[dokumenty-06] Úlohy z matematických olympiád na základní škole

31. ročník Matematické olympiády

In: Vladimír Repáš (editor); Anna Pribišová (editor); Juraj Vantuch (editor): [dokumenty-06] Úlohy z matematických olympiád na základní škole. (4.-7. ročník). (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991. pp. 17–27.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405302

31. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

2. ROČNÍK MOZ (MaMO) ŠKOLNÍ ROK 1981/1982

Kategorie MOZ 5

MOZ 5 - I - 1

Máme padesátihaléřové, korunové a dvoukorunové mince. Kolika způsoby můžeme zaplatit částku 3,50 Kčs?

MOZ 5 - I - 2

„Změnit" číslo bude znamenat vydělit ho dvěma a k výsledku přičíst 1. Například změníme-li číslo 5, dostaneme $\frac{5}{2} + 1$ neboli 3,5. Změníme-li číslo 3,5, dostaneme $\frac{3,5}{2} + 1$, tedy 2,75, a změníme-li toto číslo, dostaneme 2,375. Jestliže tedy číslo 5 „třikrát po sobě změníme", dostaneme číslo 2,375.

a) Myslím si číslo x. Změnil jsem ho třikrát po sobě a dostal jsem číslo 2. Které číslo jsem si myslel?

b) Myslím si číslo y. Změnil jsem ho čtyřikrát po sobě a dostal jsem číslo 3. Které číslo jsem si myslel?

MOZ 5 - I - 3

Narýsujte čtverec $ABCD$ se stranou $|AB| = 6$ cm. Sestrojte střed úsečky CD a označte ho E. Narýsujte úhlopříčku AC a úsečku BE. Úsečky AC, BE rozdělily čtverec na čtyři části. Vypočítejte obsah každé z nich.

MOZ 5 - I - 4

V rovině je dán rovnostranný trojúhelník ABC se středy stran P, Q, R. Kolika způsoby můžeme rozdělit trojúhelník ABC na čtyři menší trojúhelníky, jejichž vrcholy jsou prvky množiny bodů A, B, C, P, Q, R?

MOZ 5 - I - 5

Počítáte-li součiny tří, $3 = 03$, $3 \cdot 3 = 09$, $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$, $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$, $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$, vidíte, že je na místě desítek vždy sudá číslice. Bude na místě desítek sudá číslice i tehdy, vynásobíte-li 40 trojek? Jestliže ano, jaká? Zkuste co nejjednodušeji násobit.

MOZ 5 - I - 6

Pět dětí, které označíme A, B, C, D, E, odevzdalo 25 kg surovin. Žák A přinesl víc než C, B víc než žák E, žák D méně než E a žák C víc než žák B. Hmotnost surovin, které odevzdal každý žák, byla v kilogramech vyjádřena přirozeným číslem. Kolik kilogramů surovin odevzdali jednotliví žáci? Pokud má úloha více řešení, najděte všechna.

MOZ 5 - I - 7

Šest měst A, B, C, D, E, F je spojeno silnicemi. Na obr. 11 jsou zapsány nejkratší silniční vzdálenosti mezi jednotlivými městy v kilometrech. Nakreslete mapku silniční sítě a vyznačte na ní města, jejich označení a silniční vzdálenosti.

Obr. 11

A					
13	B				
7	9	C			
4	9	10	D		
9	4	5	5	E	
4	12	3	8	8	F

MOZ 5 - I - 8

Dva chlapci závodili na kruhovém hřišti. Mladší z nich šel rychlostí 5 km/h. Starší chlapec šel rychlostí 7 km/h a vystartoval tehdy, když mladší ušel vzdálenost 400 metrů. Závod skončil po čtyřech kolech. Jak dlouhá byla trať, jestliže oba chlapci došli do cíle současně?

