[dokumenty-06] Úlohy z matematických olympiád na základní škole

Řešení úloh

In: Vladimír Repáš (editor); Anna Pribišová (editor); Juraj Vantuch (editor): [dokumenty-06] Úlohy z matematických olympiád na základní škole. (4.-7. ročník). (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991. pp. 78–190.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405307

ŘEŠENÍ ÚLOH

1. ROČNÍK MOZ ŠKOLNÍ ROK 1980/1981

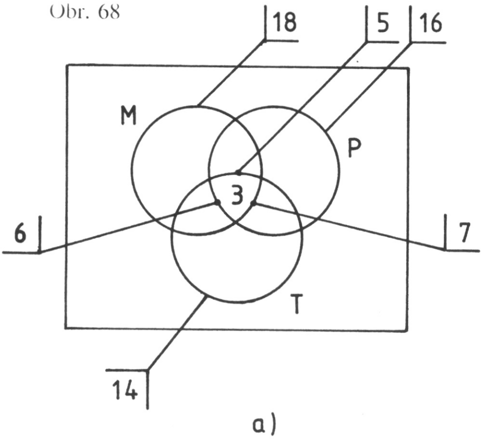
Kategorie MOZ 5

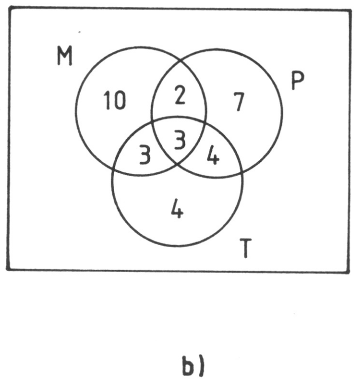
MOZ 5 - I - 1

Označme množinu žáků matematického kroužku M, přírodovědného kroužku P, tělovýchovného kroužku T, množinu všech žáků V.

1. řešení. Do množinového diagramu pro tři množiny zapíšeme známé údaje (obr. 68a).

Obr. 68





Dále vypočítáme počty žáků, kteří pracují právě ve dvou kroužcích:

v matematickém a přírodovědném ... 5 – 3 = 2,
v matematickém a tělovýchovném ... 6 – 3 = 3,
v přírodovědném a tělovýchovném ... 7 – 3 = 4;

pouze v jednom kroužku:

v matematickém ... 18 – 3 – 3 – 2 = 10,
v přírodovědném ... 16 – 2 – 3 – 4 = 7.

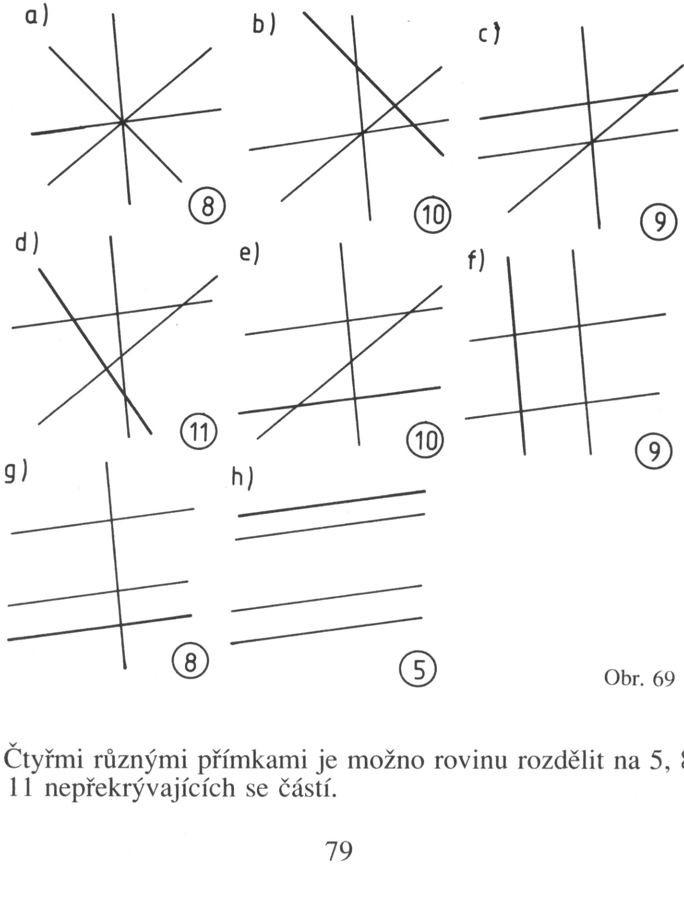
Počet všech žáků je potom 14 + 10 + 2 + 7 = 33 a to odporuje prvnímu Petrovu údaji, že žáků je 31. Pravdu měla Jana. (Obr. 68b.)

2. ř e š e n í : Platí: $|V| = |M| + |P| + |T| - |M \cap P| - |M \cap T| - |P \cap T| + |P \cap M \cap T|$. Tedy $|V| = 18 + 16 + 14 - 5 - 6 - 7 + 3 = 33$.

Všech žáků má však být 31, v Petrových údajích musí tedy být chyba.

MOZ 5 - I - 2

Jednotlivé možnosti vidíme na obrázcích 69a, b, c, d, e, f, g, h.



Obr. 69

Čtyřmi různými přímkami je možno rovinu rozdělit na 5, 8, 9, 10 a 11 nepřekrývajících se částí.

MOZ 5 - I - 3

1. ř e š e n í. 11 žiguli (lichý počet) se dá rozdělit do kolon jen tak, že v jedné jich bude sudý počet a v druhé lichý počet. Sestavme dvě tabulky, každá představuje jednu kolonu (označme $Ž$ – počet žiguli, $Š$ – počet škodovek, P – $Š : Ž$):

$Ž$	$Š$	P
2	26	13
4	24	6
6	22	–
8	20	–
10	18	–

$Ž$	$Š$	P
9	19	–
7	21	3
5	23	–
3	25	–
1	27	27

V koloně je dohromady 28 aut. V druhých sloupcích tabulek jsou proto čísla, která spolu s prvním číslem řádku dávají součet 28. V třetím sloupci je podíl (jestliže vychází celé číslo). Vyhovují jen čísla v druhém řádku. V druhé tabulce připadají na jedno žiguli tři škodovky a to je dvakrát méně škodovek než v první tabulce. Druhá tabulka tedy zachycuje situaci v první koloně.

V první koloně bylo 21 škodovek a v druhé koloně 24 škodovek.

2. ř e š e n í. $Ž_1 + Ž_2 = 11$ a $kŽ_1 + 2kŽ_2 = 45$, z toho $Ž_2 = \frac{45}{k} - 11$, potom $k = 1$ nebo $k = 3$.
Je-li $k = 1$, pak $Ž_2 = 34$. Nevyhovuje.
Je-li $k = 3$, pak $Ž_2 = 4$, $Ž_1 = 7$, $Š_2 = 24$ a $Š_1 = 21$.

MOZ 5 - I - 4

Jestliže z levé i pravé misky odebereme po jednom jablku a dvou hruškách, zůstanou váhy v rovnováze. Nalevo bude jedna hruška, napravo jablko a 20 g.

Hruška má tedy o 20 g větší hmotnost než jablko a 5 hrušek má o 100 g větší hmotnost než 5 jablek. To znamená, že 5 hrušek a 3 jablka mají stejnou hmotnost jako 8 jablek a 100 g závaží.

Všechno ovoce má hmotnost 780 g. 8 jablek a 100 g musí mít proto hmotnost také 780 g.

8 jablek má potom hmotnost 680 g a 1 jablko má hmotnost 85 gramů.

Hruška má hmotnost o 20 g větší, čili 105 g.

Zkouška: Levá miska: $3 \cdot 105 + 85 = 400$

Pravá miska: $2 \cdot 105 + 2 \cdot 85 + 20 = 400$

MOZ 5 - I - 5

Vypišme čtveřice bezprostředně za sebou jdoucích číslic a čísel, která vzniknou záměnou prvních dvou číslic:

1234 ... 2 134 4567 ... 5 467

2345 ... 3 245 5678 ... 6 578

3456 ... 4 356 6789 ... 7 689

Číslo 2 134 se nemůže rovnat součinu stejných přirozených čísel, protože platí $46 \cdot 46 < 2\,134 < 47 \cdot 47$.

Podobně číslo 3 245; $56 \cdot 56 < 3\,245 < 57 \cdot 57$ a číslo 7 689; $87 \cdot 87 < 7\,689 < 88 \cdot 88$.

Čísla 5 467 a 6 578 se nedají zapsat jako součin dvou stejných přirozených čísel, protože poslední číslice takového součinu může být jen 0, 1, 4, 5, 6 a 9.

Ze všech 6 čísel vyhovuje podmínce jedině 4 356 a $4\,356 = 66 \cdot 66$.

MOZ 5 - I - 6

Součet čísel druhého řádku tabulky je 0. To znamená, že ve všech řádcích, sloupcích a úhlopříčkách musí být součet 0. Ze 4. sloupce zjistíme, že $f = -3$, z úhlopříčky dostáváme $a = 7$. Z 3. řádku vidíme, že $x + c = 1$. To však znamená, že $b = 2$ (podle 2. sloupce).

Z 1. řádku dostaneme $x = -7$. Z 3. řádku dostáváme $c = 8$, z 3. sloupce $e = 12$, z 1. sloupce $k = -2$.

7	2	–7	–2
2	–3	–4	5
–7	8	–1	0
–2	–7	12	–3

MOZ 5 - I - 7

Měli 1 620 m látky.

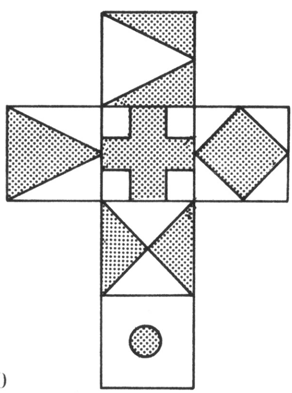
1. den prodali $\frac{3}{10}$ .... $0{,}3 \cdot 1\,620 = 486$ .... 486 m
zůstalo .... $1\,620 - 486 = 1\,134$ ... 1 134 m
2. den prodali $\frac{1}{6}$ zbytku .... $\frac{1}{6} \cdot 1\,134 = 189$ .... 189 m
zůstalo .... $1\,134 - 189 = 945$ ...... 945 m
3. den 4krát víc než 4. den ..... $4x$
4. den, x .... $4x + x = 945$, $x = 189$ ... 189 m
3. den .... $4 \cdot 189 = 756$ .... 756 m

Zkouška: $486 + 189 + 756 + 189 = 1\,620$

1. den prodali 486 m, 2. den 189 m, 3. den 756 m a 4. den 189 m látky.

MOZ 5 - I - 8

Narýsujeme si síť krychle (obr. 70). Vzor „kříž" umístíme do jedné stěny sítě. Vzory, které sousedí s „křížem", na obrázcích krychlí (obr. 3) zakreslujeme do stěn sítě, které sousedí se stěnou, ve které je „kříž". Za sousední stěny na síti považujeme ty, které spolu sousedí po složení sítě do krychle. Při zakreslování vzoru do stěny sítě je třeba dávat pozor na jeho správné uložení. Úloha má více řešení, která se liší tvarem sítě nebo „vyvzorováním" sítě.



Obr. 70

MOZ 5 - II - 1

Označme hmotnost surovin, které odevzdali jednotliví žáci, začátečními písmeny jejich jmen.

Podle zadání úlohy platí:

(1) $$A > C,\ B > E,\ D < E,\ C > B$$

(2) $$A + B + C + D + E = 25$$

Z nerovnosti (1) vyplývá uspořádání

(3) $$A > C > B > E > D.$$

Hmotnost surovin, které odevzdal každý žák, je aspoň 2 kg, tedy $D \geqq 2$ kg.

Všechna řešení jsou zapsána v tabulce:

Žák	Rozložení hmotností odevzdaných surovin						
Aleš	11	10	9	9	8	8	7
Cyril	5	6	7	6	7	6	6
Boris	4	4	4	5	5	5	5
Emil	3	3	3	3	3	4	4
Dušan	2	2	2	2	2	2	3
Dohromady	25	25	25	25	25	25	25

MOZ 5 - II - 2

Úlohu je možné řešit např. graficky.

Ukážeme si jiné řešení. Označíme hmotnost velké koule G, krychle K a kuličky g.

Podle podmínek úlohy platí:

(1) $$3K + G = 12g$$

(2) $$G = K + 8g$$

Dosadíme-li za G z (2), dostaneme:

$$4K + 8g = 12g \tag{3}$$

Jestliže v (3) odečteme na každé straně $8g$, dostaneme:

$$4K = 4g \tag{4}$$

Ze (4) vyplývá, že krychle a kulička mají stejnou hmotnost.
Proto z (2) vyplývá, že hmotnost velké koule je stejná jako hmotnost 9 kuliček.

MOZ 5 - II - 3

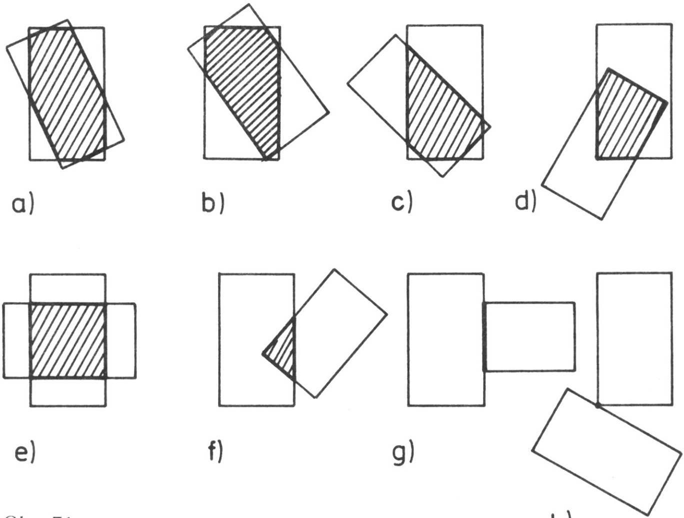
Součet délek všech tyčinek je 45 cm. Můžeme z nich proto sestavit čtverec s maximálním obvodem 44 cm a se stranou délky 11 cm. Snadno se přesvědčíme, že konstrukce čtverce se stranou délky menší než 7 cm není možná.

Délka strany čtverce	Délky použitých tyčinek v cm			
7 cm	7	6 + 1	5 + 2	4 + 3
8 cm	8	7 + 1	6 + 2	5 + 3
9 cm	9	8 + 1	7 + 2	6 + 3
	9	8 + 1	6 + 3	5 + 4
	9	7 + 2	6 + 3	5 + 4
	8 + 1	7 + 2	6 + 3	5 + 4
10 cm	9 + 1	8 + 2	7 + 3	6 + 4
11 cm	9 + 2	8 + 3	7 + 4	6 + 5

Úloha má dohromady 8 různých řešení.

MOZ 5 - II - 4

Náčrt řešení je na obrázku 71a, b, c, d, e, f, g, h.



Obr. 71

Kategorie MOZ 6

MOZ 6 - I - 1

Jestliže má druhá mocnina čísla končit číslicí 1, musí toto číslo končit jedničkou nebo devítkou. Hledaná čísla jsou: 11, 19, 21, 29, ..., 91, 99. Dohromady je jich 18.

MOZ 6 - I - 2

Z čísla *abcde* máme podle pokynu utvořit číslo *cde*8. Vynásobíme-li toto číslo čtyřmi, dostaneme číslo *abcde*. Násobme: $\begin{array}{r} cde8 \\ \cdot \quad 4 \\ \hline 2 \end{array}$.

$4 \cdot 8 = 32$, potom číslo $e = 2$. Násobme: $\begin{array}{r} cd28 \\ \cdot \quad 4 \\ \hline 2 \end{array}$ (zůstaly 3).

$4 \cdot 2 + 3 = 11$, potom číslo $d = 1$. Násobme: $\begin{array}{r} c128 \\ \cdot \quad 4 \\ \hline 12 \end{array}$ (zůstala 1).

$4 \cdot 1 + 1 = 5$, potom číslo $c = 5$. Násobme: $\begin{array}{r} 5\,128 \\ \cdot \quad 4 \\ \hline 20\,512 \end{array}$.
Hledané číslo je 20 512.

MOZ 6 - I - 3

Součet délek dvou stran trojúhelníku je větší než délka třetí strany. Nechť nejdelší strana trojúhelníku je úsečka délky 9 cm. Zbývající dvě strany mohou být pouze úsečky délek 5 cm a 7 cm nebo 3 cm a 7 cm.

Nechť nejdelší strana trojúhelníku je úsečka délky 7 cm. Potom zbývající dvě strany mohou mít délky pouze 3 cm a 5 cm. Strana délky 5 cm už nemůže být stranou trojúhelníku. Zbývající menší úsečky 1 cm, 3 cm jsou velmi malé, jejich součet je menší než 5 cm.

Nalezli jsme trojúhelníky se stranami délek:
5 cm, 7 cm, 9 cm;
3 cm, 7 cm, 9 cm:
3 cm, 5 cm, 7 cm.

Poznámka. Je možné sestrojit 6 trojúhelníků nebo 3 trojúhelníky podle toho, zda nesouhlasně shodné trojúhelníky považujeme za různé, nebo stejné.

MOZ 6 - I - 4

1. ř e š e n í . a) Body označíme $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$. Spojíme-li bod A_1 se zbývajícími 99 body, dostaneme 99 úseček.

Totéž zopakujeme s body A_2, $A_3, \ldots$ až A_{100}. Sestrojíme tak $100 \cdot 99$ úseček. Vždy dvě úsečky však splývají. Např. A_1A_2 s A_2A_1, A_5A_6 s A_6A_5 atd. Každá úsečka je započítána dvakrát.

Dohromady jich je tedy $\frac{100 \cdot 99}{2} = 4\,950$.

b) Přibude-li bod A_{101}, přibude 100 úseček. Tento bod můžeme totiž spojit s předcházejícími 100 body.

Dostaneme dohromady 5 050 úseček.

2. řešení. a) První bod spojíme se zbývajícími 99 body. Dostaneme 99 úseček. Druhý bod (je už spojen s prvním) spojíme se zbývajícími 98 body. Dostaneme 98 úseček, třetí bod spojíme s 97 body atd. ..., až 99. bod spojíme s posledním, stým bodem. Dostaneme 99 + 98 + 97 + ... + 2 + 1 úseček. Jak vypočítáme takový součet? Zapíšeme dva takové součty pod sebe a sečteme:

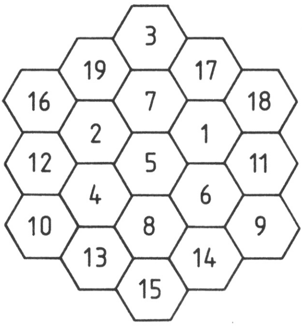
$$\begin{array}{rrrcrrr}
99 + & 98 + & 97 + & \ldots & + \ \ 3 + & 2 + & 1 \\
1 + & 2 + & 3 + & \ldots & + \ 97 + & 98 + & 99 \\
\hline
100 + & 100 + & 100 + & \ldots & + 100 + & 100 + & 100
\end{array}$$

Jeden součet se tedy rovná $\frac{99 \cdot 100}{2}$, čili 4 950.

