30. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

1. ROČNÍK MOZ (MaMO) ŠKOLNÍ ROK 1980/1981

Kategorie MOZ 5

MOZ 5 - I - 1

Petr byl znám tím, že rád dával různé úlohy svým spolužákům, ale při sčítání „pro jistotu" používal sčítací pravítko. Jednou předložil spolužákům tuto statistiku: „V naší třídě je dohromady 31 žáků a všichni jsou podle svého zájmu rozděleni do kroužků takto: 18 žáků pracuje v matematickém kroužku, 14 v tělovýchovném a 16 v přírodovědném, 6 žáků pracuje v matematickém i tělovýchovném, 5 v matematickém i přírodovědném, 7 v tělovýchovném a přírodovědném a 3 ve všech třech kroužcích."

Jana, nejlepší žákyně ve třídě v matematice a členka matematického kroužku, po krátkém kreslení a počítání prohlásila: „Petře, tvoje statistika není správná." Rozhodněte, kdo z nich měl pravdu.

MOZ 5 - I - 2

Na kolik nepřekrývajících se částí je možné rozdělit rovinu čtyřmi různými přímkami? Určete všechny možnosti a každou z nich znázorněte graficky.

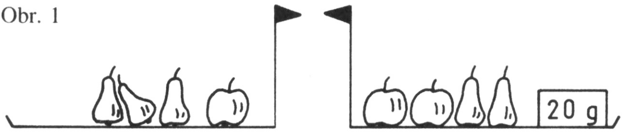
MOZ 5 - I - 3

Ve dvou kolonách aut bylo po 28 osobních autech. V obou kolonách dohromady bylo 11 aut značky Žiguli, ostatní byla značky Škoda 120 L. Kolik škodovek bylo v každé koloně, jestliže v první koloně připadlo na každé žiguli dvakrát méně škodovek než ve druhé?

MOZ 5 - I - 4

Rovnoramenné váhy byly v rovnováze při zatížení, které znázorňuje obrázek 1.

Obr. 1



(Všechny hrušky mají stejnou hmotnost, právě tak jablka; závaží má hmotnost 20 gramů.) Určete úsudkem (bez dalšího vážení) hmotnost jedné hrušky, jestliže hmotnost všeho ovoce je 780 gramů.

MOZ 5 - I - 5

Napište čtyři bezprostředně po sobě následující číslice různé od nuly. Zaměníte-li pořadí prvních dvou číslic, dostanete čtyřciferné číslo, které je součinem dvou stejných přirozených čísel. Určete všechna čtyřciferná čísla, která mají tuto vlastnost.

MOZ 5 - I - 6

Ve čtvercové tabulce (obr. 2) nahraďte písmena číslicemi tak, aby se součty čísel ve všech řádcích, sloupcích a obou úhlopříčkách rovnaly.

a	b	x	-2
2	-3	-4	5
x	c	-1	0
k	x	e	f

Obr. 2

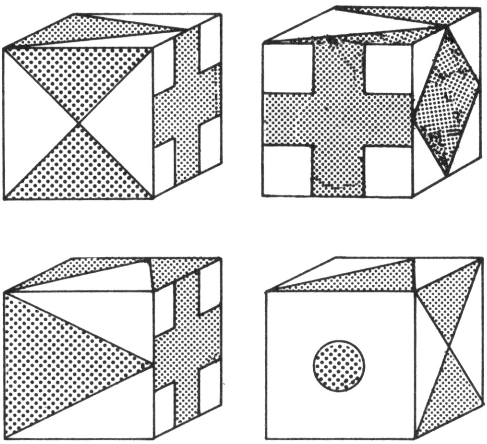
(Stejná písmena je třeba nahradit stejnými čísly, různá písmena znamenají různá čísla.)

MOZ 5 - I - 7

V prodejně látek měli 1 620 m látky. První den prodali 0,3 tohoto množství, druhý den $\frac{1}{6}$ zbytku. Zbylou látku prodali během dalších dvou dní tak, že třetí den prodali čtyřikrát víc než čtvrtý den. Kolik metrů látky prodali v jednotlivých dnech, jestliže za čtyři dny prodali všechnu látku?

MOZ 5 - I - 8

Na obrázku 3 je krychle s délkou hrany a = 4 cm ve čtyřech různých polohách. Narýsujte síť této krychle (i s geometrickými vzory).