MOZ 5 - II - 1

Kolika způsoby je možné z devíti stejně velkých čtverců (tří bílých, tří červených a tří modrých) složit čtverec s rozměry 3 × 3 tak, aby v každém řádku i v každém sloupci byly čtverce různých barev?

MOZ 5 - II - 2

a) Vyškrtněte ze sedmiciferného čísla 4 713 268 tři číslice tak, abyste dostali co největší číslo.

b) Z 31ciferného čísla
1 234 567 891 011 121 314 151 617 181 920 vyškrtněte 6 číslic tak, abyste dostali co nejmenší číslo.

MOZ 5 - II - 3

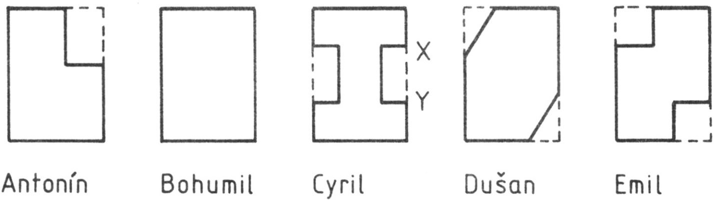
Do dvanácti prázdných políček tabulky na obrázku 12 zapište čísla tak, aby součet každých tří čísel, která je možné pokrýt obdélníkem nebo , se rovnal šesti.

1			
	0		
		2	
	3		

Obr. 12

MOZ 5 - II - 4

Pět sousedů, Antonín, Bohumil, Cyril, Dušan a Emil, mělo zahrady tvaru jako na obrázku 13. Uspořádejte zahrady podle délky plotu bez měření. Své výsledky zdůvodněte.



Obr. 13

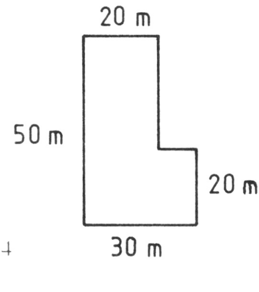
Kategorie MOZ 6

MOZ 6 - I - 1

Traktorista chtěl zorat 18 ha pole za 3 dny při stejném denním výkonu. První den plán splnil. Druhý den však pracoval v horších podmínkách a zoral o 15 % méně než první den. O kolik procent musí zvýšit svůj výkon třetí den proti výkonu ve druhém dni, aby splnil plán?

MOZ 6 - I - 2

Otec odkázal třem synům zahradu, jejíž tvar je znázorněn na obrázku 14, s podmínkou, že si ji rozdělí na tři části tak, aby byly stejně velké, měly stejný obvod a tvar. Jak to udělali?



Obr. 14

MOZ 6 - I - 3

Na celostátním kole matematické soutěže se setkal Paľko z Prešova, Slavko ze Sliače, Bohuš z Bardejova, Lacko z Lúček a Rudko z Ružbachů. Při loučení se domluvili, že každý z nich během prázdnin navštíví právě jednoho kamaráda. Plán návštěv navrhl Rudko, který cestou domů navštíví Paľka. Plán obsahoval tyto podmínky: Lacko nepojede do Ružbachů, Rudka navštíví ten, kdo bydlí ve městě, kam pojede Bohuš. Paľko to nebude. Sestavte plán, kdo koho navštíví.

MOZ 6 - I - 4

Na mezinárodní konferenci bylo 33 účastníků od nás, ze Sovětského svazu a z Maďarska. Osm z nich ovládalo ruštinu a maďarštinu, 14 ruštinu a slovenštinu a jen 5 mluvilo plynule slovensky i maďarsky. Tři účastníci konference ovládali všechny tři jazyky. Počet těch, kteří znali jen svůj mateřský jazyk, byl stejný ze všech tří zemí. Určete, kolik účastníků konference umělo rusky, kolik slovensky a kolik maďarsky.

MOZ 6 - I - 5

Nad úhlopříčkou *AC* daného obdélníku *ABCD* sestrojte obdélník *ACKL* tak, aby oba obdélníky měly stejný obsah.