MOZ 6 - I - 5

Na obrázku 5 vpravo nahoře máme vypsanou celou řadu, její součet je 38. Můžeme tedy postupně vepsat čísla 19, 12, 7, 11, 9. Tři čísla, která jsou nejníže, musí být: 13, 15, 14.

Řešení je na obrázku 72.



Obr. 72

MOZ 6 - I - 6

Vlaky se k sobě přibližují rychlostí 100 km/h. Půlhodinu před tím, než se potkají, budou od sebe vzdáleny 50 km.

MOZ 6 - I - 7

1. ř e š e n í . Kdyby vzdálenost měst byla 30 km, nákladní auto by ji ujelo o $\frac{1}{4}$ hodiny později než autobus. Autobus totiž ujede 30 km za $\frac{3}{4}$ hodiny, nákladní auto za 1 hodinu. Když nákladní auto přijelo do Banské Bystrice o $\frac{7}{4}$ hodiny později, pak je vzdálenost mezi městy 7krát větší, tedy 210 km. Vzdálenost mezi Bratislavou a Banskou Bystricí je 210 km.

2. ř e š e n í . Když do Banské Bystrice přijel autobus, nákladnímu autu zbývala $1\frac{3}{4}$ hodiny jízdy.

Tedy $30 + \frac{3}{4} \cdot 30 = 30 + 22{,}5 = 52{,}5$.

Autobus získal před nákladním autem náskok 10 km za každou hodinu, čili 1 km za 6 minut.

$52{,}5 \cdot 6 = 315$

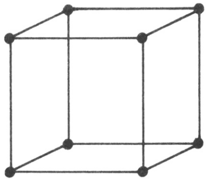
Náskok 52,5 km získal za 315 minut, čili za $5\frac{1}{4}$ hodiny. Za tuto dobu autobus ujel $5 \cdot 40 + 10 = 210$ km. Vzdálenost mezi Bratislavou a Banskou Bystricí je 210 km.

MOZ 6 - I - 8

Nakreslíme-li 7 bodů a z každého bodu tři různé úsečky, dostaneme 21 úseček.

Má-li však být situace taková jako v úloze, musí tyto úsečky začínat i končit v těchto 7 bodech. Vždy dva body budou tedy mít společnou úsečku, dohromady bude tedy těchto úseček o polovinu méně, čili 21 : 2. To však není celé číslo. Obrázek se nedá sestrojit.

Při sudém počtu bodů je situace jiná. Například pro 8 bodů je jedno z řešení na obrázku 73.



Obr. 73

MOZ 6 - II - 1

Protože počet kilometrů, které ušli první den, porovnáváme s počtem kilometrů, které ušli třetí den, vezmeme počet kilometrů, které ušli třetí den, za základ.

3. den ušli	x (km)
1. den ušli	$2x$ (km)
2. den ušli	$2x - 10$ (km)
Dohromady ušli	65 km

$$x + 2x + 2x - 10 = 65$$
$$5x = 75$$
$$x = 15 \text{ (km)}$$

První den ušli žáci 30 km, druhý den o 10 km méně, tedy 20 km, a třetí den 15 km.

MOZ 6 - II - 2

Jedno z mnoha řešení:

1	7	2	8
4	6	3	5
7	1	8	2
6	4	5	3

MOZ 6 - II - 3

1. řešení. Hledané číslo musí být menší než 23, protože $23 \cdot 4{,}5 > 100$. Musí končit „velkou číslicí”. Po „přehození” číslic má přece vzniknout více než 4krát větší číslo. $4 \cdot 15 = 60 > 51$. Stačí tedy zkoumat čísla 16, 17, 18, 19. Vyhovuje pouze jedno číslo: 18; $18 \cdot 4{,}5 = 81$.

2. řešení. Označme první číslici hledaného čísla a, druhou číslici b. Má platit:

$$(10a + b) \cdot \frac{9}{2} = 10b + a$$

$$88a = 11b$$

$$8a = b$$

Tedy $a = 1$, $b = 8$.

3. řešení. Hledané číslo označme x. Číslo, které vznikne záměnou číslic, označme z. Platí:

$$x \cdot \frac{9}{2} = z \qquad \text{číslo } z \text{ je celé}$$

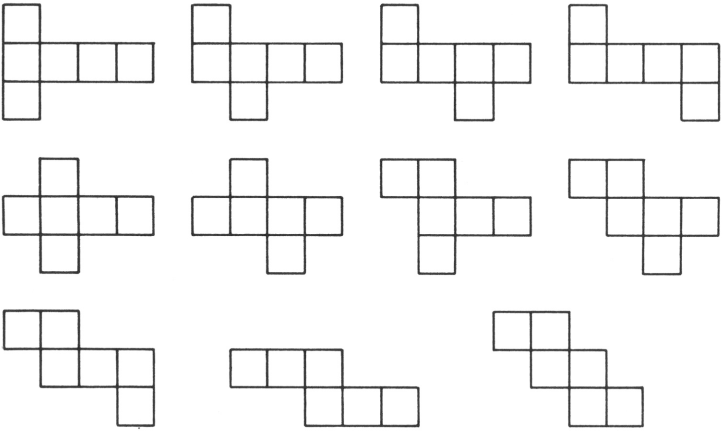
$$\frac{x}{2} \cdot 9 = z \qquad \text{číslo } z \text{ je násobkem } 9$$

To znamená, že jeho ciferný součet je dělitelný 9. Stejný ciferný součet má i číslo x, je tedy též dělitelné 9. Zároveň vidíme, že je hledané číslo dělitelné dvěma, je tedy sudé. Musíme věnovat pozornost sudým dvojciferným číslům dělitelným 9 (a ne příliš velkým). Vyhovuje pouze 18.

MOZ 6 - II - 4

Síť čtyřstěnu je možné narýsovat dvěma způsoby (obr. 74a), síť krychle je možné narýsovat 11 způsoby (obr. 74b).

Obr. 74a



Obr. 74b

Kategorie MOZ 7

MOZ 7 - I - 1

Vzdálenost mezi stožáry pouličního osvětlení je dělitelem šířky a délky náměstí. Víme, že vzdálenost mezi stožáry má být co největší. Je tedy největším společným dělitelem čísel 180, 252. Čísla rozložíme na součin:

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 36 \cdot 5$$

$$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 36 \cdot 7$$

Vzdálenost mezi stožáry má být tedy 36 m a po šířce náměstí musí být 5 mezer mezi stožáry, čili 6 stožárů, z toho 4 nové. Na obou kratších stranách dohromady 8. Po délce náměstí musí být 7 mezer mezi stožáry, čili 8 stožárů, z toho 6 nových. Na obou delších stranách dohromady 12. Celkem je třeba 20 nových stožárů.

MOZ 7 - I - 2

Máme vlastně najít číslice a, b, c takové, že platí:

$$1963 - 1abc = a \cdot b \cdot c$$

Můžeme předpokládat, že matematikovi bylo méně než 100 a více než 20 let. To znamená, že se mohl narodit nejdříve v roce 1863 a nejpozději v roce 1943.

Tedy $a = 8$ nebo 9. Jestliže $a = 8$, potom $b \geqq 6$; jestliže $a = 9$, pak $b \leqq 4$.

c volíme tak, aby platilo $20 < a \cdot b \cdot c < 100$.

Po vyzkoušení všech možností vidíme, že vyhovuje jen rok 1891. Matematik se narodil roku 1891.

MOZ 7 - I - 3

Povrch krychle je $6a^2$, přičemž a je délka hrany a v našem případě zároveň počet krychlí podél jedné hrany:

$$6a^2 = 216$$

$$a = 6$$

a) Objem velké krychle je 6^3 cm^3. Po odebrání 8 rohových krychlí zůstává $6^3 - 8 = 208$ (cm^3).

b) S každou z odebraných krychlí ubyly 3 stěny, tj. 3 cm^2 původního povrchu, tj. 24 cm^2. Jestliže připustíme, že i krychle je kvádr, splňuje podmínku krychle s délkou hrany 2 cm.

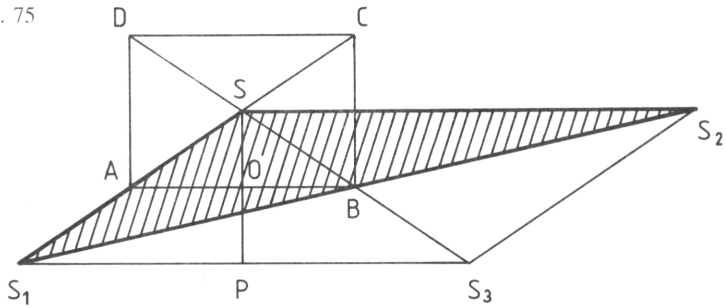
c) Ušetřilo by se barvení 24 cm^2, to je $\frac{24}{216} = \frac{1}{9}$ povrchu, to je přibližně 11,1 % povrchu.

MOZ 7 - I - 4

Sestrojíme body podle podmínek úlohy a kromě nich bod S_3 souměrně sdružený s bodem S podle bodu B, patu P kolmice z bodu S k S_1S_3 a O její průsečík s AB (obr. 75). Obsah trojúhelníku SS_1S_2 se rovná obsahu trojúhelníku SS_1S_3 (poloviny obsahu rovnoběžníku $SS_1S_3S_2$). Vypočítejme obsah trojúhelníku SS_1S_3.

AB je střední příčka trojúhelníku SS_1S_3, a proto jeho základna $|S_1S_3| = 2|AB|$ a jeho výška $|PS| = 2|OS| = |BC|$. $S_{\triangle SS_1S_2} =$
$= S_{\triangle SS_1S_3} = \dfrac{|S_1S_3| \cdot |PS|}{2} = \dfrac{2|AB| \cdot |BC|}{2} = S_{\square ABCD} = 3 \cdot 2 =$
$= 6\ (\text{cm}^2)$.

Obr. 75



MOZ 7 - I - 5

Označme b, r, $č$ počet bílých, růžových a červených aster. Podle podmínek platí:

$$\begin{aligned} b + r + č &= 324 \\ r &= b + 36 \\ č &= 2b \\ \hline b + (b + 36) + 2b &= 324 \\ 4b &= 288 \\ b &= 72 \\ č &= 144 \\ r &= 72 + 36 = 108 \end{aligned}$$

Bílých aster bylo 72, červených 144 a růžových 108. Počet kytic je společný dělitel počtu bílých, červených a růžových aster.

$$b = 2^3 \cdot 3^2 = 2 \cdot 36$$

$$č = 2^4 \cdot 3^2 = 4 \cdot 36$$

$$r = 2^2 \cdot 3^3 = 3 \cdot 36$$

Jestliže chtěli uvázat co nejvíce kytic, pak kytic bylo 36, v každé z nich byly 4 červené, 2 bílé a 3 růžové astry. Jinak kytic mohlo být: 18 (4*b*, 8*č*, 6*r*), 12 (6*b*, 12*č*, 9*r*), 9 (8*b*, 16*č*, 12*r*), 6 (12*b*, 24*č*, 18*r*), 4 (18*b*, 36*č*, 27*r*), 3 (24*b*, 48*č*, 36*r*), 2 (36*b*, 72*č*, 54*r*) nebo jen jedna.

MOZ 7 - I - 6

Označme t číslo dne v týdnu, d den, m měsíc, r rok Nadina narození.

Platí: $t \cdot d \cdot m = r$, přičemž $t \in \{1, 2, \ldots, 7\}$, $d \in \{1, 2, \ldots, 31\}$, $m \in \{1, 2, \ldots, 12\}$.

Snadno se přesvědčíme, že se šachový zápas hrál koncem týdne. Kdyby se hrál v některém z prvních pěti dnů týdne, nestačilo by ani „největší" datum 31. 12., protože součin $t \cdot d \cdot m = 5 \cdot 31 \cdot 12$ je jen 1 860 a Naďa se jistě narodila po roku 1950. Rok jejího narození musí být tedy dělitelný šesti (jestliže se hrálo v sobotu) nebo sedmi (jestliže se hrálo v neděli). Jestliže vyšetříme roky mezi 1950 a 1980, najdeme jediný vyhovující rok $1960 = 28 \cdot 10 \cdot 7$.

Naďa se tedy narodila 28. října 1960 a šachový zápas se hrál v neděli.

Poznámka. Řešení této úlohy závisí na roce. V úvahu připadá 30. listopad 1980 a v roce 1987 jen sobota. (Například v roce 1982 by byla možná dvě řešení.)

MOZ 7 - I - 7

Po vyřezání kvádru přibudou na povrchu dva obdélníky s délkami stran 60, x a ubudou dva obdélníky s délkami stran x, y. Celkově bude pro přírůstek p povrchu platit:

$$p = 2 \cdot 60 \cdot x - 2 \cdot x \cdot y$$

Povrch krychle $S = 6 \cdot 60 \cdot 60$; z toho, že $p = \frac{1}{6}S$, dostaneme

$$2 \cdot x \cdot (60 - y) = 3\,600.$$

$x = \frac{1\,800}{60-y}$, přičemž $y < 30$ a zároveň $y \geqq 10$, pro $60 - y$ potom platí $60 - y \leqq 50$ a zároveň $60 - y > 30$. Číslo x musí být celé, a proto $60 - y$ musí dělit číslo 1 800. Mezi 30 a 51 jsou 4 taková čísla: 36, 40, 45, 50. (Při hledání těchto čísel nám pomůže rozklad čísla $1\,800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.) Hodnoty x, y jsou v tabulce:

$60 - y$	x	y
36	50	24
40	45	20
45	40	15
50	36	10

MOZ 7 - I - 8

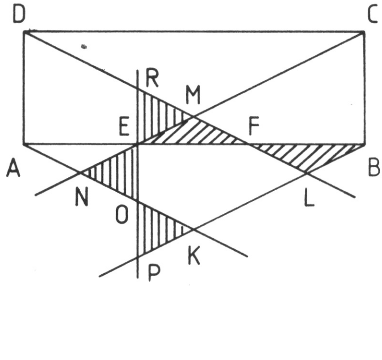
V bodě E sestrojíme kolmici k úsečce AB. Její průsečíky s přímkami AK, BK, DM označíme O, P, R (obr. 76).

$\triangle ANE \cong \triangle FME$ (usu, $|AE| = |EF|$), tedy $|NE| = |EM|$, potom $\triangle NOE \cong \triangle MRE$ (usu), čili $|NE| = |EM| = |PK|$ čili i $\triangle NOE \cong$ $\cong \triangle KOP$ (usu).

$|EF| = |FB|$, potom $\triangle BFL \cong \triangle EFM$ (usu).

Tedy $\triangle BEP \cong \triangle EBC$ (usu),

čili $S_{\square KLMN} = S_{\triangle BEP} = S_{\triangle EBC} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1\,(\mathrm{cm}^2)$.



Obr. 76

MOZ 7 - II - 1

Počet žáků v obou třídách je menší než 80 a je společným násobkem čísel 3 a 7. V úvahu přicházejí tedy jen čísla 21, 42, 63. Z nich však podmínkám úlohy vyhovuje jen číslo 63.

Počet žáků v obou třídách je 63.

MOZ 7 - II - 2

Pro objem kvádru platí $V = a \cdot b \cdot c \leqq 40$, kde a, b, c jsou přirozená čísla.

Je-li $a = 2$, potom $b \cdot c \leqq 20$. Pro povrch kvádru platí:

$$S = 2 \cdot (ab + ac + bc) = 52$$

Je-li $a = 2$, dostaneme

$$2 \cdot (b + c) + bc = 26.$$

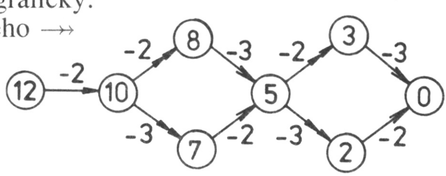
Zkoumejme, pro která $b = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ bude c přirozené číslo:

b	1	2	3	4	5	6	7	8
c	8	$\frac{22}{4}$	4	3	$\frac{16}{7}$	$\frac{14}{8}$	$\frac{12}{9}$	1

Je tedy možné sestavit dva různé kvádry s délkami hran 2, 1, 8 a 2, 3, 4.

MOZ 7 - II - 3

Řešení znázorníme graficky:
tah prvního →, tah druhého ↠



Začínající hráč vezme nejdříve 2 kuličky a v každém následujícím tahu se chová podle pravidla:

jestliže soupeř bral 2 kuličky, on bere 3,

jestliže soupeř bral 3 kuličky, on bere 2.

Vidíme, že při tomto postupu začínající hráč vyhraje svým třetím tahem.

MOZ 7 - II - 4

Bod M je průsečík úhlopříček obdélníku $ZXCD$. Osa úsečky DC tedy prochází bodem M. Podobně bod K je průsečík úhlopříček obdélníku $ABYT$. Osa úsečky AB (a také CD) prochází tedy bodem K.

Platí tedy $KM \parallel CY$ a $|MK| = |CY| = 1$ cm.

Trojúhelníky KLM, XYL, KMN a ZTN jsou shodné (*usu*).

Shodné jsou i jejich výšky. Protože leží na rovnoběžce s DC, ($KLMN$ je kosočtverec, $KM \perp NL$), je délka každé 1 cm, a tedy $|NL| = 2$ cm.

$$S_{\square KLMN} = S_{\triangle NLM} + S_{\triangle NLK} = 2 \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 1\,(\text{cm}^2).$$

2. ROČNÍK MOZ ŠKOLNÍ ROK 1981/1982

Kategorie MOZ 5

MOZ 5 - I - 1

Mince	Počty mincí					
0,50	7	5	3	3	1	1
1	0	1	2	0	3	1
2	0	0	0	1	0	1

Všech 6 možností je zachyceno v tabulce.

MOZ 5 - I - 2

a) Je třeba postupovat odzadu. Číslo 2 budeme třikrát „měnit nazpět" – odčítáme 1 a výsledek násobíme dvěma.

$2 \rightarrow 2 \cdot (2-1) = 2$

Číslo x je 2, přeměněním se nezměnilo.

b) $3 \rightarrow 2 \cdot (3-1) = 4 \rightarrow 2 \cdot (4-1) = 6 \rightarrow 2 \cdot (6-1) =$
$= 10 \rightarrow 2 \cdot (10-1) = 18$

Číslo y je 18.