Obr. 3

MOZ 5 - II - 1

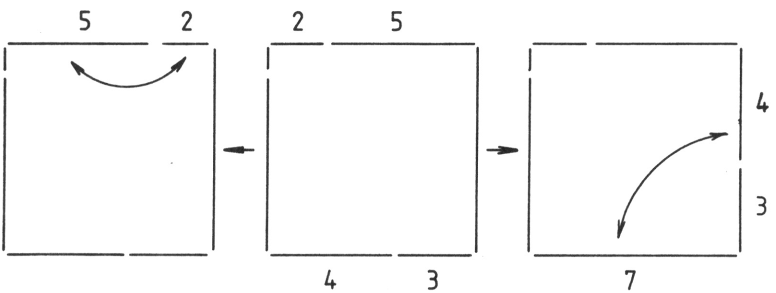
Spolužáci Aleš, Boris, Cyril, Dušan a Emil přinesli do sběrny dohromady 25 kg surovin. Hmotnost surovin, které odevzdal každý z nich, byla větší než 1 kg a byla vyjádřena v kilogramech přirozeným číslem. Určete, kolik surovin odevzdal každý ze spolužáků, víte-li, že Aleš přinesl víc než Cyril, Boris víc než Emil, Dušan méně než Emil a Cyril víc než Boris. V případě, že má úloha více řešení, najděte všechna.

MOZ 5 - II - 2

Tři stejně velké krychle a velká koule mají stejnou hmotnost jako 12 malých stejných kuliček. Hmotnost velké koule se rovná hmotnosti jedné krychle a 8 malých kuliček. Kolik kuliček má stejnou hmotnost jako velká koule?

MOZ 5 - II - 3

Z 9 tyčinek délek 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm, 9 cm sestavte čtverec. V případě, že se vám to podaří, určete délku strany čtverce. Najděte všechny další jiné způsoby sestavení čtverců. Čtverce považujeme za stejné, liší-li se pouze zaměněním tyčinek na téže straně nebo mají „přehozené" celé strany (obr. 4). Na sestavení čtverce nemusíme použít všechny tyčinky.



Obr. 4

MOZ 5 - II - 4

Narýsujte dva libovolné obdélníky tak, aby jejich průnik byl a) osmiúhelník, b) sedmiúhelník, c) šestiúhelník, d) pětiúhelník, e) čtyřúhelník, f) trojúhelník, g) úsečka, h) bod. V případech a) až f) společnou část obdélníků vyšrafujte.

Kategorie MOZ 6

MOZ 6 - I - 1

Určete počet všech dvojciferných čísel, jejichž druhá mocnina končí číslicí jedna.

MOZ 6 - I - 2

Přeškrtnete-li první dvě číslice pěticiferného čísla a za takto získané trojciferné číslo připíšete číslici 8, dostanete čtyřciferné číslo, které je čtyřikrát menší, než bylo původní pěticiferné číslo. Určete všechna čísla, která mají tuto vlastnost.

MOZ 6 - I - 3

Je dáno pět úseček s délkami 1, 3, 5, 7 a 9 cm. Kolik různých trojúhelníků je možné sestrojit z těchto úseček?

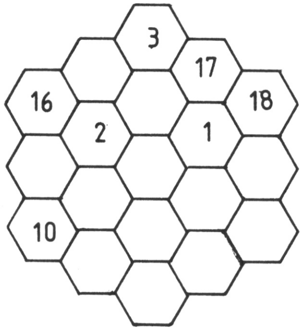
MOZ 6 - I - 4

a) V rovině je dáno 100 různých bodů, z nichž žádné tři neleží na téže přímce. Kolik různých přímek je těmito body určeno?

b) Řešte úlohu pro 101 různých bodů v rovině za stejných podmínek.

MOZ 6 - I - 5

Prázdné šestiúhelníčky (obr. 5) doplňte přirozenými čísly tak, aby v obrazci byla všechna čísla od 1 do 19. Ve všech pěti řádcích každého ze tří směrů (svislý a dva šikmé) musí být součet čísel v řádku vždy týž.



Obr. 5

MOZ 6 - I - 6

Dva vlaky jedoucí proti sobě se mají potkat. Jeden jede rychlostí 60 km/h, druhý rychlostí 40 km/h. V jaké vzdálenosti budou vlaky 30 minut před tím, než se potkají?

MOZ 6 - I - 7

Z Bratislavy do Banské Bystrice vyjelo nákladní auto rychlostí 30 km/h. Současně s ním vyjel autobus, který jel rychlostí 40 km/h a přijel do Banské Bystrice o 1 hodinu a 45 minut dříve než nákladní auto. Zjistěte na základě těchto údajů, jaká je vzdálenost mezi Bratislavou a Banskou Bystricí.