MOZ 6 - I - 6

V pěti sáčcích jsou kuličky, jejichž množství je vyjádřeno pěti za sebou následujícími sudými přirozenými čísly. Dohromady je jich 300. Kolik kuliček je v každém sáčku?

MOZ 6 - I - 7

Během přestávky před hodinou matematiky jeden člen služby napsal na tabuli: $\left[1, \frac{1}{2}\right]$, $\left[2, \frac{4}{5}\right]$, $[3, 1]$, $\left[4, \frac{8}{7}\right]$, $[5, \ ]$, $[\ , \ ]$. Už se to chystal smazat, když zazvonilo a do třídy vkročila paní učitelka. Podívala se na tabuli a řekla: „Nemazat, je v tom určitá zákonitost. Kdo ji objeví?"

a) Která tři čísla nestihl žák napsat?

b) Napište uspořádanou dvojici čísel v hranaté závorce obecně. Jestliže první číslo je n, jaké je druhé číslo?

MOZ 6 - I - 8

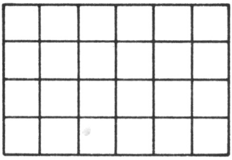
Je dán trojúhelník ABC. Označte A_0, B_0, C_0 středy stran BC, AC, AB a T průsečík úseček AA_0, BB_0 a CC_0. (T je těžiště trojúhelníku ABC.) Dokažte, že obsahy trojúhelníků ABT, BCT a CAT se rovnají.

MOZ 6 - II - 1

Rybář chytil sumce. Když se ho přátelé zeptali, jak dlouhý byl úlovek, odpověděl: „Hlava je dlouhá 9 cm. Délka těla se rovná délce ocasu a hlavy dohromady. Potom ocas je tak dlouhý jako hlava a polovina těla dohromady." Jakou délku měl ulovený sumec?

MOZ 6 - II - 2

Obdélník s rozměry a = 6 cm, b = 4 cm (obr. 15) rozřežte na 4 shodné části tak, aby jejich rozměry v centimetrech byly vyjádřeny přirozenými čísly. Řezat smíte jen po čárách sítě. Najděte všechny možnosti.



Obr. 15

MOZ 6 - II - 3

Žáci třídy 6. A denně sledovali počasí v průběhu dvou týdnů a zaznamenali tyto údaje:

a) zataženo ... 5 dní,
b) zataženo a déšť ... 3 dni,
c) déšť ... 4 dni.

Kolik dní bylo jasno (tj. nebylo zataženo a nepršelo)?

MOZ 6 - II - 4

Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC s výškou $v = 6$ cm. Uvnitř tohoto trojúhelníku najděte takový bod X, aby obsah trojúhelníku BCX byl dvakrát větší než obsah trojúhelníku ABX a obsah trojúhelníku ACX třikrát větší než obsah trojúhelníku ABX.

Kategorie MOZ 7

MOZ 7 - I - 1

Z číslic 1 až 9 sestavte dvojice čísel a jejich součin tak, aby se v zápisu vyskytovaly tyto číslice právě jednou. Např.: $18 \cdot 297 = 5\,346$.

Počítač zjistil, že existuje ještě 8 podobných součinů. Pokuste se je najít.

MOZ 7 - I - 2

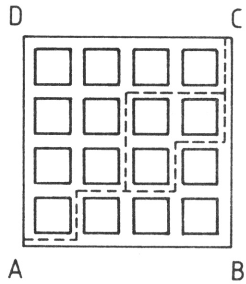
Vedení zemědělského družstva se rozhodlo v období žní dopravit do skladů auta s obilím přesně v 11.00 h. Jestliže auta pojedou rychlostí 30 km/h, přijedou na místo v 10.00 h, pojedou-li však rychlostí 20 km/h, přijedou na místo ve 12.00 h. Kolik kilometrů je z družstva ke skladům obilí a jakou rychlostí musí jet auta, aby přijela na místo ve stanovenou dobu?