MOZ 5 - I - 3

Průsečík úseček AC a BE označme P. Výška trojúhelníku ABP ke straně AB je 4 cm, výška trojúhelníku BCP ke straně BC a výška trojúhelníku CEP ke straně EC je 2 cm. Proto

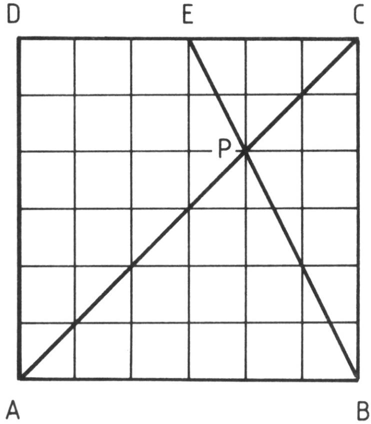
$$S_{\triangle ABP} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12\ (\text{cm}^2),$$

$$S_{\triangle BCP} = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6\ (\text{cm}^2),$$

$$S_{\triangle CEP} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3\ (\text{cm}^2),$$

$$S_{APED} = 6 \cdot 6 - 12 - 6 - 3 = 15\ (\text{cm}^2).$$

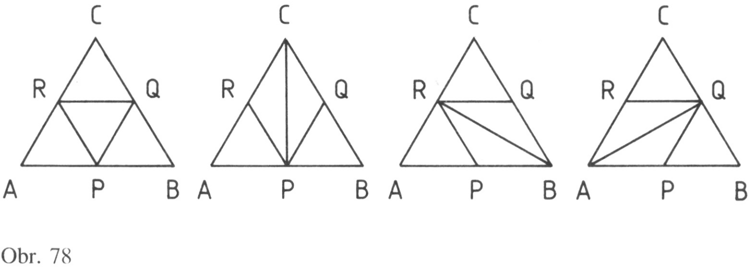
Výšky je možno určit pomocí čtverečkovaného papíru, jinak z podobnosti trojúhelníků *ECP* a *ABP*. Výška většího trojúhelníku je dvakrát větší než výška menšího trojúhelníku a dohromady mají 6 cm. (Obr. 77.)



Obr. 77

MOZ 5 - I - 4

Čtyřmi způsoby (obr. 78).



Obr. 78

MOZ 5 - I - 5

$$\overbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}^{40} = \overbrace{243 \cdot 243 \cdot \ldots \cdot 243}^{8} =$$

$$= 59\,049 \cdot 59\,049 \cdot 59\,049 \cdot 59\,049$$

$$\ldots 01 \qquad\qquad \ldots 01$$

$$\ldots 01$$

Protože nás zajímá pouze číslice na místě desítek, stačí provést jen neúplný výpočet.

Součin 59 049 · 59 049 má na místě desítek nulu. Podobně i součin čtyř čísel 59 049.

....41	...01 × ...01
.....6	...01
.....0	0
......	.....
........01	...01

Vynásobíme-li 40 trojek, bude na místě desítek 0.

MOZ 5 - I - 6

Body *A, B, C, D, E* umístíme na svislou osu. Bod *A* nad *C*, *B* pod *C*, *E* pod *B*, *D* pod *E*. Dostali jsme pořadí. Dále víme, že *D* přinesl nejméně 1 kg, *E* 2 kg, *B* 3 kg atd.

Žák *B* nemohl přinést více než 6 kg. Kdyby přinesl 7 kg, musel by *C* přinést přinejmenším 8 kg a *A* 9 kg, to je dohromady 24 kg. Na *C* a *D* by zůstal dohromady pouze 1 kg, a to není možné. Je 30 řešení. (Viz tabulka.)

A	15	14	13	12	11	10	13	12	11	10	12	11	10	9	11	10	9
C	4	5	6	7	8	9	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7
B	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
E	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3
D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2

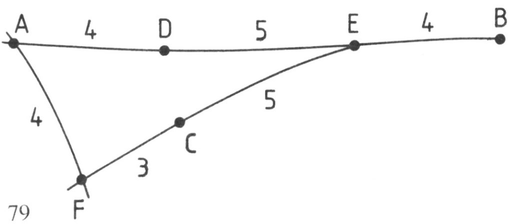
A	11	10	9	9	10	9	9	8	9	8	8	8	7
C	6	7	8	7	6	7	6	7	6	7	7	6	6
B	5	5	5	6	5	5	5	5	5	6	5	5	5
E	2	2	2	2	3	3	3	3	4	3	4	4	4
D	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	2	3

MOZ 5 - I - 7

Obvykle na jedné silnici leží více měst. Například *A*, *D*, *B* leží na stejné silnici. Je to vidět z toho, že $|AD| + |DB| = |AB|$, $9 + 4 = 13$.

Najděme trojice měst s touto vlastností. Jsou to ještě *ADE*, *AEB*, *DEB*, *FCE*.

To však znamená, že na jedné silnici leží *ADEB*. Řešení vidíme na obrázku 79. (Jsou možná i jiná řešení, např. bod *A* může ležet i v opačné polorovině.)



Obr. 79

MOZ 5 - I - 8

Závod skončil v okamžiku, když starší chlapec zlikvidoval náskok mladšího. Zjistíme, kolik času na to potřeboval. Starší běží o 2 km/h rychleji. Za hodinu by zlikvidoval náskok 2 000 m mladšího. Pětkrát menší náskok – 400 m – zlikviduje za pětinu času, tj. za 12 minut. Starší běžel 12 minut, tj. $\frac{1}{5}$ hodiny. Za tuto dobu uběhl $\frac{1}{5} \cdot 7$ km, což je 1 400 m. Jedno kolo měřilo 350 metrů.

MOZ 5 - II - 1

Všimněme si nejprve prvního řádku. Jestliže do prvního sloupce položíme bílý čtvereček, zbývají ještě dvě možnosti na položení dalších dvou čtverečků. Do prvního sloupce je ale možno položit také modrý nebo červený čtvereček a na položení zbývajících dvou čtverečků zbývají pokaždé dvě možnosti. Máme tedy dohromady 6 možností na sestavení prvního řádku. Zkoumejme nyní, kolika způsoby je možné doplnit sestavený první řádek na čtverec. První čtvereček v druhém řádku je možné vybrat dvěma způsoby tak, aby se lišil od prvního čtverečku v prvním řádku. Jeho výběrem je však obarvení zbývajících 5 čtverečků jednoznačně určeno. Každý první řádek se tedy dá doplnit na čtverec dvěma různými způsoby. Existuje proto 12 různých způsobů složení čtverce.

MOZ 5 - II - 2

a) ~~4~~7~~1~~3~~2~~68 → 7368
b) 123~~456789~~1011121314151617181920 →
→ 1231011121314151617181920

MOZ 5 - II - 3

Tabulku je možné doplnit jediným způsobem. Nejdříve doplníme číslo ve 2. sloupci a ve 3. řádku – musí to být 3. Potom doplníme číslo ve 3. řádku a v 1. sloupci, kde musí být 1. Tak postupně doplňujeme trojice na součet 6; dostaneme:

1	3	2	1
4	0	2	4
1	3	2	1
1	3	2	1

MOZ 5 - II - 4

Nejdelší je plot Cyrilovy zahrady, protože přerušovaná čára mezi body X, Y je kratší než součet délek tří plných čar (obr. 13).

Délky plotů Antonínovy, Bohumilovy a Emilovy zahrady jsou stejné. Nejkratší plot má Dušanova zahrada, protože délka každé strany trojúhelníku je menší než součet jeho zbývajících dvou stran.

Kategorie MOZ 6

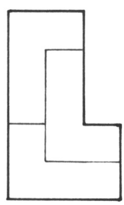
MOZ 6 - I - 1

Výkon za první den je 6 ha. Výkon za druhý den je potom $\frac{85}{100} \cdot 6 = 5{,}1$ (ha). Třetí den musí zorat $18 - 6 - 5{,}1 = 6{,}9$ (ha). V porovnání s výkonem ve druhém dnu je to o 1,8 ha více, tj. o $\frac{1{,}8}{5{,}1} \cdot 100 = \frac{1\,800}{51} \doteq 35{,}3$ (%).

Proti druhému dnu musí traktorista zvýšit výkon asi o 35 %.

MOZ 6 - I - 2

Řešení je na obrázku 80.



Obr. 80

MOZ 6 - I - 3

Podmínky zapíšeme do tabulky:

koho / kdo	P	S	B	L	R
P	○	–	–	+	–
S	–	○	–	–	+
B	–	+	○	–	–
L	–	–	+	○	–
R	+	–	–	–	○

Do řádku R a sloupce P ... +, do řádku L a sloupce R ... –, do řádku P a sloupce R ... – atd. V každém řádku i sloupci může být jen jedno +.

Rudka podle podmínek nenavštíví Paľko, Lacko (neboť nejede do Ružbachů) ani Bohuš, protože ten jede do toho města, v kterém bydlí host Rudka. Do sloupce R napíšeme třikrát minus, Rudu tedy navštíví Slavko. Do Sliače potom přijede Bohuš. Do Lúček k Lackovi nepřijede ani Ruda, ani Slavko, ani Bohuš. Zbývá Paľko. Lacko jede potom k Bohušovi.

MOZ 6 - I - 4

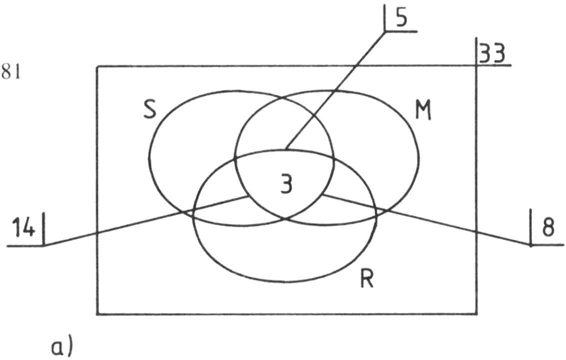
Podle podmínek úlohy je v množině:
$R \cap M$ ... 8 prvků
$R \cap S$ ... 14 prvků
$S \cap M$ ... 5 prvků
Tyto tři údaje zapíšeme do diagramu jakoby „na plot" (obr. 81a) nebo až pomocí dalšího údaje, v $R \cap S \cap M$ jsou tři prvky, víme, jak je můžeme rozdělit (obr. 81b).

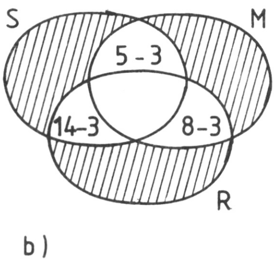
Počet těch, kdo ovládají jen jeden jazyk (vyšrafováno na obr. 81b), je 33 – 11 – 2 – 5 – 3 = 12. Na každý jazyk tedy podle poslední podmínky připadají 4 účastníci.

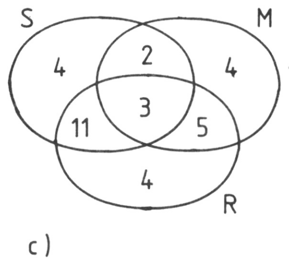
Celková situace je znázorněna na obrázku 81c.

Ruštinu ovládalo 23, slovenštinu 20, maďarštinu 14 účastníků konference.

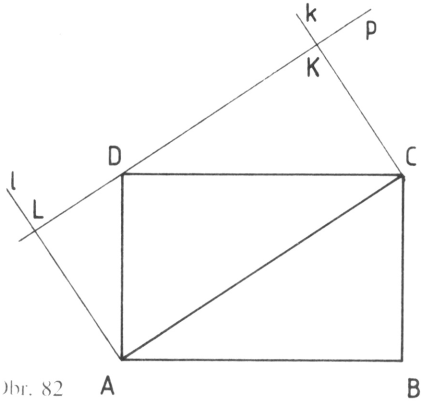
Obr. 81







MOZ 6 - I - 5



Obr. 82

$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}$

$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} |AC| \cdot |AL| = \frac{1}{2} S_{\square ACKL}$, tedy $S_{\square ABCD} = S_{\square ACKL}$

Konstrukce

1. Sestrojíme přímku $p \parallel AC$; $D \in p$.
2. Sestrojíme přímku $k \perp AC$; $C \in k$.
3. Sestrojíme bod $K \in k \cap p$.
4. Sestrojíme přímku $l \perp AC$; $A \in l$.
5. Sestrojíme bod $L \in l \cap p$.

MOZ 6 - I - 6

1. ř e š e n í. Předpokládejme, že máme všechny kuličky pohromadě. Rozdělíme je rovnoměrně do sáčků. 300 : 5 = 60. Ve třetím sáčku necháme 60 kuliček, z druhého vybereme dvě a dáme do čtvrtého, z prvního čtyři a dáme do pátého.

2. ř e š e n í

$$a + (a + 2) + (a + 4) + (a + 6) + (a + 8) = 300$$

$$5a + 20 = 300$$

$$a = 56$$

V sáčcích je 56, 58, 60, 62, 64 kuliček.

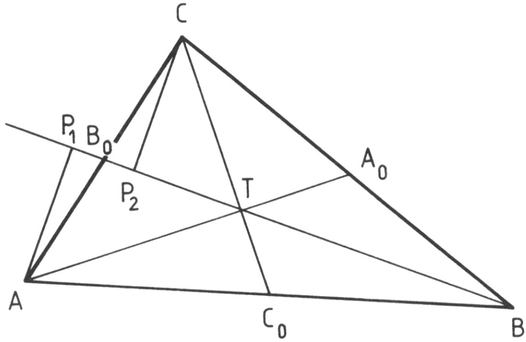
MOZ 6 - I - 7

Poslední dvě dvojice byly $\left[5, \frac{5}{4}\right]$; $\left[6, \frac{4}{3}\right]$; obecně $\left[n, \frac{2n}{n+3}\right]$.

MOZ 6 - I - 8

1. ř e š e n í

Obr. 83



Trojúhelníky AP_1B_0 a CP_2B_0 jsou shodné (*usu*; $|\sphericalangle AB_0P_1| = |\sphericalangle CB_0P_2|$ — vrcholové úhly, $|AB_0| = |CB_0|$, $|\sphericalangle AP_1B_0| = |\sphericalangle CP_2B_0| = 90°$). Jsou-li tyto trojúhelníky shodné, platí $|AP_1| = |CP_2|$. Z toho dále vyplývá, že $S_{\triangle ABT} = S_{\triangle BCT}$, neboť mají společnou základnu BT a stejné výšky.

Podobně dokážeme i rovnost $S_{\triangle CAT} = S_{\triangle BCT}$.

2. ř e š e n í . $|AP_1| = |CP_2|$ (viz 1. řešení).

$S_{\triangle ABB_0} = S_{\triangle BCB_0}$ a $S_{\triangle ATB} = S_{\triangle CTB}$. (V obou případech jde o společnou základnu a shodné výšky.)

Potom $S_{\triangle ABT} = S_{\triangle BCT}$. Podobně $S_{\triangle ABT} = S_{\triangle ACT}$.

3. ř e š e n í . Využijeme vlastnost těžiště. Víme, že $2|TB_0| = |TB|$;

$$S_{\triangle CAT} = S_{\triangle ATB_0} + S_{\triangle CTB_0} = 2 \cdot S_{\triangle ATB_0} =$$

$$= 2 \cdot \frac{|TB_0| \cdot |AP_1|}{2} = \frac{|TB| \cdot |AP_1|}{2} = S_{\triangle ATB}.$$

Podobně i $S_{\triangle CAT} = S_{\triangle BCT}$.

MOZ 6 - II - 1

Označme d délku sumce v centimetrech, H délku hlavy v centimetrech, T délku těla v centimetrech, O délku ocasu v centimetrech. Platí:

$$H = 9 \quad (1)$$

$$T = O + 9 \quad (2)$$

$$O = 9 + \frac{T}{2} \quad (3)$$

Z (2) vyplývá:

$$O = T - 9 \quad (4)$$

Porovnáním rovnic (3) a (4) dostáváme: $9 + \frac{T}{2} = T - 9$, nebo $9 + \frac{T}{2} = \frac{T}{2} + \frac{T}{2} - 9$, tj. $\frac{T}{2} = 18$, z toho $T = 36$ (cm).

Jestliže dosadíme do (2) za $T = 36$ cm, dostaneme $36 = O + 9$, tedy $O = 27$ (cm).

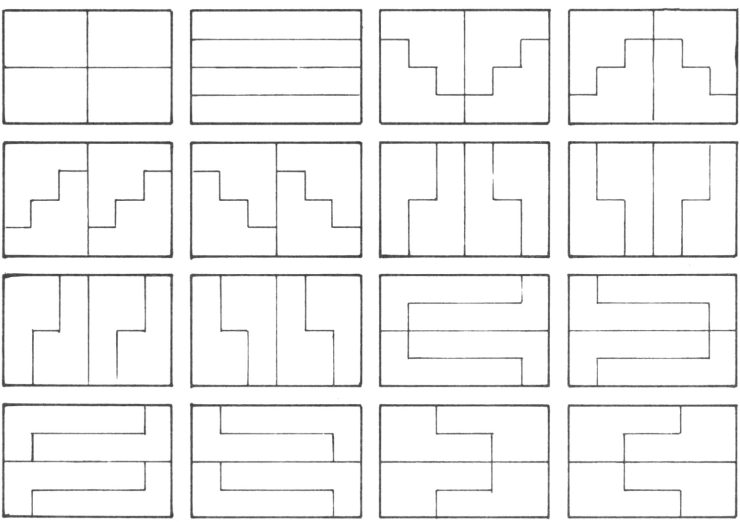
$$d = H + T + O = 9 + 36 + 27 = 72\,(\text{cm})$$

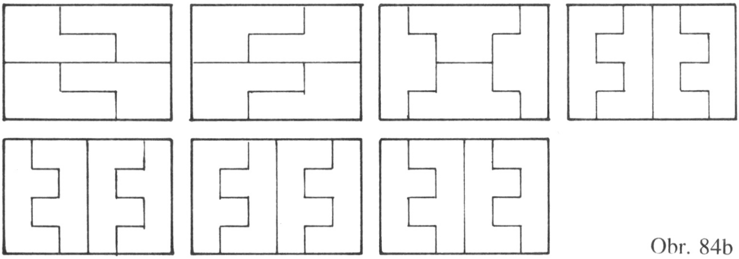
Ulovený sumec měřil 72 cm.

MOZ 6 - II - 2

Při řešení je velmi výhodné použít čtvercovou síť s rozměrem 1 cm (obr. 84a, b).

Obr. 84a

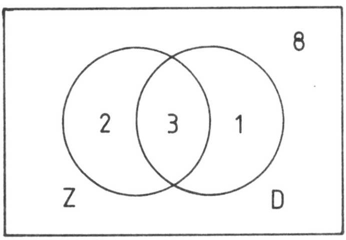




Obr. 84b

MOZ 6 - II - 3

Při řešení úlohy použijeme množinový diagram pro 2 množiny. Označme D déšť, Z zataženo.



Obr. 85

$$|Z \cap D| = 3,\ |Z - D| = 5 - 3 = 2,\ |D - Z| = 4 - 3 = 1$$

$$14 - 2 - 3 - 1 = 8$$

V průběhu dvou týdnů bylo jasno 8 dní.

MOZ 6 - II - 4

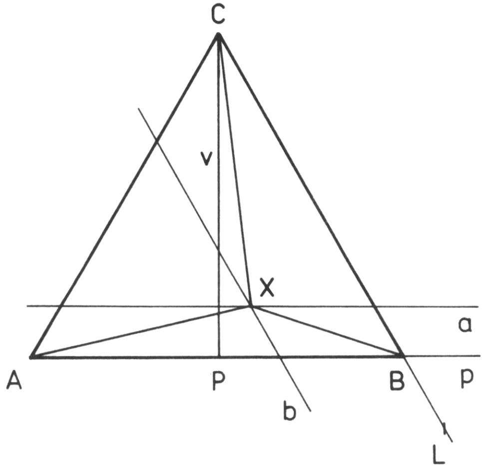
Sestrojíme výšku $|PC| = v = 6$ cm. Bodem P sestrojíme $p \perp \leftrightarrow PC$. Protože velikost vnitřních úhlů v rovnostranném trojúhelníku je 60°, je $|\sphericalangle PCB| = |\sphericalangle PCA| = 30°$.