MOZ 6 - I - 8

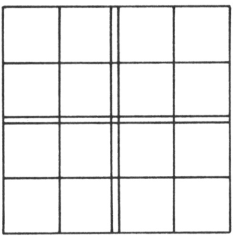
Za Jendou, nejlepším matematikem 6. B, přišla spolužačka Zuzka a řekla: „Neumím si poradit s úlohou z časopisu: Sedm bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce, spojte úsečkami libovolným způsobem tak, aby z každého bodu vycházely tři úsečky.” Jenda se zamyslel a za chvilku řekl: „To ale nejde, protože úloha je neřešitelná,” a vysvětlil Zuzce proč. Jak Jenda uvažoval? Za týden uveřejnili v časopise opravu tiskové chyby. Bodů mělo být osm. Je v tomto případě úloha řešitelná?

MOZ 6 - II - 1

Žáci sportovní třídy byli na horách. Za tři dny ušli 65 km. První den ušli dvakrát více než třetí den. Druhý den ušli o 10 km méně než první den. Kolik kilometrů ušli v jednotlivých dnech?

MOZ 6 - II - 2

Umístěte do 16 okének čtverce na obrázku 6 všechna čísla od 1 do 8, a to každé dvakrát, tak aby se součet čtyř čísel v každém řádku, v každém sloupci, v každé úhlopříčce, v každém malém čtverci a v rozích velkého čtverce rovnal 18.


Obr. 6

MOZ 6 - II - 3

Je dáno dvojciferné číslo. Zaměníme-li pořadí jeho cifer, dostaneme dvojciferné číslo, které je čtyřiapůlkrát větší než dané číslo. Určete dané číslo.

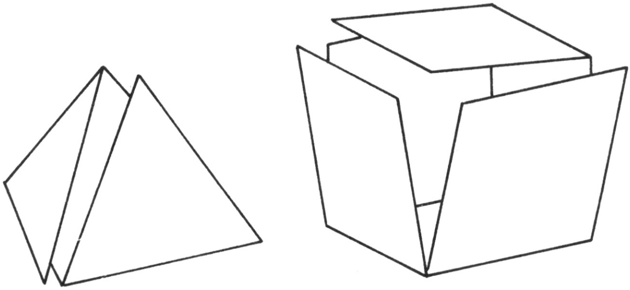
MOZ 6 - II - 4

Na obrázku 7a je nakreslen rozkládací model pravidelného čtyřstěnu a na obrázku 7b rozkládací model krychle.

a) Nakreslete síť čtyřstěnu a síť krychle.

b) Zjistěte, kolika různými způsoby je možné nakreslit síť čtyřstěnu a krychle.

Obr. 7



a) b)

Kategorie MOZ 7

MOZ 7 - I - 1

Náměstí tvaru obdélníku s délkami stran 252 m a 180 m je třeba osvětlit elektrickými lampami, které mají být umístěny ve stejných vzdálenostech po obvodě náměstí. V každém rohu náměstí už stojí jedna lampa. Kolika lampami ještě musíme osvětlit náměstí, jestliže mezera mezi lampami má být co největší?

MOZ 7 - I - 2

Jeden náš známý matematik si v den svých narozenin roku 1963 všiml, že jeho věk se rovná součinu čísel napsaných čtyřmi číslicemi letopočtu jeho narození. V kterém roce se narodil?

MOZ 7 - I - 3

Z krychlí s objemem 1 cm^3 je sestavena velká krychle, jejíž povrch je obarven a měří 216 cm^2. Z každého rohu velké krychle odebereme jednu malou krychli.

a) Určete objem takto vzniklého tělesa.

b) Rozhodněte, zda je možno z takto odebraných krychlí vytvořit kvádr, jehož povrch bude mít tolik cm^2, o kolik se zmenšil obarvený povrch. Jestliže ano, jaké budou jeho rozměry?

c) Kolik procent barvy by se ušetřilo, kdybychom místo velké krychle natřeli jen tu část jejího původního povrchu, která zůstala po odebrání malých krychlí z rohů velké krychle?

MOZ 7 - I - 4

Je dán obdélník $ABCD$ se stranami $|AB| = 3$ cm, $|BC| = 2$ cm. S je střed obdélníku. Označme S_1 obraz bodu S ve středové souměrnosti se středem v bodě A, S_2 obraz bodu S_1 ve středové souměrnosti se středem v bodě B. Vypočítejte obsah trojúhelníku SS_1S_2.