MOZ 7 - I - 3

Z dopisu žáků:

V matematickém kroužku jsme rýsovali plán šestnácti čtvrtí našeho města. Na náčrtu plánu, který vidíte na obrázku 16, jsou všechny čtvrti znázorněny stejnými čtverci. Zaujalo nás, kolik různých ulic je možné vést z bodu A do bodu C, můžeme-li se pohybovat ulicemi našeho města jen nahoru a vpravo. Některé úseky ulic mohou splývat (viz čárkované čáry na náčrtu plánu). Přesvědčili jsme se, že to není lehká úloha. Vyřešili jsme ji správně, když jsme našli 70 různých ulic?

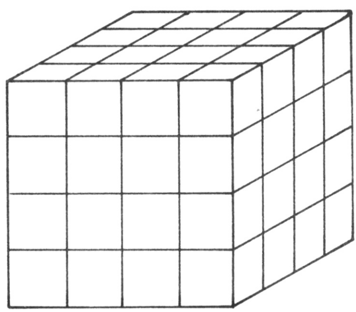
Jak je potřeba odpovědět na tento dopis?



Obr. 16

MOZ 7 - I - 4

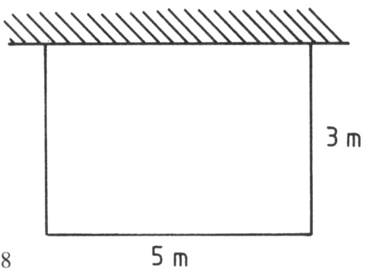
Chceme rozřezat dřevěnou krychli s hranou délky 40 cm na 64 krychlí s délkou hrany 10 cm (obr. 17). Snadno to můžeme udělat devíti řezy, jestliže nezměníme polohu rozřezaných částí. O kolik se dá zmenšit počet řezů, můžeme-li po každém řezu části přemístit?



Obr. 17

MOZ 7 - I - 5

Dědeček je drobný chovatel. Má ohrádku pro kuřátka 5 m dlouhou a 3 m širokou. Ohrádka je ze tří stran oplocena pletivem a na jedné z delších stran je postaven kurník (obr. 18). Dědeček se rozhodl, že ohrádku obloží prkny, aby kuřata nemohla podlézat pletivo. Šel do kůlny, kde měl jedno prkno 5 m dlouhé, jedno 3 m dlouhé, čtyři 2 m dlouhá a jedno 1 m dlouhé. Aspoň jedno z prken musel v kůlně nechat. Kolik je možností, jak obložit ohrádku, aby dědeček nemusel donesená prkna řezat?



Obr. 18

MOZ 7 - I - 6

Některé baktérie se ve zkumavce množí dělením tak, že každou minutu vzniknou z jedné baktérie dvě. Za 24 hodin se baktérie rozmnožily tak, že zaplnily celou zkumavku. Za jakou dobu byla zaplněna čtvrtina zkumavky?

MOZ 7 - I - 7

Kolik různých tahů může na prázdné šachovnici udělat a) jezdec, b) dáma?