Sestrojíme proto polopřímku CL, která s výškou PC svírá úhel velikosti $30°$. $\mapsto CL \cap p = B$.

Podobně sestrojíme vrchol A, nebo použijeme vlastnosti $|PB| = |AP|$.

Protože $|AB| = |BC| = |AC|$, trojúhelníky ABX, BCX a ACX budou mít výšky v poměru $1 : 2 : 3$. Přitom součet obsahů trojúhelníků ABX, BCX a ACX se rovná obsahu trojúhelníku ABC, součet jejich výšek ke stranám AB, BC, AC se tedy bude rovnat výšce trojúhelníku ABC, tj. 6 cm. Proto výšky budou 1 cm, 2 cm, 3 cm.

Sestrojíme tedy přímku $a \parallel AB$, která má od AB vzdálenost 1 cm, a přímku $b \parallel BC$ tak, že má od BC vzdálenost 2 cm. $a \cap b = \{X\}$, X je hledaný bod. (Obr. 86.)



Obr. 86

Kategorie MOZ 7

MOZ 7 - I - 1

Počítač našel tyto výsledky:

$4 \cdot 1\,738 = 6\,952$	$18 \cdot 297 = 5\,346$	$39 \cdot 186 = 7\,254$
$4 \cdot 1\,963 = 7\,852$	$27 \cdot 198 = 5\,346$	$42 \cdot 138 = 5\,796$
$12 \cdot 483 = 5\,796$	$28 \cdot 157 = 4\,396$	$48 \cdot 159 = 7\,632$

MOZ 7 - I - 2

1. řešení. Předpokládejme, že jsou sklady vzdáleny 60 km. Při rychlosti 30 km/h ujede kolona tuto vzdálenost za 2 hodiny. Při rychlosti 20 km/h za 3 hodiny, tedy o hodinu déle. Podle zadání má druhé koloně trvat cesta o 2 hodiny déle. Sklady jsou tedy vzdáleny 120 km. Tuto vzdálenost při rychlosti 30 km/h kolona ujede za 4 hodiny.

Aby ji ujela za 5 hodin, musí jet rychlostí $\frac{120}{5} = 24$ (km/h).

2. řešení. Označme v rychlost, kterou má kolona jet, s dráhu (vzdálenost skladů), kterou má překonat.

Údaje pro první případ:

$$v_1 = 30 \text{ km/h},\ t_1,\ s$$

Údaje pro druhý případ:

$$v_2 = 20 \text{ km/h},\ t_2 = t_1 + 2,\ s$$

Dráhy se v obou případech rovnají, tedy:

$$30t_1 = 20t_1 + 40$$

$$t_1 = 4$$

$$s = v_1 \cdot t_1 = 30 \cdot 4 = 120 \text{ (km)}$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{120}{t_1 + 1} = \frac{120}{5} = 24 \text{ (km/h)}$$

Do skladů je 120 km a auta musí jet rychlostí 24 km/h.

MOZ 7 - I - 3

Čísla na obrázku 87 udávají počet ulic, kterými je možné dostat se na místo, na němž jsou napsána.

Všimněme si „zakroužkované" křižovatky. Připusťme, že do křižovatky vlevo od ní (označené *) vedou opravdu 4 ulice a do křižovatky pod ní (označené **) 6 ulic.

Kolik jich povede do zakroužkované křižovatky? Ulice do ní přijdou buď zleva, nebo zespodu. První vzniknou prodloužením ulic z „jednohvězdičkové křižovatky" a jsou 4. Druhé vzniknou prodloužením ulic z „dvojhvězdičkové křižovatky" a těch je 6. Dohromady $4 + 6 = 10$.

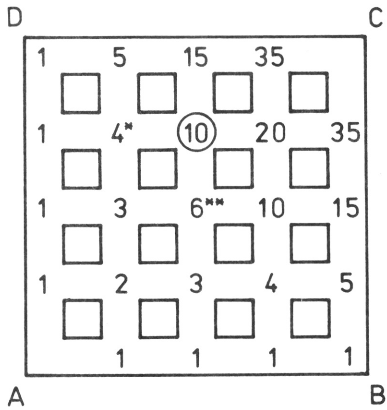
Podobně je to u všech křižovatek. Počet ulic, kterými je možné se do nich dostat, se rovná součtu ulic do křižovatky „vlevo" a „pod ní". Každý se může přesvědčit sám. (Nejsnáze v blízkosti bodu *A*.)

Kdybychom čísla z obrázku zapsali tak, jako kdyby čtverec *ABCD* visel zavěšený za bod *A*, dostali bychom část číselné tabulky známé z kombinatoriky pod názvem Pascalův trojúhelník. Čísla Pascalova trojúhelníku jsou tzv. kombinační čísla. Tomu, kdo zná kombinační čísla, ukážeme, jak tato úloha souvisí s kombinatorikou.

Každá ulice z *A* do *B* představuje lomenou čáru. Všechny tyto čáry jsou stejně dlouhé. Vždy se totiž skládají z 8 stejných úseků. Čtyřikrát se jde dopředu (*D*) a čtyřikrát vpravo (*V*). Každá cesta se dá zapsat pomocí 8 písmen. Například „horní cesta" vyznačená na obrázku 16 takto: *VDVDDVVD*, „dolní cesta" *VDVVDVDD*.

Počet cest do *C* se rovná počtu různých „slov" vytvořených ze čtyř písmen *V* a *D*.

Představme si teď 8 kuliček v řadě vedle sebe očíslovaných od 1 do 8. Každé „slovo" si znázorníme pomocí těchto kuliček. Vezmeme do ruky 1. kuličku. Jestliže slovo začíná písmenem *V*, kuličku *vrátíme* na místo, jestliže začíná písmenem *D, dáme* ji pryč. Potom vezmeme do ruky 2. kuličku a rozhodneme o jejím osudu podle



Obr. 87

druhého písmene atd. Z původních 8 kuliček zůstanou 4. Každé cestě tak odpovídá čtyřprvková podmnožina osmiprvkové množiny kuliček. Každé takové podmnožině jedna cesta z A do C.

Počet všech čtyřprvkových podmnožin osmiprvkové množiny se rovná kombinačnímu číslu $\binom{8}{4}$, tj. 70.

MOZ 7 - I - 4

Prvním řezem krychli rozpůlíme na dva hranoly s délkami hran 20 cm, 40 cm, 40 cm. Poloviny položíme na sebe a druhým řezem dostaneme 4 hranoly s délkami hran 10 cm, 40 cm, 40 cm. Třetím řezem rozpůlíme všechny vrstvy na 8 hranolů s délkami hran 10 cm, 20 cm, 40 cm. Čtvrtým řezem rozpůlíme najednou všechny tyto hranoly na 16 „komínů" s rozměry 10 cm, 10 cm, 40 cm. Z „komínů" dostaneme pátým řezem 32 dvojkrychlí a šestým řezem 64 krychlí. Menším počtem řezů než 6 se úloha splnit nedá. Každá krychle má totiž 6 stěn. Na „řezání" krychlí, které nejsou na povrchu, je třeba 6 řezů.

Dají se ušetřit 3 řezy.

MOZ 7 - I - 5

Vždy se musí použít desky 5 m, 3 m, 1 m a 2 m dlouhé. Jsou 4 možnosti uložení.

MOZ 7 - I - 6

Za každou minutu se počet baktérií zdvojnásobí. Do čtvrtiny zaplněná zkumavka se za minutu zaplní do poloviny a za další minutu úplně. Čtvrtina zkumavky se tedy zaplní za 23 hodin 58 minut.

Poznámka. Ve skutečnosti by se baktérie po celých 24 hodin nemohly rozmnožovat stejným tempem. Za 24 hodin by jich totiž muselo být $2^{1\,440}$. I kdyby se hmotnost jedné baktérie rovnala jen hmotnosti elektronu ($9 \cdot 10^{-31}$ kg), měla by zaplněná zkumavka větší hmotnost, než je odhadovaná celková hmotnost pozorovaného vesmíru.

MOZ 7 - I - 7

a)

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

V každém políčku je vepsán počet tahů jezdcem, které se dají provést. V každém rohovém čtverci 4×4 polí je dohromady 84 tahů, na celé šachovnici čtyřikrát více. Jezdec tedy může táhnout 336krát.

b) Tahy dámy jsou buď tahy střelce, nebo věže. Napřed spočítáme všechny tahy věže. V libovolném poli je možné s věží provést 7 tahů vodorovně (doleva nebo doprava) a 7 tahů svisle (nahoru – dolů).

Dohromady je to $64 \cdot 14$, tedy 896 tahů věží.

7	7	7	7	7	7	7	7
7	9	9	9	9	9	9	7
7	9	11	11	11	11	9	7
7	9	11	13	13	11	9	7
7	9	11	13	13	11	9	7
7	9	11	11	11	11	9	7
7	9	9	9	9	9	9	7
7	7	7	7	7	7	7	7

Počet tahů střelcem je vepsán v každém políčku. Na celé šachovnici je to 560 tahů střelcem.

$896 + 560 = 1\,456$

Dáma má na šachovnici 1 456 tahů.

MOZ 7 - I - 8

a) Křižovatky s lichým počtem ulic nemohou být uvnitř trasy. Každý řidič má na své trase dvě křižovatky, z nichž vycházejí tři „jeho" ulice. Tyto křižovatky (H a 8) mohou být jen na začátku nebo na konci trasy. Jakmile tedy řidiči vyjedou od hydrantu, musí skončit na křižovatce 8.

b) Jakmile ulici H8 bude kropit strýc Fanda, budou trasy obou řidičů obsahovat pouze křižovatky se sudým počtem ulic. Když tedy do některé křižovatky vjedou, mohou z ní i vyjet. V křižovatce, v níž jízdu začnou, musí jízda i skončit.

c) Trasa otce např.: H, 1, 9, 10, 11, 12, 11, 9, 12, 7, 8, 9, H. Trasa strýce Fandy např.: H, 1, 2, 3, 4, 2, H, 4, 5, 6, 4, 8, 6, 7, 8, H.

MOZ 7 - II - 1

	Vyjelo	Zůstalo na druhém břehu	Vrátilo se	Čekalo na převoz
1.	2 bojovníci, 7 zajatců	1 bojovník, 7 zajatců	1 bojovník	3 bojovníci, 27 zajatců
2.	2 bojovníci, 7 zajatců	1 bojovník, 7 zajatců	1 bojovník	2 bojovníci, 20 zajatců
3.	1 bojovník, 7 zajatců	6 zajatců	1 bojovník, 1 zajatec	2 bojovníci, 13 zajatců
4.	2 bojovníci, 7 zajatců	1 bojovník, 7 zajatců	1 bojovník	1 bojovník, 7 zajatců
5.	2 bojovníci, 7 zajatců			

MOZ 7 - II - 2

Na to, aby zalil první záhon, musí zahradník ujít:

$$14 + 16 + 2,5 + 16 + 2,5 + 14 = 65\,(\mathrm{m})$$

Při zalévání druhého záhonu ujde:

$$14 + 2{,}5 + 16 + 2{,}5 + 16 + 2{,}5 + 2{,}5 + 14 = 65 + 5 + 70 \text{ (m)}$$

Při zalévání každého dalšího záhonu je třeba ujít o 5 m více než při zalévání předcházejícího. Máme tedy posloupnost:

$$65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, \ldots; \; 65 + 5 \cdot 29 = 210$$

Součet členů této posloupnosti je:

$$\frac{(65 + 210) \cdot 30}{2} = 4\,125\,\text{m}$$

Zahradník ujde při zalévání zahrady 4,125 km.

Poznámka. Jak sčítat členy takové posloupnosti, je naznačeno v řešení MOZ 6 - I - 4, I. ročník.

MOZ 7 - II - 3

Počet výrobků je celé číslo. Počet výrobků vyrobených prvním soustružníkem je dělitelný čísly 5, 6, 7, to znamená, že je dělitelný číslem 210. Počet výrobků vyrobených druhým soustružníkem je dělitelný 3, 4, 11, to znamená, že i číslem 132.

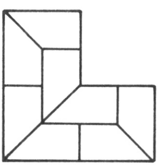
$$210 + 132 = 342 < 450$$

Snadno se přesvědčíme, že větší násobky 210 a 132 úloze nevyhovují.

Plánované výkony soustružníků byly 210 a 132 výrobků.

MOZ 7 - II - 4

Řešení je na obrázku 88.



Obr. 88

3. ROČNÍK MOZ ŠKOLNÍ ROK 1982/1983

Kategorie MOZ 5

MOZ 5 - I - 1

Musíme vybrat 10 pastelek. Kdybychom vybrali jen 9, mohlo by mezi nimi být 7 červených a jen 2 modré.

MOZ 5 - I - 2

Aby hledané číslo bylo po odečtení 7 dělitelné 10, musí mít na konci sedmičku.

Hledané číslo se rovná součtu čísla 34 a čísla, které má hledané číslo na místě desítek.

Na místě desítek může být jen 3 a hledané číslo je 37.

MOZ 5 - I - 3

Je-li součet dvou čísel 3krát větší než jejich rozdíl, musí být větší z nich dvojnásobkem menšího. Potom zkusmo pro přirozená čísla najdeme dvojici 6, 3.

(Zadání vyhovuje i dvojice 0, 0.) Jiné dvojice nevyhovují.

MOZ 5 - I - 4

Když hledaná čísla mají být beze zbytku dělitelná i číslem 5, musí být na místě jednotek 0 nebo 5.

$$\square\ 97\ \boxed{\begin{matrix}0\\5\end{matrix}}$$

Po vyzkoušení možností 1 970, 1 975, 2 970, …, 9 970, 9 975 zjistíme, že vyhovují čísla 2 970 a 6 975.
(Řešení urychlíme, známe-li kritérium dělitelnosti devíti.)

MOZ 5 - I - 5

Kůň, který skáče po šachovnici, mění barvu pole. Z bílého skáče na černé, z černého na bílé. Náš kůň stojí na bílém poli $a4$ a má se dostat na černé pole $e1$. Ujde tedy cestu b, $č$, b, $č$, b, $č$, …, b, $č$.

Tuto cestu musí tvořit stejný počet bílých a černých polí. Na polámané šachovnici je 8 bílých a 9 černých polí. Kůň tedy nemůže přejít přes všechna pole.

2. úvaha. Kůň stojí na bílém poli. Jeho 1., 3., 5., … skok končí na černém poli. Jeho 15., předposlední skok končí na černém poli, proto nemůže jít na poslední, černé pole.

MOZ 5 - I - 6

1. ř e š e n í . Provedeme rozklady čísla 11 na součet. Nejmenší činitel je 2, neboť 1 už součin neovlivní. Po vyzkoušení všech možností největší součin 54 dává rozklad 3 + 3 + 3 + 2.

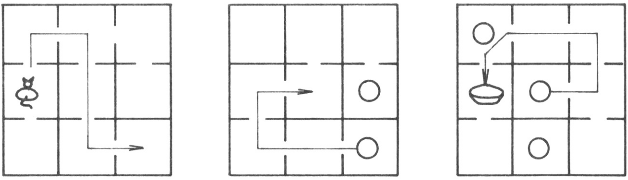
2. ř e š e n í . Hledání si usnadníme, jestliže si uvědomíme, že větší součin dostaneme tehdy, rozkládáme-li čísla rovnoměrně. Například 11 = 6 + 5 je výhodnější než 11 = 7 + 4 nebo 11 = 8 + 3. Podobně 6 = 3 + 3 je výhodnější než 6 = 4 + 2 a pro rozklad 5 je nejvýhodnější 5 = 3 + 2. Tedy

$$11 = 6 + 5 = 3 + 3 + 3 + 2.$$

Největší možný součin je 54.

MOZ 5 - I - 7

Řešení je na obrázku 89.



Obr. 89

MOZ 5 - I - 8

Krychli může znázorňovat pohled d.

MOZ 5 - II - 1

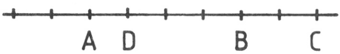
Jestliže pruty svazoval po 9, chyběl mu 1. Prutů mohlo být: $9 \cdot 6 - 1 = 53$ nebo $9 \cdot 7 - 1 = 62$ nebo $9 \cdot 8 - 1 = 71$ nebo $9 \cdot 10 - 1 = 89$ nebo $9 \cdot 11 - 1 = 98$.

Jestliže pruty svazoval po 7, přebýval mu 1. Prutů mohlo být: $7 \cdot 8 + 1 = 57$ nebo $7 \cdot 9 + 1 = 64$ nebo $7 \cdot 10 + 1 = 71$ nebo $7 \cdot 11 + 1 = 78$ nebo $7 \cdot 12 + 1 = 85$ nebo $7 \cdot 13 + 1 = 92$ nebo $7 \cdot 14 + 1 = 99$. Oběma podmínkám vyhovuje právě počet 71.

Svatopluk měl 71 prutů.

MOZ 5 - II - 2

1. Body A, D zvolíme libovolně.



Obr. 90

2. B je od D vzdáleno 3 km – jsou dvě možnosti, ale vzhledem k tomu, že B je od A vzdáleno 4 km, vyhovuje jen jedna.

3. Podobně pro C – od B je vzdáleno 2 km, od D 5 km. Jediné řešení je vyznačeno na obrázku 90. Vzdálenost AC je 6 km.

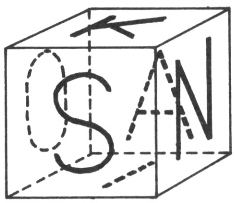
MOZ 5 - II - 3

Rozhovor probíhal v roce 1982. Uvážíme-li reálnou délku lidského života, v roce 1982 mohlo být tolik let, jako ukazují poslední číslice roku narození, jen člověku 41letému (82 : 2 = 41) a člověku 91letému (182 : 2 = 91). Protože není pravděpodobné, aby 91letá žena měla 10letého syna a 41letý muž 10letého vnuka, je to možné jen tak, že Tomášově matce bylo 41 let a Petrovu dědovi bylo 91 let.

MOZ 5 - II - 4

Z krychlí položených na stolku umíme zjistit, jak krychle vypadají (jaká písmena jsou na protilehlých stěnách). (Obr. 91.)

Obr. 91



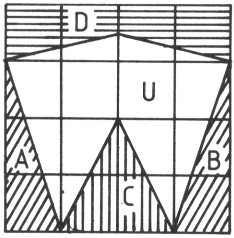
Proti *S* je *A*, proti *K* je *I*, proti *N* je *O*.
Žáci si na krychlích přečetli "*SIKANON*".

Kategorie MOZ 6

MOZ 6 - I - 1

Obsah útvaru U dostaneme, jestliže od obsahu čtverce 4×4 odečteme obsahy útvarů A, B, C, D (obr. 92).

Obsah útvaru A se rovná obsahu útvaru B, čili se rovná polovině obsahu obdélníku 3×1. Obsah A a B dohromady se rovná 3 jednotkovým čtvercům (j. č.).