MOZ 7 - I - 5

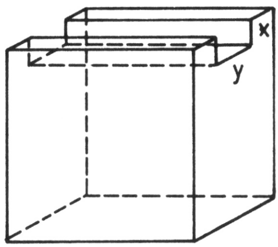
Škola objednala dohromady 324 bílých, růžových a červených aster do kytic na hroby padlých vojáků. Růžových aster bylo o 36 víc než bílých a červených bylo dvakrát víc než bílých. Kolik stejných kytic (stejný počet květů i barev) se dá svázat z těchto květů? Kolik květů jednotlivých barev by bylo v každé kytici? Napište všechny možnosti.

MOZ 7 - I - 6

Vysokoškoláci Vláďa a Milan hrají šachy. Kolem nich jde Milanova mladší sestra Naďa. Na Vláďovu otázku: „Kolik let je Nadě?" Milan odpovídá: „Když vynásobíš pořadové číslo dnešního dne v týdnu (pondělí – 1, ..., neděle – 7) číslem Nadina dne narození a číslem měsíce, ve kterém se narodila, dostaneš rok jejího narození." Určete den v týdnu, kdy hráli Milan a Vláďa šachy, a datum, kdy se narodila Naďa.

MOZ 7 - I - 7

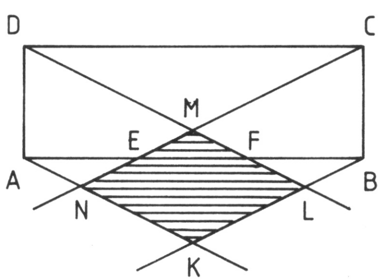
Do krychle s hranou délky 60 mm je třeba udělat výřez tvaru kvádru tak, jak je to znázorněno na obrázku 8. Jaké rozměry x, y vyjádřené celými čísly může mít tento výřez, aby povrch tělesa, které po výřezu vznikne, byl o $\frac{1}{6}$ větší než povrch celé krychle? Délka y nesmí být menší než 10 mm, ale musí být menší než 30 mm.



Obr. 8

MOZ 7 - I - 8

Je dán obdélník $ABCD$ se stranami $|AB| = 3$ cm, $|BC| = 1$ cm. Na straně AB zvolme body E, F tak, aby platilo $|AE| = 1$ cm, $|BF| = 1$ cm. Sestrojte přímky CE, DF a bodem B veďte rovnoběžku s přímkou CE, bodem A rovnoběžku s přímkou DF. Průsečíky dvojic rovnoběžek označme K, L, M, N (obr. 9). Vypočítejte obsah rovnoběžníku $KLMN$.



Obr. 9

MOZ 7 - II - 1

Žáci dvou tříd se dohodli, že při sběru starého papíru se rozdělí do skupin tak, aby v každé skupině byl stejný počet žáků. Při rozdělování zjistili, že se mohou rozdělit jen na skupiny po 3 nebo 7 žácích, protože při utváření skupin po 4, 5 nebo 6 žácích vždy přebývala trojčlenná skupina. Kolik žáků měly obě třídy dohromady, jestliže víte, že v každé třídě bylo méně než 40 žáků?

MOZ 7 - II - 2

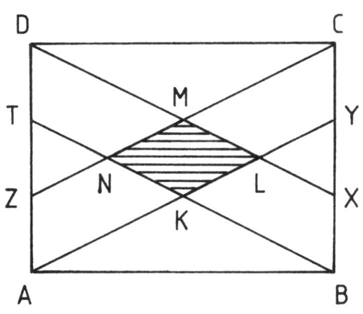
Kolik kvádrů s povrchem 52 cm^2 a s jedním rozměrem $a =$ $= 2$ cm je možno sestavit z nejvýše 40 krychlí s hranou délky 1 cm?

MOZ 7 - II - 3

Jenda a Petr hrají kuličky tak, že střídavě berou 2 nebo 3 kuličky z hromádky, ve které je 12 kuliček. Vyhrává ten, kdo bere poslední. Zůstane-li na konci 1 kulička, je výsledek nerozhodný. Po chvilce zjistili, že ten, kdo začíná brát první, může vždy vyhrát. Kolik kuliček musí vzít začínající hráč, aby vyhrál? Odůvodněte své tvrzení.

MOZ 7 - II - 4

Je dán obdélník $ABCD$ ($|AB| = 4$ cm, $|BC| = 3$ cm). Na straně $|BC|$ zvolme body X, Y tak, aby platilo $|BX| =$ $= |CY| = 1$ cm, a na straně AD body Z, T tak, aby $|AZ| =$ $= |DT| = 1$ cm. Průsečíky úseček AY, ZC, DX, TB je určen rovnoběžník $KLMN$ (obr. 10). Vypočítejte obsah rovnoběžníku $KLMN$.



Obr. 10