou. Tak snadněji spočítáme, kolik stěn má krychlička obarvených; celkový počet obarvených stěn krychliček napíšeme také dovnitř čtverečku. Krychličky, které jsme z krychle vyňali, znázorníme v obrázcích vyšrafovaným čtverečkem.

Výsledky, které získáme, napíšeme do tabulky. V tabulce, např. v řádku označeném II (tj. deska čís. II), čteme: 1 krychlička je neobarvená, 4 krychličky mají obarvenou jednu stěnu, 6 krychliček má obarvené dvě stěny, 4 krychličky tři stěny, 1 krychlička má obarvené čtyři stěny; celkem má deska 16 krychliček.

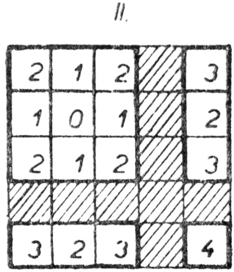
V předposledním řádku, označeném *S*, čteme výsledek: 11 krychliček je neobarvených, 36 krychliček má obarvenou jednu stěnu, 42 dvě stěny, 20 tři stěny, 3 čtyři stěny.

Provedeme **zkoušku.** Snadno přímo zjistíme, že je obarveno 192 stěn ($150 - 6 + 12 . 4$); skutečně platí

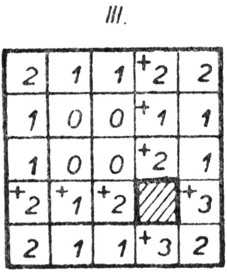
$$36 . 1 + 42 . 2 + 20 . 3 + 3 . 4 = 192.$$



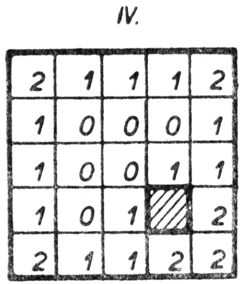
Obr. 149



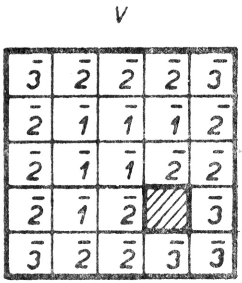
Obr. 150



Obr. 151



Obr. 152



Obr. 153

Počet obarvených krychliček v jednotlivých deskách je patrný z této tabulky:

Deska číslo	Počet krychliček, které mají obarveno n stěn					Počet krychliček v desce
	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	
I	0	4	10	8	2	24
II	1	4	6	4	1	16
III	4	10	8	2	0	24
IV	6	12	6	0	0	24
V	0	6	12	6	0	24
S*)	11	36	42	20	3	112
Obarv. stěn	0	36	84	60	12	192

*) S je celkový počet krychliček.

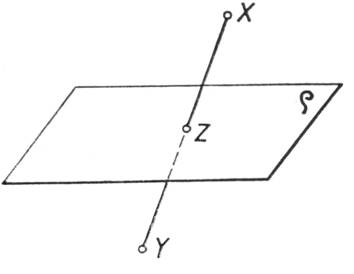
88. Dokažte, že hrany pravidelného trojbokého jehlanu se nedají očíslovat čísly 1, 2, 3, 4, 5 a 6 tak, aby součet tří čísel, kterými jsou očíslovány hrany jedné stěny, byl pro všechny čtyři stěny stejný (mezi stěny počítáme též podstavu).

Řešení. Představme si, že jsme si zvolili libovolný pravidelný trojboký jehlan, a že jsme jeho hrany očíslovali nějakým způsobem čísly 1, 2, 3, 4, 5, 6. Každé jeho stěně přiřaďme číslo, které je součtem tří čísel, jimiž jsou očíslovány její hrany. Jestliže sečteme čtyři čísla, která jsme takto přiřadili stěnám uvažovaného jehlanu, pak jejich součet bude

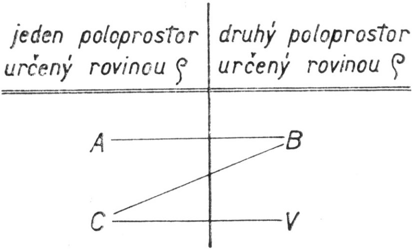
$$2 \,.\, (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 42,$$

neboť každá hrana náleží dvěma stěnám. Odtud již plyne tvrzení, které jsme měli dokázat, neboť číslo 42 není dělitelné čtyřmi.

89. Je dán trojboký jehlan $ABCV$. Rovina ϱ protíná jeho hrany AB, BC, CV a neprochází žádným z bodů A, B, C, V. Které hrany jehlanu rovina ještě protíná?



Obr. 154

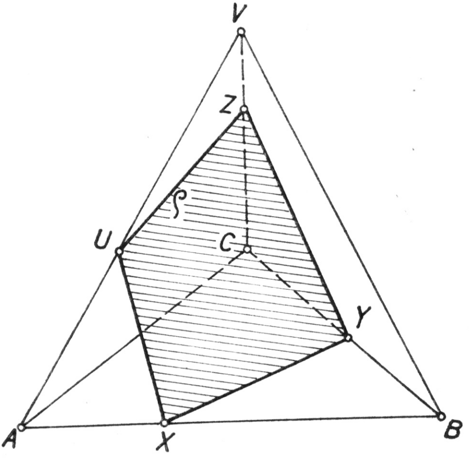


Obr. 155

Řešení. Nejprve zjistíme, které hrany by rovina ϱ ještě mohla protínat. Načrtneme-li trojboký jehlan $ABCV$, vidíme, že z textu úlohy nevyplývá, zda protíná hrany AC, AV a BV.

Před vlastním řešením si připomeňme jeden poznatek z geometrie, který zní: Jsou-li X a Y dva různé body, které neleží v rovině ϱ, pak rovina ϱ úsečku XY protíná (obr. 154), právě když body X a Y leží v opačných poloprostorech vyťatých rovinou ϱ.

Vrcholy A, B neleží v rovině ϱ a rovina ϱ protíná hranu AB. Z těchto dvou podmínek plyne, že body A, B leží v opačných poloprostorech vyťatých rovinou ϱ. Obdobně zjistíme, že v navzájem opačných poloprostorech určených rovinou ϱ leží body B, C a také body C, V. Přehlednější bude, když si tato tři zjištění zapíšeme do tabulky (obr. 155). V témže poloprostoru tedy leží body A a C a také body B a V, takže rovina ϱ hrany AC a BV neprotíná. Body A, V však leží v různých poloprostorech, a proto rovina ϱ protíná hranu AV. Tyto vztahy jsou znázorněny na obr. 156.



Obr. 156