Obr. 92

Podobně obsah C se rovná 2 j. č.

Obsah D se rovná $\frac{3}{4}$ obsahu obdélníku 4×1 (proč?), obsah D se tedy rovná 3 j. č.

Obsah útvaru U se rovná $4 \cdot 4 - 3 - 2 - 3 = 8$ (j. č.). Protože obsah 1 j. č. je 4 cm^2, je obsah útvaru U 32 cm^2.

MOZ 6 - I - 2

xyx je dělitelné čtyřmi, *x* tedy musí být sudé.

yxy je dělitelné třemi, ciferný součet $x + 2y$ musí být dělitelný třemi.

Protože x je sudé, musí být $x + 2y$ sudé. Z toho $x + 2y$ může být 6, 12, 18, 24. Prověříme všechny možnosti; pro $y = 1, 2, 3, \ldots, 9$ vypočítáme x a zkoušíme, jestli je *xyx* dělitelné čtyřmi. Úloze vyhovují čísla 828, 636, 252, 696, která jsou dělitelná čtyřmi, a jim odpovídající čísla 282, 363, 525, 969, která jsou dělitelná třemi.

MOZ 6 - I - 3

Budík, který jde o 6 minut napřed, bude ukazovat přesný čas až tehdy, když se posune o 12 hodin, tj. o 720 minut. To se stane za 720 : 6 = 120 (dní).

Budíky ukazovaly stejný čas opět 10. června 1982 v 8.00 h.

MOZ 6 - I - 4

K	1	1	1	1
1	2	3	4	5
1	3	6	10	15
1	4	10	20	35
1	5	15	35	$C = 70$

Čísla v okénkách tabulky ukazují, kolika způsoby je možné se do daného okénka dostat.

Chceme-li přečíst slovo kotrmelec, musíme se dostat z okénka K do okénka C.

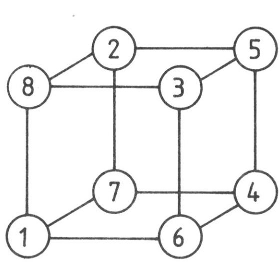
Slovo *KOTRMELEC* můžeme v tabulce přečíst 70krát.

MOZ 6 - I - 5

Trojúhelník je možné složit z 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91 koleček. Podle podmínek úlohy čtverec a trojúhelník je možné složit jen z 36 koleček.

MOZ 6 - I - 6

Ano, možností je víc. Jedna z nich je na obrázku 93.



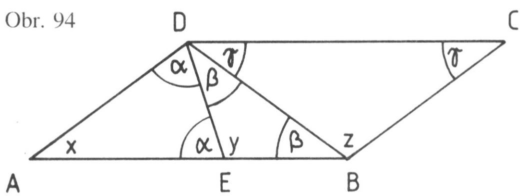
Obr. 93

MOZ 6 - I - 7

Na topolu a na kravíně bylo původně 35 vran. Když 5 vran přeletělo z topolu na střechu a 5 vran ze střechy odletělo, bylo na topolu a na střeše dohromady 30 vran. Na topolu jich však bylo 2krát víc než na střeše. Na topolu tedy bylo potom 20 a na střeše 10 vran. V jednotlivých hejnech bylo na začátku 25 a 10 vran.

MOZ 6 - I - 8

Obr. 94



1. ř e š e n í. Jestliže si označíme velikosti úhlů rovnoramenných trojúhelníků podle obrázku 94, potom $x = 180° - 2\alpha$, $y = 180° - 2\beta$, $z = 180° - 2\gamma$.

Ale úhel AEB je přímý, takže $y = 180° - \alpha$, z čehož $\alpha = 2\beta$. Z vlastností rovnoběžníku víme, že $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle ABC|$, takže platí $\alpha + \beta + \gamma = \beta + z$, z čehož $z = \alpha + \gamma$.

Ze součtu úhlů trojúhelníku BCD plyne:

$$\gamma + \gamma + z = 3\gamma + \alpha = 180°.$$

Z vlastností rovnoběžníku $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle DCB|$, z čehož $x = \gamma$, tj. $180° - 2\alpha = \gamma$.

Máme dva vztahy pro α a γ:

$$3\gamma + \alpha = 180° \quad (1)$$

$$180° - 2\alpha = \gamma \quad (2)$$

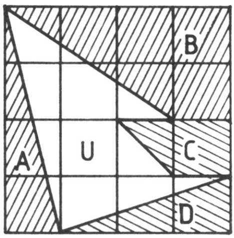
Dosadíme za γ do 1. rovnice:

$$3 \cdot (180° - 2\alpha) + \alpha = 180° \text{ a odtud } \alpha = 72°, \gamma = 36°.$$

2. (hezčí) ř e š e n í . Z vlastností střídavých úhlů platí: $\beta = \gamma$, $\alpha = \beta + \gamma$ a $x = \gamma$, z toho potom $\alpha = 2\gamma$. Potom z $\triangle AED$: $2\alpha + \gamma = 180°$ a z předcházejícího $2\alpha + \gamma = 5\gamma = 180°$. Odtud $\gamma = 36°$, $\beta = 36°$, $\alpha = 72°$.

Rovnoběžník má úhly velikosti 36° a 144°.

MOZ 6 - II - 1



Obr. 95

$|A| = 2$ čtverečky, $|B| = 5$ čtverečků, $|C| = 1{,}5$ čtverečku, $|D| = 1{,}5$ čtverečku, $|Č| = 16$ čtverečků.

$|U| = |Č| - |A| - |B| - |C| - |D| = 16 - 10 = 6$ (čtverečků), 1 čtvereček = 4 cm^2.

$|U| = 24\ cm^2$.

MOZ 6 - II - 2

Nejmenší společný násobek 10 a 14 je 70. Současně tedy letěla znovu za 70 dní.

Leden	31 dní
Únor	28 dní
	59 dní, zbývá 11 dní

Nejbližší den, kdy spolu znovu letěla, byl 12. březen 1983.

MOZ 6 - II - 3

Ciferný součin 6:

a) $1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 6$ nevyhovuje, protože součet je vždy víc než 6.

b) $1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$ vyhovuje, čili vyhovuje trojciferné číslo s číslicemi 1, 2, 3.

Jiná možnost není.

Řešením jsou čísla 123, 132, 213, 231, 312, 321.

MOZ 6 - II - 4

Experimentováním je možné zjistit, že přidáním dalších dvou řádků k trojúhelníku, v němž počet koleček je n-násobkem počtu koleček spodního řádku, se poměr změní. Počet koleček nového trojúhelníku se bude rovnat $(n + 1)$násobku počtu koleček spodního řádku.

a) Počet koleček v trojúhelníku bude 4krát větší než počet koleček ve spodním řádku, bude-li trojúhelník mít 7 řádků.

b) ... 9 řádků.

c) ... 199 řádků.

Obecné tvrzení je možné formulovat i takto:
Aby trojúhelník měl n-krát více koleček než jeho poslední řádek, musí mít $2n - 1$ řádků.

Kategorie MOZ 7

MOZ 7 - I - 1

Z rozdílu $DA - A = DF$ vyplývá, že $F = \emptyset$ ($\emptyset$ = nula). Protože $DE + D\emptyset = CE$, musí platit: $C = 2 \cdot D$ a současně $D < 5$. Nechť $D = 1$, potom $C = 2$ a algebrogram vypadá takto:

$$\begin{array}{ccccc} AB & : & 2 & = & 1E \\ - & & \times & & + \\ 1A & - & A & = & 1\emptyset \\ \hline 21 & + & H & = & 2E \end{array}$$

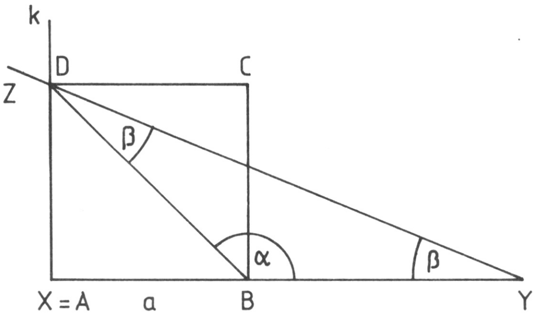
Z rozdílu $AB - 1A = 21$ vyplývá $A = 3$, $B = 4$. Po dosazení a výpočtech dostáváme $E = 7$, $H = 6$. Tedy:

$$\begin{array}{ccccc} 34 & : & 2 & = & 17 \\ - & & \times & & + \\ 13 & - & 3 & = & 1\emptyset \\ \hline 21 & + & 6 & = & 27 \end{array}$$

Když $D \geqq 2$, potom $C \geqq 4$, potom $A \geqq 8$, potom $C \cdot A \geqq 32$, ale $H \neq 32$. Další řešení neexistuje.

MOZ 7 - I - 2

a) *Rozbor* (obr. 96):



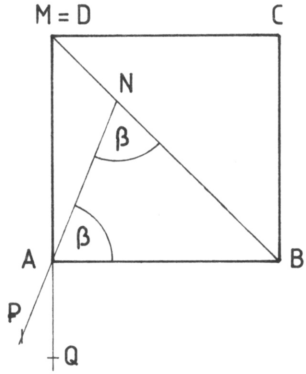
Obr. 96

Trojúhelník YDB je rovnoramenný. Úhly při vrcholech Y a D jsou shodné, označili jsme je β. Když $\alpha = 180° - 45° = 135°$, $\beta = 22{,}5°$. $\triangle XYD$ umíme sestrojit (*usu*), potom už známe $|a| = |XD|$.

Konstrukce

1. Sestrojíme přímku k: $k \perp XY$; $X \in k$.
2. Sestrojíme polopřímku YZ: $|\sphericalangle XYZ| = 22{,}5°$.
3. Sestrojíme bod $D \in k \cap YZ$.
4. Sestrojíme čtverec $ABCD$, bod $A = X$.

b) *Rozbor* (obr. 97):



Obr. 97

Trojúhelník ANB je rovnoramenný, úhly při vrcholech A, N jsou stejně velké, $\beta = \frac{180° - 45°}{2} = 67,5°$.

$\triangle MNA$ umíme sestrojit (*usu*), potom už známe $|a| = |MA|$.

Konstrukce

1. Sestrojíme polopřímku NP: $|\sphericalangle MNP| = 112,5°$.
2. Sestrojíme polopřímku MQ: $|\sphericalangle NMQ| = 45°$.
3. Sestrojíme bod $A \in MQ \cap NP$.
4. Sestrojíme čtverec $ABCD$, bod $D = M$.

MOZ 7 - I - 3

Označme věk Jendy j, Aničky a, Petra p. Z textu přímo sestavíme rovnice:

$$a = 2j$$

$$j + 3 = \frac{p + 3}{2}$$

$$p - 3 = 2 \cdot (a - 3)$$

Řešením je $j = 3$, $a = 6$, $p = 9$.

MOZ 7 - I - 4

Z textu zjistíme, že Adam může být nejlepší jen z $Č$ (český jazyk) a M (matematika), David jen z M a F (fyzika). Protože David a Bohouš jsou nejlepší jen v M a F, Adam musí být nejlepší z $Č$. Z toho plyne, že Cyril je nejlepší z A (angličtina).

Adam je nejlepším přítelem fyzika a Cyril nejlepším přítelem Bohouše. Protože Bohouš nemůže mít dva nejlepší přátele, je nejlepší v M, a tedy David je nejlepší z F. Adam je nejlepší v $Č$, Boris v M, Cyril v A a David je nejlepší ve F.

MOZ 7 - I - 5

Procento neprospívajících žáků je 5. Neprospěli dva chlapci, tj. 2 žáci tvoří 5 % třídy. V celé třídě je potom 20krát více žáků, čili 40 žáků, z toho je 22 děvčat.

MOZ 7 - I - 6

Protože $52 - y \cdot z$ musí být dělitelné 5, může se rovnat jen 50, 45, 40, 35, …, 15, 10, 5. Potom $y \cdot z$ musí být jedno z čísel 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47. Čísla 2, 7, 17, 37, 47 jsou prvočísla – nedají se rozložit na součin dvou čísel větších než 1.

Pro $y \cdot z$ zbývají jen možnosti: $12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$, $22 = 2 \cdot 11$, $27 = 3 \cdot 9$, $32 = 2 \cdot 16 = 4 \cdot 8$, $42 = 2 \cdot 21 = 3 \cdot 14 = 6 \cdot 7$.

Všechny možnosti jsou uvedeny v tabulce:

y	3	4	2	6	2	11	3	9	2	16	4	8	2	21	6	7	3	14
z	4	3	6	2	11	2	9	3	16	2	8	4	21	2	7	6	14	3

MOZ 7 - I - 7

Ze vzorce pro obsah trojúhelníku dostaneme rovnosti:

$$\frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2},$$

z nich $a \cdot v_a = b \cdot v_b = c \cdot v_c$, z toho $v_b = \frac{a}{b} \cdot v_a = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$ a $v_c = \frac{a}{c} \cdot v_a = \frac{2}{4} \cdot 9 = 4{,}5$.

MOZ 7 - I - 8

První tři mužstva získala dohromady 15 bodů, což mohla získat nejméně v 8 zápasech. 3 mužstva v systému každý s každým (právě jeden zápas) odehrají 3 zápasy, 4 mužstva 6 zápasů, 5 mužstev 10 zápasů. V turnaji tedy muselo být aspoň 5 mužstev. Na poslední dvě z nich zbývá 5 bodů, což je možné rozdělit 5 + 0, 4 + 1, 3 + 2, 2 + 3, … Ale čtvrté musí mít nejvíce tři body a musí mít aspoň tolik jako páté mužstvo. Jediná možnost rozdělení zbylých 5 bodů je: čtvrté mužstvo 3 a páté 2 body. Kdyby v turnaji hrálo 6 mužstev, sehrála by 15 zápasů, tj. mužstva by dohromady získala 30 bodů. 15 z nich získala první tři mužstva, zbytek by musela získat ostatní. Mezi tři mužstva je možné rozdělit 15 bodů jen tak, že nejlepší z nich získá aspoň 5 bodů. Ale nejlepší z nich může být jen na 4. místě, přitom by ale mělo více bodů než třetí mužstvo. V turnaji tedy nemůže hrát 6 mužstev.

Na turnaji bylo 5 mužstev a poslední z nich získalo 2 body.

MOZ 7 - II - 1

Z druhého řádku vyplývá, že zápis druhé mocniny čísla E končí stejnou číslicí E. Taková čísla jsou dvě (0 a 1 samozřejmě nevyhovují): $5 \times 5 = 25$, $6 \times 6 = 36$.

a) Nechť $E = 5$, potom $C = 2$ a algebrogram je možné částečně vyplnit:

$$\begin{array}{ccccc} A & \times & B & = & 2D \\ + & & - & & - \\ 5 & \times & 5 & = & 25 \\ \hline F & : & G & = & 2 \end{array}$$

Z 3. sloupce vyplývá $D = 7$, a tedy $A \times B = 27$, ale číslo 27 je možné jen jedním způsobem rozložit na součin dvou jednociferných čísel: $27 = 3 \cdot 9$. Protože z 2. sloupce vyplývá, že $B > 5$, musí být $A = 3$, $B = 9$. Dostaneme:

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \times & 9 & = & 27 \\ + & & - & & - \\ 5 & \times & 5 & = & 25 \\ \hline F & : & G & = & 2 \end{array}$$

Ale potom $F = 8$ a $G = 4$. Algebrogramu tedy vyhovuje: $A = 3$, $B = 9$, $C = 2$, $D = 7$, $E = 5$, $F = 8$, $G = 4$.

b) Nechť $E = 6$, potom $C = 3$. Dostáváme:

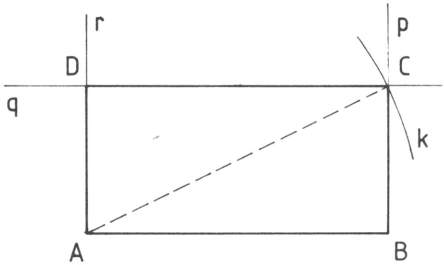
$$\begin{array}{ccccc} A & \times & B & = & 3D \\ + & & - & & - \\ 6 & \times & 6 & = & 36 \\ \hline F & : & G & = & 3 \end{array}$$

Podle 3. sloupce by muselo $D = 9$, v 1. řádku by mělo být $A \times B = 39$. Ale číslo 39 se nedá rozložit na součin dvou jednociferných čísel ($39 = 3 \cdot 13$). $E = 6$ tedy nevyhovuje. Úloha má jedno řešení.

MOZ 7 - II - 2

Grafický součet úseček XY, ZT se rovná $(u + s) + (u - s) = 2u$, u tedy najdeme rozdělením $XY + ZT$ na polovinu. Z nalezené hodnoty u získáme $s = XY - u$.

Konstrukce obdélníku $ABCD$ (obr. 98):



Obr. 98

1. Sestrojíme AB: $|AB| = s$.
2. Sestrojíme přímku p: $B \in p$, $p \perp AB$.
3. Sestrojíme kružnici k: $k(A, u)$.
4. Sestrojíme bod C: $C \in k \cap p$.
5. Sestrojíme přímku q: $q \parallel AB$, $C \in q$.
6. Sestrojíme přímku r: $r \perp AB$, $A \in r$.
7. Sestrojíme bod D: $D \in q \cap r$.
8. $ABCD$.

MOZ 7 - II - 3

Nakreslíme si tabulku. Do 1. sloupce zapíšeme začáteční písmena jmen čtyř přátel, do 1. řádku začáteční písmena jmen zvířátek, která chovají. Jestliže chlapec nebo dívka určité zvířátko chová, napíšeme do příslušného okénka +, jestliže ne, –. Protože každé z dětí chová právě jedno zvířátko, bude v každém sloupci a v každém řádku tabulky právě jedno +. Z první podmínky vyplývá, že Bohouš nechová ptáčky, tj. v *BKa* a *BPa* je –. Z druhé podmínky vyplývá, že Cilka nechová papouška, tj. v *CPa* je –. Z třetí podmínky vyplývá, že Anička nechová ptáčky, tj. v *AKa*, *APa* je –. Potom ale v *DPa* musí být +, tj. Dana chová papouška, ale nic jiného, v *DP*, *DK* a *DKa* jsou –. Potom ale kanárka musí chovat Cilka, která už nemůže chovat ani pejska, ani kočku, tj. v *CP* a *CK* jsou –. Ze čtvrté podmínky vyplývá, že Anička nechová pejska. Potom ale pejska musí chovat Bohouš a Anička chová kočku.

	P	*K*	*Ka*	*Pa*
A	–	+	–	–
B	+	–	–	–
C	–	–	+	–
D	–	–	–	+

Úlohu je možné řešit i úvahou, bez pomoci tabulky.

MOZ 7 - II - 4

Označme x cenu velké čokolády a y cenu malé čokolády. Z podmínek úlohy dostáváme $3x + 5y = 72$. Odtud $3x = 72 - 5y$.

Když levá strana rovnice je dělitelná třemi, musí být i její pravá strana dělitelná třemi. Číslo 72 je dělitelné třemi, z toho $5y$ musí být dělitelné třemi, a tedy y musí být dělitelné třemi.