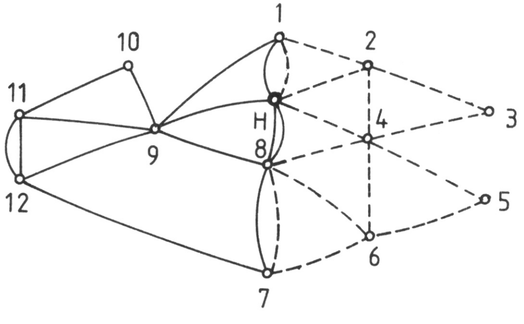
MOZ 7 - I - 8

Za Jendou, nejlepším matematikem 7. A, přišla spolužačka Zuzka a řekla: „Jendo, mám problém." „Už zase?" „Zase. Víš, můj otec a strýc Fanda kropí ulice ve městě a nevědí si rady. Podívej, přinesla jsem ti plánek části města, o kterou jde: Tlustě vytažené ulice kropí otec a čárkovaně vytažené kropí strýc. Oba vyjedou od hydrantu H a chtěli by každou ulicí projet jen jednou a znovu se k němu vrátit." „A mají dost vody?" „Vody by měli dost, ale ať dělají co dělají, vždy musí jet po ulici, kterou už kropili, a zbytečně plýtvat naftou. Chápeš?" Jenda si vzal plánek a druhý den řekl Zuzce: „Při tomto rozdělení ulic, které mají, to jinak nejde, jestliže však tvůj otec dá jednu ulici strýci Fandovi, dá se to vyřešit" a vysvětlil Zuzce jak. Víte to i vy? Jestliže ano, jistě odpovíte správně na tyto tři otázky:

a) Proč se úloha nedá vyřešit při původním rozdělení ulic?

b) Kterou ulici musí Zuzčin otec dát strýci Fandovi, aby úloha měla řešení?

c) Poraďte Zuzčinu otci a strýci Fandovi, jak je třeba jet s kropicími vozy (po předání ulice), aby po vyjetí od hydrantu H projel každý jemu přidělenou ulicí jen jednou a vrátil se k hydrantu H. Stačí napsat pořadí křižovatek (na plánku jsou očíslované). (Obr. 19.)



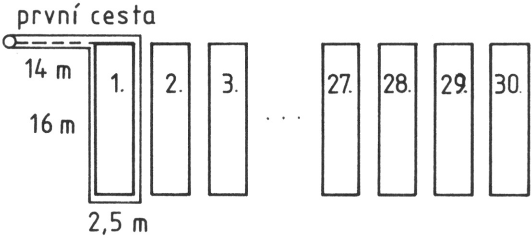
Obr. 19

MOZ 7 - II - 1

Pět bojovníků z kmene Apačů v čele se slavným Vinnetouem zajalo 34 dobyvatelů - bělochů. Do tábora je měli dopravit přes řeku ve člunu, do kterého se vešlo 9 lidí. Náčelník Vinnetou dal převézt zajatce tak, aby jeden bojovník neměl pod dozorem víc než 10 zajatců a aby je převezli napětkrát. Víte, jak to udělali?

MOZ 7 - II - 2

Na zahradě je 30 záhonů. Každý má délku 16 metrů a šířku 2,5 metru. Zahradník nosí na zalévání vodu v konvích ze studně vzdálené 14 metrů od zahrady, přičemž obchází záhony po obvodu. Najednou přinese vodu na jeden záhon. Kolik metrů musí ujít, aby zalil všechny záhony? Cesta začíná a končí u studně. Podívej se na obrázek 20.



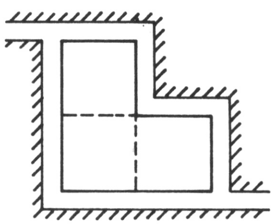
Obr. 20

MOZ 7 - II - 3

Dva soustružníci mají dohromady zhotovit víc než 100 a méně než 450 výrobků. Plánované výkony prvního a druhého soustružníka jsou různé. První soustružník zhotovil první den $\frac{1}{5}$, druhý den $\frac{1}{6}$, třetí den $\frac{2}{7}$ množství, které si naplánoval. Druhý soustružník zhotovil první den $\frac{1}{3}$, druhý den $\frac{1}{4}$ a třetí den $\frac{3}{11}$ množství, které si naplánoval. Jaké byly plánované úkoly každého z nich?

MOZ 7 - II - 4

Pozemek na obrázku 21 je třeba rozdělit na 8 stavebních parcel tak, aby měly stejný tvar i velikost a aby se na každou parcelu dalo vejít přímo z ulice.



Obr. 21