Zvolme y jako násobky tří a sestavme tabulku:

y	3	6	9	12
$x = \dfrac{72 - 5y}{3}$	19	14	9	4

Předpokládáme-li, že velká čokoláda stála více, vyhovují dvě řešení.

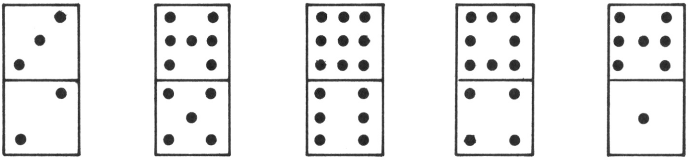
Velká čokoláda stála 19 Kčs a malá 3 Kčs, nebo velká 14 Kčs a malá 6 Kčs.

4. ROČNÍK MOZ ŠKOLNÍ ROK 1983/1984

Kategorie MOZ 4

MOZ 4 - I - 1

Rozdíl čísel určených jednotlivými kostkami domina tvoří posloupnost 1, 2, 3, 4, ... Rozdíl čísel na poslední kostce tuto posloupnost nesplňuje. (Obr. 99.)



Obr. 99 3-2=1 7-5=2 9-6=3 8-4=4 7-1=6

„Jiné řešení" žáka: Každá kostka domina má v obou čtvercích v pravém horním a v levém dolním rohu bod. Pouze dolní čtverec poslední kostky to nesplňuje.

MOZ 4 - I - 2

a) (3, 0), (0, 3), (3, 3), (1, 5), (1, 0), (0, 1), (0, 4),
b) (0, 5), (3, 2), (0, 2), (2, 0), (2, 5), (3, 4).

První číslo v závorce znamená počet litrů vody ve třílitrové nádobě, druhé číslo počet litrů vody v pětilitrové nádobě.

MOZ 4 - I - 3

Délka lavice je 12násobkem délky „peromíry" a 8násobkem délky „tužkomíry". Možnosti pro peromíru jsou: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144; pro tužkomíru: 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96, 104, 112, 120, 128, 136, 144. Protože lavice je kratší než 150 cm a delší než 120 cm, vyhovuje jen společné číslo 144.

Peromíra měřila 12 cm, tužkomíra 18 cm a lavice 144 cm.

MOZ 4 - I - 4

Řešíme zkusmo.

Z 2. rovnosti vyplývá, že D je sudé číslo, a z 1. rovnosti, že $D \leqq 12$.

Jestliže $D = 0$, potom z 1. rovnosti $E = 24$ a z 3. rovnosti $A + C + 24 = 24$, což nemůže být, protože potom i $A = 0$, i $C = 0$. Jestliže $D = 2$, potom z 1. rovnosti $E = 20$ a z 2. rovnosti $A = 11$, ale z 3. rovnosti je $11 + C + 20 = 24$, to také nemůže nastat. Stejně jestliže $D = 4$, dojdeme k rovnosti, která nemůže nastat. Jestliže $D = 6$, potom $E = 12$, $A = 9$, $C = 3$, $B = 15$, $F = 18$, $G = 21$. Pro žádné další číslo D rovnosti nevyhovují.

MOZ 4 - I - 5

Každý chlapec měl čepici, takže v šatně bylo 15 čepic a 18 kusů rukavic.

$18 : 2 = 9$, 9 chlapců tedy mělo rukavice.

$15 - 9 = 6$, 6 chlapců nemělo rukavice.

MOZ 4 - I - 6

Průměr 2,2 znamená součet známek 22. Zkusmo najdeme počet prvních, druhých a třetích míst:

dvakrát první místo .... 2 body,
čtyřikrát druhé místo .... 8 bodů,
čtyřikrát třetí místo .... 12 bodů,
dohromady 22 bodů, $22 : 10 = 2{,}2$.

MOZ 4 - II - 1

Označme rovnosti v pořadí (1), (2), (3). Dvě dvojciferná čísla mají součet vždy menší než 200, musí tedy být $B = 1$. V (3) ze součtu posledních číslic vidíme, že $D = 0$. V (1) ze součtu $B + C = 10$ a $B = 1$, tedy $C = 9$. Jestliže $C = 9$ a $D = 0$, pak (3) je $90 + 99 = 189$, to znamená, že $A = 8$.

Řešením je $A = 8$, $B = 1$, $C = 9$, $D = 0$.

MOZ 4 - II - 2

Úlohu můžeme řešit zkusmo. Například, jestliže byla Věrka v divadle 10krát, pak v kině byla $2 \cdot 10 + 2 = 22$krát, součin je potom $10 \cdot 22 = 220$, ale $220 \neq 312$.

Jestliže byla v divadle 11krát, pak v kině byla $2 \cdot 11 + 2 = 24$krát, součin potom je $11 \cdot 24 = 264$.

Jestliže Věrka byla v divadle 12krát, pak v kině byla $2 \cdot 12 + 2 = 26$krát, součin potom je $26 \cdot 12 = 312$.

Věrka byla v divadle 12krát a v kině 26krát.

Kategorie MOZ 5

MOZ 5 - I - 1

Počet stran očíslovaných jednociferným číslem (1 až 9) je 9. Zbývá $273 - 9 = 264$ číslic.

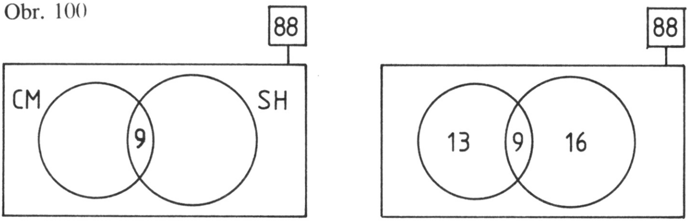
Počet stran očíslovaných dvojciferným číslem (10 až 99) je 90, spotřebovaných je $90 \cdot 2 = 180$ číslic. Zbývá $264 - 180 = 84$ číslic, ze kterých jsou vytvořena trojciferná čísla (100, 101, ...). Počet všech trojciferných čísel použitých na očíslování stran učebnice musí být $84 : 3 = 28$. $9 + 90 + 28 = 127$.

Učebnice má 127 stran.

MOZ 5 - I - 2

Úlohu můžeme řešit pomocí množinového diagramu (obr. 100).

Obr. 100



Ze zadání úlohy víme:
všech žáků je 88
na CM nechodí 66
na SH nechodí 63
chodí právě na oba 9
Dále dostaneme:
na CM chodí .... 88 – 66 = 22
na SH chodí .... 88 – 63 = 25
Právě na jeden předmět tedy chodí:
na CM .... 22 – 9 = 13
na SH .... 25 – 9 = 16

a) 38 žáků se přihlásilo aspoň na jeden předmět,
b) 29 žáků se přihlásilo právě na jeden předmět.

MOZ 5 - I - 3

a) Právě jedna svítící žárovka signalizuje 7 různých situací.

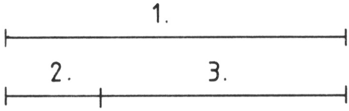
b) Svítí-li nejvýše tři žárovky, mohou nastat případy, že nesvítí žádná, svítí právě jedna, právě dvě nebo právě tři. Žádná svítící žárovka signalizuje jednu situaci. Jedna svítící žárovka signalizuje 7 různých situací. Dvě svítící žárovky signalizují tolik různých situací, kolik je možné vybrat dvojic žárovek ze sedmi žárovek. Je to 21 dvojic.

Podobně právě tři svítící žárovky signalizují 35 různých situací.

Nejvýše tři svítící žárovky mohou signalizovat 1 + 7 + 21 + 35 = = 64 různých situací.

MOZ 5 - I - 4

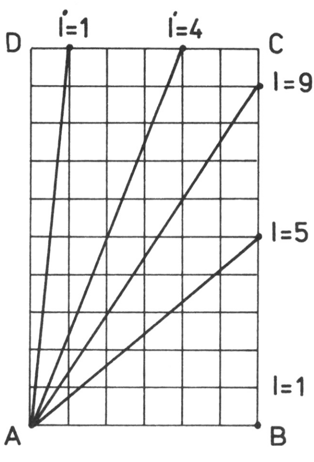
Obr. 101



První úsečka má stejnou délku jako dvě zbývající dohromady, první úsečka tedy má délku 104 : 2 = 52 (mm). Třetí úsečka má délku jako 3 druhé úsečky dohromady. Třetí a druhá úsečka mají tedy délku jako čtyři druhé úsečky. 52 : 4 = 13, druhá úsečka má délku 13 mm.

Délky úseček jsou 52 mm, 13 mm, 39 mm.

MOZ 5 - I - 5



Obr. 102

Vrchol I	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Obsah obdélníku	60	60	60	60	60	60	60	60	60
Obsah trojúhelníku ABI	3	6	9	12	15	18	21	24	27
Obsah čtyřúhelníku	57	54	51	48	45	42	39	36	33
Číslo x	19	9	–	4	3	–	–	–	–
1. odvěsna	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	3	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	6	7	8	9
2. odvěsna	$\boxed{6}$	$\boxed{6}$	6	$\boxed{6}$	$\boxed{6}$	6	6	6	6

Vrchol I'	1	2	3	4	5
Obsah obdélníku	60	60	60	60	60
Obsah trojúhelníku ABI'	5	10	15	20	25
Obsah čtyřúhelníku	55	50	45	40	35
Číslo x	11	5	3	2	–
1. odvěsna	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	5
2. odvěsna	$\boxed{10}$	$\boxed{10}$	$\boxed{10}$	$\boxed{10}$	10

Úloha má 8 řešení. Jsou vyznačena v tabulkách.

MOZ 5 - I - 6

a) Prodavačka vrátila kupujícímu 3 kusy mincí (1 pětikorunu a dvě dvoukoruny).

b) Prodavačka vrátila kupujícímu 90 kusů mincí (v desetihaléřích).

c) Prodavačka vrátila kupujícímu jednu pětikorunu, jednu dvoukorunu, jednu korunu, jeden padesátihaléř, jeden dvacetihaléř a tři desetihaléře (nebo dva dvacetihaléře a jeden desetihaléř).

d) Prodavačka vrátila např. jednu pětikorunu, jednu dvoukorunu, dva padesátihaléře a deset desetihaléřů; nebo jednu pětikorunu, jednu korunu, dva padesátihaléře, deset dvacetihaléřů. Jsou ještě další možnosti.

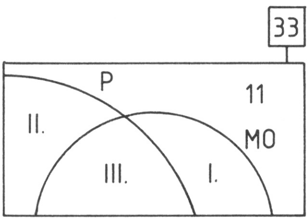
e) Prodavačka vrátila např. jednu pětikorunu, čtyři padesátihaléře, pět dvacetihaléřů, deset desetihaléřů. Jsou ještě další možnosti.

MOZ 5 - II - 1

Je možné utvořit $11 \cdot 15 = 165$ různých dvojic do týdenních služeb. Od 5. do 8. ročníku je $4 \cdot 40 = 160$ pracovních týdnů. Učitel tedy může určit služby během čtyř let tak, aby žádná dvojice neměla službu více než jednou.

MOZ 5 - II - 2

Situaci znázorníme na množinovém diagramu (obr. 103):



Obr. 103

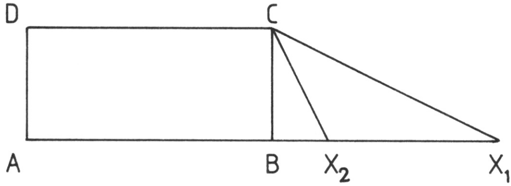
Zapíšeme počty prvků množin I, II, III do tabulky:

I	II	III	součet	
1	2	8	11	nevyhovuje podmínkám
2	4	16	22	vyhovuje podmínkám
3	6	24	33	nevyhovuje podmínkám
⋮				

Řešení: a) 16 žáků,
b) 6 žáků,
c) 17 žáků.

MOZ 5 - II - 3

Náčrt (obr. 104):



Obr. 104

Když $S_{\square ABCD} = 60\ \text{cm}^2$, potom $S_{\triangle BX_1C} = 30\ \text{cm}^2$, a tedy $|BX_1| = 12$ cm.

Když $S_{\square ABCD} = 60\ \text{cm}^2$, potom $S_{\triangle BX_2C} = 10\ \text{cm}^2$, a tedy $|BX_2| = 4$ cm.

MOZ 5 - II - 4

Trojciferná čísla vyhovující první podmínce úlohy jsou 126, 162, 129, 192, 169, 196. Poslední podmínce vyhovují jen čísla 169, 196.

169 … strana čtverce 13, strany obdélníku 1, 169.

196 … strana čtverce 14, strany obdélníku 1, 196; 2, 98; 4, 49; 7, 28.

Kategorie MOZ 6

MOZ 6 - I - 1

Úlohu řešíme zkusmo.

a) $5 \cdot (43 - 21) = 110$

b) $(54 + 3) \cdot 2 - 1 = 113$

MOZ 6 - I - 2

V představě je třeba pyramidu začít stavět od vrcholu. Na jednotlivá poschodí potřebujeme:

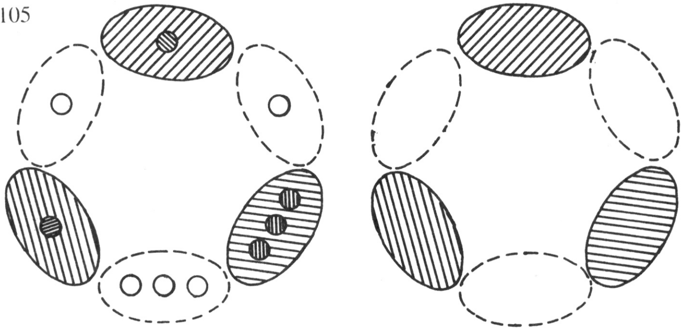
$$1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + 7 \cdot 7 + 9 \cdot 9 + 11 \cdot 11 + 13 \cdot 13 = 455 \text{ krychlí.}$$

Ze 455 krychlí postavíme sedmiposchoďovou pyramidu, k vystoupení na vrchol potřebujeme vyjít 7 schodů.

MOZ 6 - I - 3

Skupina sousedních korálků stejné barvy tvoří jednu množinu. Aby bylo právě 6 obměn, musíme mít právě 3 neprázdné množiny červených a právě 3 neprázdné množiny bílých korálků a „navlékat" tyto množiny střídavě (obr. 105).

Obr. 105



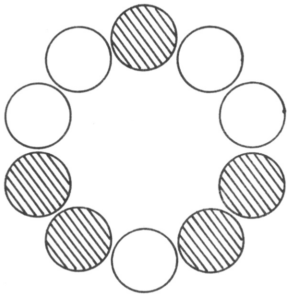
Sjednocením množin červených korálků dostaneme 5prvkovou množinu, sjednocením množin bílých korálků dostaneme také 5prvkovou množinu.

Protože $5 = 1 + 1 + 3$ nebo $5 = 1 + 2 + 2$, počty prvků v uvažovaných množinách červených korálků jsou 1, 1, 3 nebo 1, 2, 2. Totéž platí i pro počty prvků v množinách bílých korálků.

Je 8 různých řešení.

Řešení	*b*	*č*	*b*	*č*	*b*	*č*
1.	1	3	3	1	1	1
2.	1	3	1	1	3	1
3.	2	3	2	1	1	1
4.	2	3	1	1	2	1
5.	1	1	1	2	3	2
6.	1	1	3	2	1	2
7.	2	1	1	2	2	2
8.	2	1	2	2	1	2

b – počet prvků v množině bílých korálků, *č* – počet prvků množiny červených korálků. Poslední, 8. řešení je na obrázku 106.



Obr. 106

MOZ 6 - I - 4

1. ř e š e n í. Z obrázku b vyčteme, že tři misky mají stejnou hmotnost jako dva džbány, ale jeden džbán má hmotnost jako láhev s pohárem, tři misky tedy mají stejnou hmotnost jako dvě láhve s dvěma poháry.

Z obrázku c vidíme, že hmotnost láhve je stejná jako hmotnost poháru s miskou, tři misky tedy mají stejnou hmotnost jako dva poháry s dvěma miskami a dvěma poháry, což jsou dvě misky a čtyři poháry. Z toho vidíme, že jedna miska má stejnou hmotnost jako čtyři poháry.

Porovnáním obrázku d s obrázkem c vidíme, že k poháru musíme přidat poháry o hmotnosti misky.

K poháru na obrázku d musíme přidat 4 poháry.

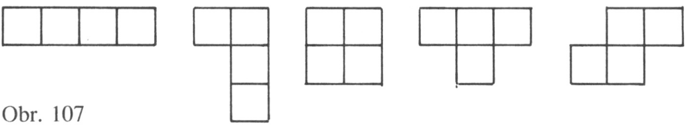
2. ř e š e n í. Označme džbán d, láhev l, pohár p, misku m. Z b) $3m = 2d$, z a) $d = l + p$, tedy $3m = 2l + 2p$, ale z c) $l = p + m$, tedy $3m = 2 \cdot (p + m) + 2p = 4p + 2m$, odtud $m = 4p$. Porovnáním obrázků d a c vidíme, že k poháru na obrázku d musíme přidat 4 poháry.

MOZ 6 - I - 5

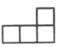
141 – 9 = 132, 132 : 18 = 7, zb. 6.
141. schod je šestý schod mezi sedmým a osmým poschodím.

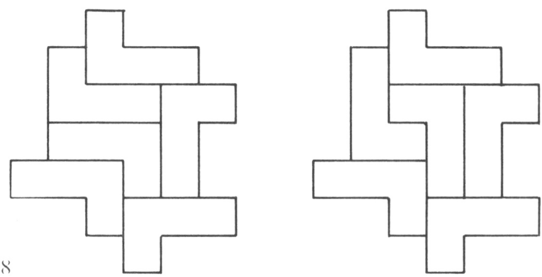
MOZ 6 - I - 6

Daný útvar má obsah rovnající se 24 jednotkám, jednotlivé části tedy budou mít obsah rovnající se 24 : 6 = 4 jednotkám. Uvažujme útvary na obr. 107:



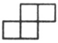
Obr. 107

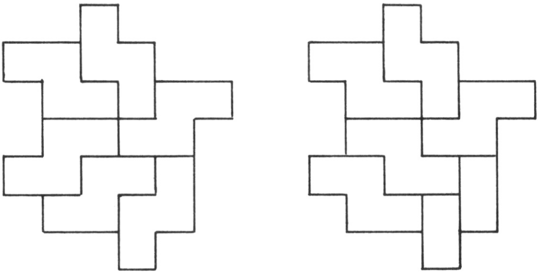
Úvahou a experimentováním zjistíme, že úloze vyhovuje útvar  a úloha má dvě řešení (obr. 108a, b):



Obr. 108

a) b)

nebo útvar  a úloha má také dvě řešení (obr. 109a, b):



Obr. 109

c) d)

MOZ 6 - II - 1

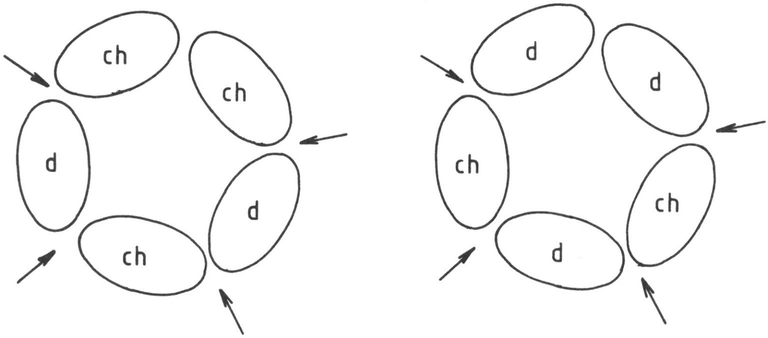
palec	ukazovák	prostředník	prsteník	malíček
1	2	3	4	5
9	8	7	6	
	10	11	12	13
17	16	15	14	
	18	19	20	21
25	24	23	22	
	26	27	... atd.	

K palci se při počítání Marie vrátí vždy po osmi číslech, proto dělíme 1 988 : 8 = 248, zb. 4. Všechna čísla, která při dělení osmi dávají zbytek 4, padnou na prsteník, číslo 1 988 tedy padne na prsteník.

MOZ 6 - II - 2

1. ř e š e n í. Kdyby seděli střídavě, bylo by právě 14 změn. Pro 5 změn potřebujeme vytvořit 5 podmnožin tak, aby prvky jednotlivých množin byli jen žáci jednoho pohlaví. Rozmístit tyto množiny je možné jen dvěma způsoby (obr. 110).

Obr. 110



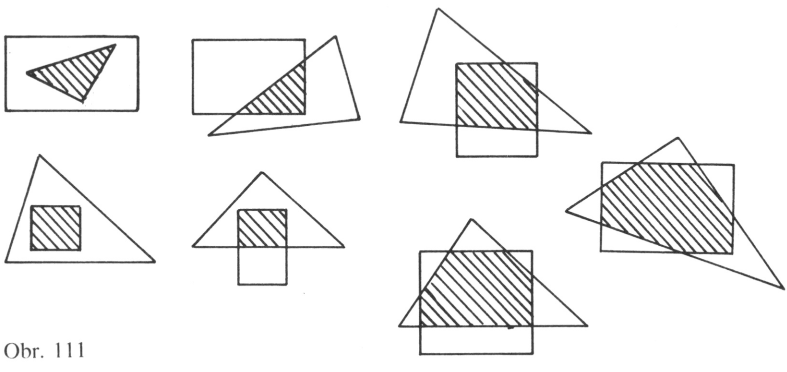
Obě situace mají jen 4 změny, tj. při čtyřech žácích sedí napravo žáci jiného pohlaví.

2. ř e š e n í. Jdeme do kruhu a počítáme „změny". Startujeme od chlapce, přijdeme-li k děvčeti, bude počet změn lichý, když přijdeme k chlapci, tak sudý. To znamená, když se vrátíme k chlapci, od kterého jsme vyšli, je počet změn sudý, tedy různý od 5.

Úloha nemá řešení.

MOZ 6 - II - 3

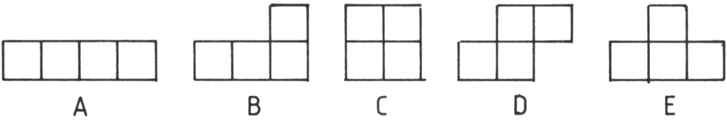
Průnik může být troj-, čtyř-, pěti-, šesti-, sedmiúhelník (obr. 111).



Obr. 111

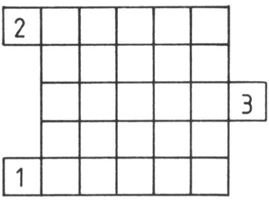
MOZ 6 - II - 4

Daný obrazec se skládá z 28 čtverečků, proto útvary, na které ho máme rozdělit, se budou skládat ze čtyř čtverečků. Mohou to být útvary z obrázku 112.



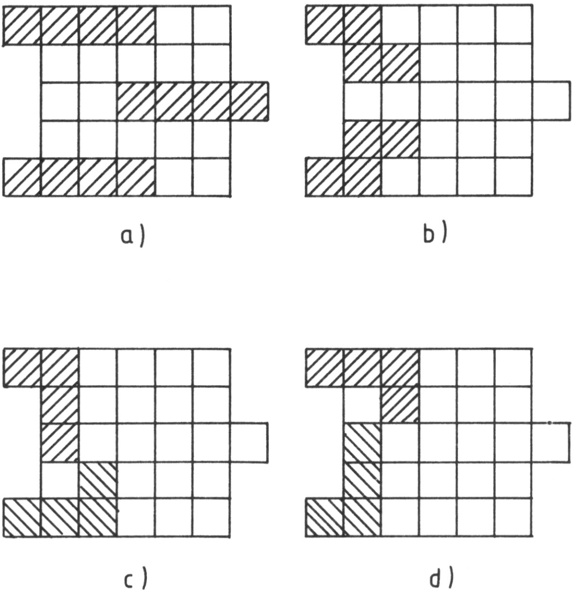
Obr. 112

Označme si čtverečky čísly 1, 2, 3 jako na obrázku 113. Potom velmi

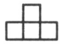


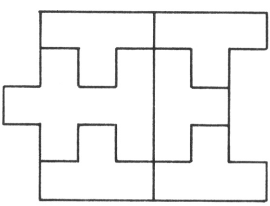
Obr. 113

rychle usoudíme, že útvary A, B, C, D nevedou k řešení. Čtverečky 1, 2, 3 mají jedinou možnost pokrytí útvarem A, podobně čtverečky 1 a 2 útvarem D. Čtvereček 1 je možné pokrýt dvěma způsoby útvarem B, potom čtvereček 2 je možné pokrýt dvěma nebo jedním způsobem (obr. 114).



Obr. 114

Všechna naznačená pokrytí jsou nevyhovující z hlediska dalšího pokrývání daného obrazce, podobně i pro útvar C, kterým se čtvereček 1 vůbec nedá pokrýt. Zůstává jediný útvar  kterým je možné pokrýt daný obrazec, a to jediným způsobem jako na obrázku 115.



Obr. 115

Kategorie MOZ 7

MOZ 7 - I - 1

První dva kupující mohli koupit lístky maximálně za $2 \cdot 6 + 3 = 15$ Kčs. Třetí kupující tedy nakoupil lístky minimálně za 85 Kčs. Třetí kupující za jednu trojici různých lístků zaplatil 11 Kčs, musel tedy zaplatit 88 nebo 99 Kčs. 99 Kčs nevyhovuje.

1. návštěvník koupil lístky po 3 Kčs,

2. návštěvník koupil jeden lístek za 6 Kčs,

3. návštěvník koupil 24 lístků; 8 po 2 Kčs, 8 po 3 Kčs, 8 po 6 Kčs.

MOZ 7 - I - 2

Jeden z možných postupů je podle bodů 1 až 7.

1. Každý s každým hrál jeden zápas. Tabulka tedy musí být symetrická podle úhlopříčky. Doplníme na základě toho údaje v tabulce.

Tento krok „doplnění do symetrie" budeme provádět za každým nově nalezeným údajem.

2. Řádek C: výsledné skóre 3 : 1, je tedy možné ve sloupcích A, B doplnit : 0, : 0.

3. Řádek D: zápas D : A, D nemohl vyhrát (remizovat) nad A (musel by dát víc gólů než 5, v případě remízy 5, ale A dostal za celou soutěž jen 3 góly), D tedy zápas prohrál. Získal však 3 body, ve zbývajících dvou zápasech musel jednou vyhrát a jednou remizovat. Kromě toho D dostal za soutěž 7 gólů, na zbývající zápasy tedy zbývají ještě dva góly. Mohl je dostat s B a s C vyhrát 1 : 0, potom by však s B musel hrát 2 : 2 – nerozhodně, ale B získal za celou soutěž jen 1 bod. Dva góly s C nemohl dostat, 1 gól tedy dostal s B a jeden s C.

4. Řádek B: B získal jen 1 bod – zápasy s C a D tedy musel prohrát – jediná možnost, aby se zachovalo skóre, je B : C = 0 : 1, B : D = 1 : 2.

5. Řádek C: vzhledem ke skóre je jediná možnost C : A = = 1 : 0.

6. Řádek A: vzhledem ke skóre je jediná možnost A : D = = 5 : 1.

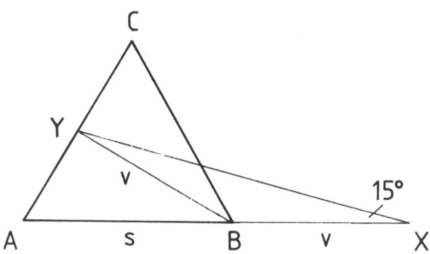
7. Doplníme body, skóre a pořadí.

	A	B	C	D	*b*	*s*	*p*
A	○	1 : 1	0 : 1	5 : 1	3	6 : 3	2.
B	1 : 1	○	0 : 1	1 : 2	1	2 : 4	4.
C	1 : 0	1 : 0	○	1 : 1	5	3 : 1	1.
D	1 : 5	2 : 1	1 : 1	○	3	4 : 7	3.

Úloha má jedno řešení.

MOZ 7 - I - 3

1. ř e š e n í vyplývá z náčrtu na obrázku 116.



Obr. 116

Trojúhelník BXY je rovnoramenný,

$$|\sphericalangle BXY| = \frac{1}{2}(180° - 150°)\,.$$

Podle *usu* sestrojíme trojúhelník AXY. Další postup je zřejmý.

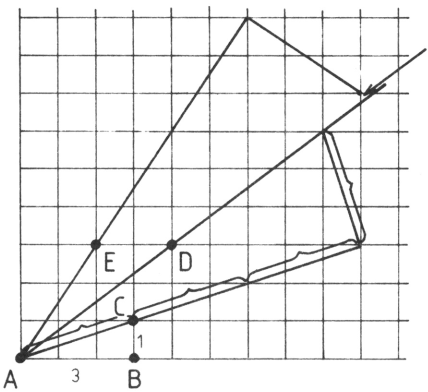
2. ř e š e n í. Ve všech rovnostranných trojúhelnících jsou strana a výška ve stejném poměru. Je tedy třeba rozdělit úsečku XY ve stejném poměru, v jakém je strana a výška v rovnostranném trojúhelníku. Další postup je zřejmý.

MOZ 7 - I - 4

Řešení je postaveno na intuitivním pojetí, že dva úhly určující „stoupání přímky" jsou shodné, když na a dílků „stoupne" každá z nich o b dílků.

V našem případě úhel CAB určuje stoupání „na tři díly stoupne o jeden díl".

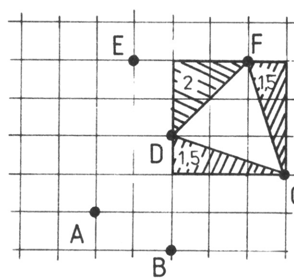
Důkaz, že $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle DAC|$ a $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle EAD|$, je zřejmý z obrázku 117.



Obr. 117

MOZ 7 - I - 5

Označme body v obrázku 118 A, B, C, D, E, F.



Obr. 118

Vypišme všechny trojúhelníky určené těmito body; je jich 20. Čísla v závorkách udávají obsah.

ABC (2,5)	*ABD* (2)	*ABE* (3,5)	*ABF* (5)
	ACD (2,5)	*ACE* (7,5)	*ACF* (7,5)
		ADE (2,5)	*ADF* (1)
			AEF (4,5)
BCD (3)	*BCE* (6,5)	*BCF* (5)	
	BDE (1)	*BDF* (2)	
		BEF (6)	
CDE (2,5)	*CDF* (4)		
	CEF (4,5)		
DEF (3)			

10 % trojúhelníků má obsah 1, 10 % trojúhelníků má obsah 2, 10 % trojúhelníků má obsah 3.

MOZ 7 - I - 6

Jsou dvě řešení: 813 a 819. Jirka z daných údajů nemohl určit přesně číslo domu.

MOZ 7 - II - 1

Hledáme trojciferné číslo xyz. Protože hledáme největší číslo dané vlastnosti, můžeme předpokládat $x \geqq y \geqq z$ (rozmyslete si proč).

Zvolme největší číslo x; $x = 9$, potom aby platilo $9 \cdot y \cdot z$ je třetí mocninou, součin $y \cdot z$ se musí rovnat $3 \cdot 1^3$ nebo $3 \cdot 2^3$ nebo $3 \cdot 3^3$, větší být nemůže.

Nechť $y \cdot z = 3 \cdot 3^3$, potom $y = 9$, $z = 9$, avšak neplatí $9 + 9 + 9$ je prvočíslo.

Nechť $y \cdot z = 3 \cdot 2^3$, potom $y = 8$, $z = 3$, nebo $y = 6$, $z = 4$. $9 + 8 + 3$ není prvočíslo, $9 + 6 + 4 = 19$ je prvočíslo. Hledané číslo je číslo 964.

MOZ 7 - II - 2

Obdobně jako v přípravné úloze MOZ 7 - I - 5 určíme obsahy čtyřúhelníků:

$$S_{ABCD} = 7,5;\ S_{ABCE} = 6;\ S_{ACDE} = 7,5;$$

$$S_{BCDE} = 6;\ S_{ABDE} = 6\ .$$

MOZ 7 - II - 3

Z podmínek 1 až 5 vyplývá, že zákazníci koupili jednu, dvě a tři květiny. Na začátku prodeje bylo v prodejně $(k + 1)$, $(k + 2)$, $(k + 3)$ květin jednotlivých druhů (pořadí není podle ceny). Cena všech květin

$$c = a \cdot (k + 1) + b \cdot (k + 2) + c \cdot (k + 3)\ ,$$

přičemž a, b, c jsou různé prvky množiny $\{2, 5, 6\}$. Výraz můžeme upravit:

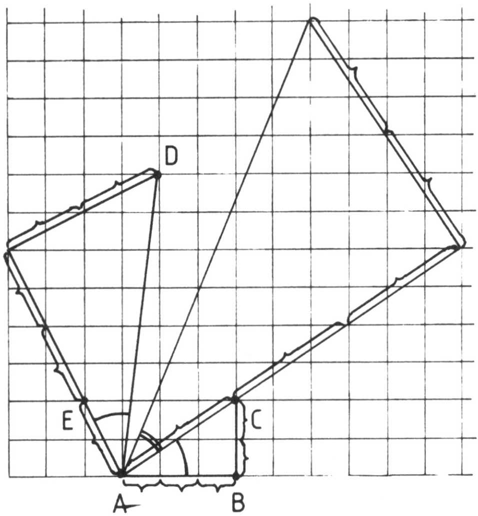
$$\begin{aligned} c &= a \cdot (k + 2) - a + b \cdot (k + 2) + c \cdot (k + 2) + c = \\ &= (k + 2) \cdot (a + b + c) + (c - a) = \\ &= 13(k + 2) + (c - a) \end{aligned}$$

1 500 je číslo tvaru $13n + 5$. Pro žádnou volbu čísel a, c číslo $13(k + 2) + (c - a)$ není ve tvaru $13n + 5$.

Některý údaj prodavačky nebyl tedy pravdivý.

MOZ 7 - II - 4

Řešení je vidět z obrázku 119.



Obr. 119

$|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle EAD|$
$|\sphericalangle CAB| < |\sphericalangle DAC|$

5. ROČNÍK MOZ ŠKOLNÍ ROK 1984/1985

Kategorie MOZ 4

MOZ 4 - I - 1

Řešení každého případu je více. Pro orientaci uvádíme po jednom.

$$4 : 4 + 4 - 4 = 1$$

$$4 : 4 + 4 : 4 = 2$$

$$(4 + 4 + 4) : 4 = 3$$

$$(4 - 4) : 4 + 4 = 4$$

$$(4 \cdot 4 + 4) : 4 = 5$$

MOZ 4 - I - 2

Jestliže mají udělat co nejméně svarů, musí použít co nejvíce pětimetrových dílů, přičemž zbytek 67metrového potrubí musí být dělitelný číslem 3. Nejmenší takový zbytek je 12metrový. Je třeba použít 11 pětimetrových a 4 třímetrové díly.

MOZ 4 - I - 3

Přepravka s ovocem má sedmkrát větší hmotnost než prázdná přepravka. Uvažujeme-li prázdnou přepravku jako 1 díl, je přepravka s ovocem 7 dílů a ovoce 6 dílů hmotnosti.

Ovoce má hmotnost 30 kg, 1 díl je 30 : 6 = 5.

Prázdná přepravka má hmotnost 5 kg.

MOZ 4 - I - 4

1. ř e š e n í . Úlohu řešíme zkusmo. Pokud by každý měl stejnou sumu, tato suma by byla zhruba 6 Kčs. Chlapci měli méně než průměr, děvčata více. Proto zkusme: Chlapci měli 5 Kčs, děvčata 7 Kčs. Nechť chlapců bylo 10, potom děvčat bylo 7 a měli dohromady $10 \cdot 5 + 7 \cdot 7 = 99$ Kčs. To je hodně, takže děvčat muselo být méně. Nechť chlapců je 11, potom děvčat je 6 a dohromady zaplatili $11 \cdot 5 + 6 \cdot 7 = 97$ Kčs.

U stánku bylo 11 chlapců a 6 děvčat.

2. ř e š e n í . Kdyby každý chlapec a každá dívka měli po 5 Kčs, měli by dohromady 85 Kčs. Zbývá $97 - 85 = 12$ Kčs. Každá dívka má o 2 Kčs více než chlapec, čili děvčat by mělo být $12 : 2 = 6$. Zkusme ještě, platí-li $11 \cdot 5 + 6 \cdot 7 = 97$.

U stánku bylo 6 děvčat, každé z nich mělo 7 Kčs, a 11 chlapců, každý z nich měl 5 Kčs.

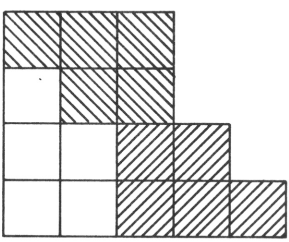
MOZ 4 - I - 5

Je třeba si uvědomit, že motocyklista jezdí stejně dlouho jako cyklisté. Cyklisté se potkají za 1 hodinu.

Motocyklista ujede 20 km.

MOZ 4 - I - 6

Řešení vidíme na obrázku 120.



Obr. 120

MOZ 4 - II - 1

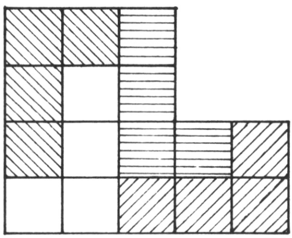
1. ř e š e n í . Řešíme zkusmo. Určíme počet dopisů a pohlednic (dohromady 12) a vypočítáme, kolik korun za ně zaplatíme. Je-li to více než 8 Kčs, musí být dopisů méně, je-li to méně než 8 Kčs, musí být dopisů více.

2. ř e š e n í . Kdyby poslal 12 pohlednic, zaplatil by 6 Kčs. Zaplatil však 8 Kčs, což je o 4 padesátihaléře více, takže poslal 4 dopisy.

Petr poslal 4 dopisy a 8 pohlednic.

MOZ 4 - II - 2

Řešení vidíme na obrázku 121.



Obr. 121

Kategorie MOZ 5

MOZ 5 - I - 1

a) Největší společný dělitel čísel 14, 35, 91 je číslo 7. Vzdálenost mezi stromy bude 7 metrů.

b) Celkový počet stromů v aleji bude 140 : 7 + 1 = 21. V aleji musí vysadit 21 – 4 = 17 stromů.

MOZ 5 - I - 2

Kdyby Jenda udělal oba nákupy, koupil by 3 lízátka a 3 perníky, za které by zaplatil 10,50 Kčs.

1 lízátko a 1 perník je jedna třetina z nákupu a jeho cena je 10,50 Kčs : 3 = 3,50 Kčs.

Protože 2 lízátka a 1 perník (ze zadání úlohy) stály 4,50 Kčs, rozdíl 4,50 Kčs – 3,50 Kčs = 1 Kčs určuje cenu 1 lízátka.

Lízátko stálo 1 Kčs a perník stál 2,50 Kčs.

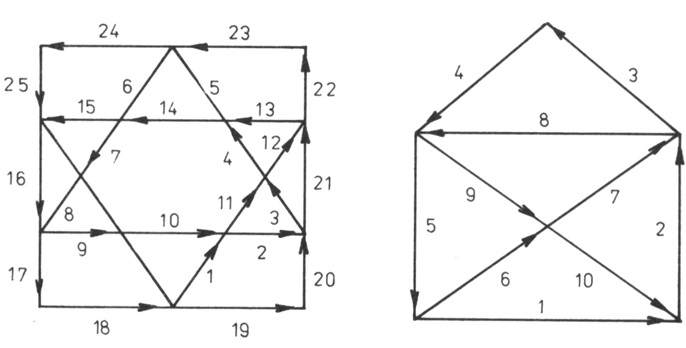
MOZ 5 - I - 3

Všimněme si křižovatky cestiček. Když vejdeme do křižovatky, musíme z ní i vyjít, a protože po každé cestě můžeme jít právě jednou, musí do každé křižovatky ústit sudý počet cest. Výjimku mohou tvořit jen dvě křižovatky, kde cesta začíná a kde končí. Aby se po cestách dalo jít, musí ústit do každé křižovatky sudý počet cest – potom končíme tam, kde jsme začali, neboť v právě dvou křižovatkách ústí lichý počet cestiček, a potom v jedné z nich začínáme a v druhé končíme cestu.

Odpověď pro obrázek A z obrázku 47 ze zadání úlohy zní: Zahrádkář může vyjít z kteréhokoli uzlu na obvodě zahrady (např. obr. 122a).

Obr. 47B ze zadání: Úloha nemá řešení.

Obr. 47C ze zadání: Zahrádkář musí vyjít z uzlu, z kterého vycházejí 3 cesty (lichý počet). Například obr. 122b.



Obr. 122 a) b)

MOZ 5 - I - 4

Hledáme všechny tříprvkové kombinace a sledujeme součet vzdáleností. Pozor, etapa je *okružní*. Vyhovují etapy:

Liberec – Ostrava – Brno – Liberec

340 + 165 + 239 = 744 km

Bratislava – Brno – Praha – Bratislava

142 + 230 + 372 = 744 km

MOZ 5 - I - 5

Řešení

$$\begin{array}{r} 1\ 2\ 1 \\ +\ 1\ 2\ 1 \\ \hline 2\ 4\ 2 \end{array} \quad \text{nebo} \quad \begin{array}{r} 2\ 4\ 2 \\ +\ 2\ 4\ 2 \\ \hline 4\ 8\ 4 \end{array}$$

MOZ 5 - I - 6

Násobky čísel:

3 ... 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, <u>24,</u> 27, 30, 33

4 ... 4, 8, 12, 16, 20, <u>24,</u> 28, 32

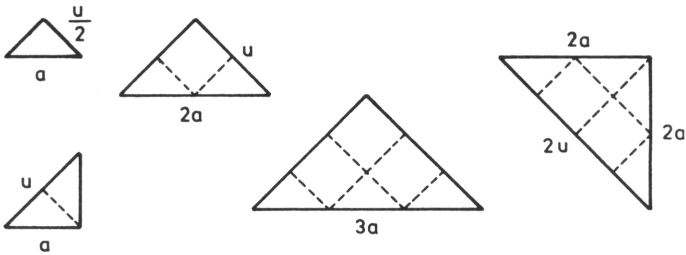
6 ... 6, 12, 18, <u>24,</u> 30

8 ... 8, 16, <u>24,</u> 32

Společný násobek čísel 3, 4, 6, 8 je číslo 24 a to je počet chlapců ve třídě. Další společný násobek je až 48. To je víc, než je žáků ve třídě.

Ve třídě je 24 chlapců.

MOZ 5 - II - 1



Obr. 123

Dohromady 56 trojúhelníků.

MOZ 5 - II - 2

1 kg hrušek stojí o 3 Kčs více než 1 kg jablek. Při zaměněném počtu kilogramů koupených jablek a hrušek by maminka zaplatila o 6 Kčs více, 6 : 3 = 2, čili by koupila o 2 kg hrušek více než jablek. Při původním nákupu však maminka koupila o 2 kg více jablek než hrušek. 2 kg jablek stojí 10 Kčs. Počet kilogramů koupených hrušek a stejný počet kilogramů jablek stojí 62 Kčs – 10 Kčs = 52 Kčs. 1 kg jablek a 1 kg hrušek stojí 5 Kčs + 8 Kčs = 13 Kčs. Potom 52 : 13 = 4.

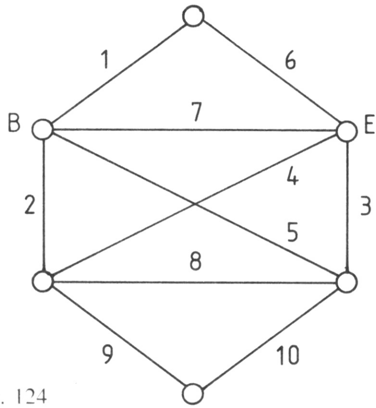
Maminka koupila 4 kg hrušek a 6 kg jablek.

MOZ 5 - II - 3

a) Může, např. 2, 1, 6, 7, 5, 3, 4, 8, 10, 9, 2.

b) Nemůže. Kdyby se nemusel vrátit na původní místo, byla by úloha řešitelná.

c) Když provazochodec přijde k libovolnému sloupu, musí od něj i odejít. U každého sloupu se musí sbíhat sudý počet lan. Výjimky mohou tvořit právě dva sloupy; kde provazochodec začíná a kde končí svou cestu (v našem případě *B* a *E* – obr. 124). V podmínce úlohy však je, že se provazochodec musí vrátit tam, odkud vyšel. Proto se u každého sloupu musí sbíhat sudý počet lan. To není splněno u sloupů *B* a *E*.



Obr. 124

MOZ 5 - II - 4

$A = 0$, potom $S + H = D$ a $D + D = R$, z čehož $D \in \{3, 4\}$,

$$\begin{array}{cccc} 103 & 203 & 104 & 304 \\ 203 & 103 & 304 & 104 \\ \hline 306 & 306 & 408 & 408 \end{array}$$

nebo $A = 9$, potom $D \geqq 5$ a $S + H = D - 1$.

$$\begin{array}{cccccccccc} \multicolumn{2}{l}{D = 5} & \multicolumn{2}{l}{D = 6} & \multicolumn{2}{l}{D = 7} & \multicolumn{4}{l}{D = 8} \\ 195 & 395 & 196 & 496 & 197 & 597 & 298 & 398 & 498 & 598 \\ 395 & 195 & 496 & 196 & 597 & 197 & 598 & 498 & 398 & 298 \\ \hline 590 & 590 & 692 & 692 & 794 & 794 & 896 & 896 & 896 & 896 \end{array}$$

Kategorie MOZ 6

MOZ 6 - I - 1

Odpověď zjistíme pokusem. Nejdříve, kolik by bylo třeba prvních členů „součtu", aby jejich součet byl 111.

– číslo 111: $1 + 2 + 3 + \ldots + 12 + 13 + 14 = 105$

$1 + 2 + 3 + \ldots + 12 + 13 + 14 + 15 = 120$

$105 < 111 < 120$

Vidíme, že součet 111 nemůžeme dostat. Podobně další čísla.

– číslo 222: $1 + 2 + 3 + \ldots + 18 + 19 + 20 = 210$

$1 + 2 + 3 + \ldots + 18 + 19 + 20 + 21 = 231$

$210 < 222 < 231$

$\vdots$

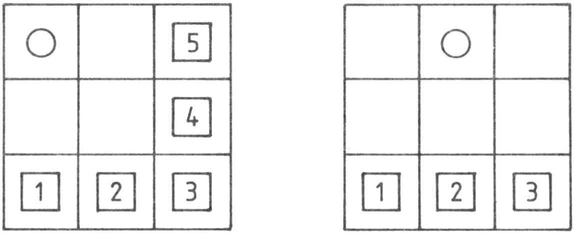
– číslo 666: $1 + 2 + 3 + \ldots + 33 + 34 + 35 = 630$

$1 + 2 + 3 + \ldots + 33 + 34 + 35 + 36 = 666$

Ze součtu je třeba vzít 36 členů, jejichž součet je trojciferné číslo a jehož všechny číslice jsou stejné. Je to číslo 666.

MOZ 6 - I - 2

Označme: 1. král …, 2. král …. Pro polohu 1. krále (obr. 125a) je 5 možností umístění 2. krále. Kdyby 1. král byl v dalším rohu šachovnice, je zase 5 možností. V každém rohu 5, tj. dohromady $4 \cdot 5 = 20$ možností. Pro polohu 1. krále (obr. 125b) jsou tři možnosti umístění 2. krále. Stejnou polohu může 1. král zaujmout čtyřmi způsoby. Dohromady je tedy $4 \cdot 3 = 12$ možností.



Obr. 125 a) b)

Jiná poloha 1. krále na šachovnici neexistuje, kdyby totiž stál ve středu šachovnice, druhý král by ho vždy ohrožoval. Na šachovnici s 3×3 poli je tedy možné postavit dva krále tak, aby se neohrožovali, $20 + 12 = 32$ způsoby.

MOZ 6 - I - 3

a) 2 dlaždice položené na sebe mají výšku 3 cm. Nejmenší rozměr krychle na paletě je nejmenší společný násobek čísel 15, 8, 3.

$$n(15, 8, 3) = 120$$

Krychle utvořená z dlaždic uložených na paletě bude mít hranu délky 120 cm.

b) V jedné vrstvě je uloženo $8 \cdot 15 = 120$ dlaždic. Vypočítáme počet vrstev: 120 : 1,5 = 80.

V krychli je uloženo $120 \cdot 80 = 9\,600$ dlaždic.

MOZ 6 - I - 4

Z druhé rovnosti zadání plyne, že △ = 1, ○ = 0. Nechť △ = 1. Potom na levé straně první rovnosti zadání je zřejmě napsán součin dvou stejných dvojciferných čísel, která mají číslici na místě desítek rovnou 1 a jejich součin je trojciferné číslo, jehož číslice na místě set se rovná číslici na místě desítek. Této podmínce vyhovuje jen číslo 15.

Platí tedy: △ = 1, ○ = 5, □ = 2.

Nechť ○ = 0. Potom by ale číslo na pravé straně první rovnosti muselo končit 00, ale to není pravda. ○ ≠ 0.

MOZ 6 - I - 5

Všechny možnosti:

P	V	K	A	R	K	V	P	A	R	R	V	K	A	P
P	A	K	V	R	K	A	P	V	R	R	A	K	V	P
P	V	R	A	K	K	V	R	A	P	R	V	P	A	K
P	A	R	V	K	K	A	R	V	P	R	A	P	V	K

Odpověď: a) Fotograf musel udělat aspoň 12 snímků.
b) Voloďa byl vedle Petra 8krát.
c) Aljoša nebyl v prostředku ani jednou, protože by musel být vedle Volodi nebo Voloďa by musel být na kraji.
d) Petr byl uprostřed 4krát.
e) Aljoša byl mezi Petrem a Karlem 8krát, z toho 4krát tak, že byl i vedle nich.

MOZ 6 - I - 6

1. ř e š e n í . Zvolíme si úsečku AB, z níž $\frac{1}{4}$ bude představovat počet ovcí čtvrté skupiny. Úsečka AB představuje počet ovcí stejných skupin po požadované úpravě. Čtvrtou skupinu určuje čtvrtina (jeden díl) úsečky AB, třetí čtvrtinu 16 dílů. K první skupině máme 4 ovce přidat a z druhé skupiny 4 ovce ubrat, v první a druhé skupině bude tedy dohromady 8 dílů. Ze všech skupin jsme utvořili 8 + 16 + 1 = 25 dílů. Těchto 25 stejných dílů představuje počet 200 ovcí.

2. ř e š e n í .

4. skupina	x ovcí
2. skupina	$(4x + 4)$ ovcí
1. skupina	$(4x - 4)$ ovcí
3. skupina	$16x$ ovcí

Dohromady:

$$\begin{aligned} x + (4x + 4) + (4x - 4) + 16x &= 200 \\ 25x &= 200 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Ve čtvrté skupině je 8 ovcí, v třetí skupině je 128 ovcí, v druhé skupině je 36 ovcí a v první skupině je 28 ovcí.

MOZ 6 - II - 1

1. ř e š e n í . Úsudkem. Určíme polovinu ceny kola. Položku 660 korun rozdělíme na 4 části, 660 : 4 = 165. Polovina ceny kola je tedy $165 \cdot 3 = 495$ Kčs. Kolo stojí $2 \cdot 495 = 990$ Kčs.

2. ř e š e n í

polovina ceny kola	x Kčs
třetina poloviny ceny kola	$\frac{x}{3}$ Kčs
dohromady	$x + \frac{x}{3}$ Kčs

$$x + \frac{x}{3} = 660$$

$$\frac{4}{3}x = 660$$

$$x = 495$$

Jízdní kolo stojí 990 Kčs.

MOZ 6 - II - 2

$1 \cdot 1 = 1$
$1 \cdot 2 = 2$
$1 \cdot 3 = 3$
$1 \cdot 4 = 4$
$1 \cdot 5 = 5$
$1 \cdot 6 = 6$

$2 \cdot 4 = 8$
$2 \cdot 5 = 10$
$2 \cdot 6 = 12$

$3 \cdot 3 = 9$
$3 \cdot 5 = 15$
$3 \cdot 6 = 18$

$4 \cdot 4 = 16$
$4 \cdot 5 = 20$
$4 \cdot 6 = 24$

$5 \cdot 5 = 25$
$5 \cdot 6 = 30$

$6 \cdot 6 = 36$

$$6 + 3 + 3 + 3 + 2 + 1 = 18$$

Při házení dvěma hracími kostkami je možné dostat 18 různých součinů.

MOZ 6 - II - 3

V sadu je 9 řad po 10 stromcích. Má-li být mezi řadami mezera 120 cm, můžeme ponechat řady, jejichž vzdálenost je násobkem 120. Tedy 1., 5. a 9. řada (jsou od sebe vzdáleny 360 cm). Jestliže má být v řadě mezi stromky mezera 120 cm, můžeme ponechat stromky, jejichž vzdálenosti jsou násobkem 120. Tedy 1., 4., 7. a 10. stromek. Takže můžeme ponechat 3 řady po 4 stromcích, dohromady 12 stromků.

V novém sadu bude dohromady 7 řad po 7 stromcích, tj. 49 stromků. Zbývá tedy vysadit ještě $49 - 12 = 37$ stromků. Zbývá vysadit 4 nové řady po 7 stromcích a ve 3 řadách doplnit po 3 stromcích, dohromady $4 \cdot 7 + 3 \cdot 3 = 37$.

MOZ 6 - II - 4

Z vlastnosti sčítání vyplývá, že $A = 0$, $Y = 5$, $H = 1$, $1 < B < 5$, $R > 5$ ($R + R$ ... sčítání s přechodem přes desítku). Vyzkoušíme všechny možnosti pro B a R. Vyloučíme případy, kdy pro různá písmena vyjde stejná číslice.

Zbývají tedy 4 řešení:

$$\begin{array}{r} 6\,520 \\ \underline{6\,520} \\ 13\,040 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\,520 \\ \underline{8\,520} \\ 17\,040 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\,530 \\ \underline{8\,530} \\ 17\,060 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\,540 \\ \underline{6\,540} \\ 13\,080 \end{array}$$

Kategorie MOZ 7

MOZ 7 - I - 1

Označíme si jednotlivé sloupce příkladu:

$$\begin{array}{cccccc} \text{f)} & \text{e)} & \text{d)} & \text{c)} & \text{b)} & \text{a)} \\ & P & S & \acute{I} & C & I \\ & P & S & \acute{I} & C & I \\ & P & S & \acute{I} & C & I \\ \hline H & A & F & A & N & I \end{array}$$

$I + I + I = I$, tedy $I \in \{0, 5\}$. Ve sloupcích b), e) nastává přechod přes desítku, tedy

$C \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $P \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Jestliže $I = 0$, sčítání se rozpadne na dvě části.

$C + C + C = AN$, tedy $A \in \{1, 2\}$, $PS + PS + PS = HAF$, tedy $H \in \{1, 2\}$. Nechť $A = 1$, potom $H = 2$. Potom $PS = 21F : 3$, tedy $P = 7$. Tedy

$$\begin{array}{cccccc} & 7 & S & 0 & C & 0 \\ & 7 & S & 0 & C & 0 \\ & 7 & S & 0 & C & 0 \\ \hline 2 & 1 & F & 1 & N & 0 \end{array}$$

$C, F, S, N \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $S = 3$, současně $F = 9$; $C = 6$ a současně $N = 8$. Tedy:

$$\begin{array}{rrrrrr} & 7 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ & 7 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ & 7 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 9 & 1 & 8 & 0 \end{array}$$

Nechť $A = 2$, potom $H = 1$. Potom $P + P + P = 12$, z čehož $P = 4$. Z rovnosti $S + S + S = F$ vyplývá, že $S = 3$, $F = 9$, jiná možnost pro S a F není. Potom pro N vyhovují pouze číslice 1 a 4 a to nemůže být.

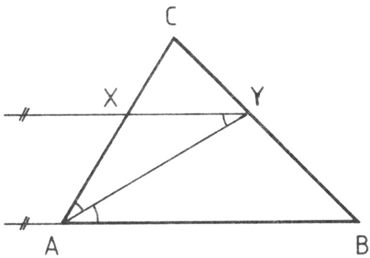
Je-li $I = 5$, potom $H \in \{1, 2\}$. V následující tabulce zapíšeme všechny možné výsledky postupů, které vedou ke zjištění jednotlivých číslic. Zřejmě, jestliže se v řádku bude opakovat už jedna z uvedených číslic, tato možnost není řešením.

I	H	A	P	S	F	C	N
5	1	6	5				
5	1	7	5				
5	2	6	8	9	8		
5	2	6	8	7	2		
5	2	7	9	1	3	6	7
5	2	7	9	1	3	8	5
5	2	7	9	3	9		

Jestliže $I = 5$, úloha nemá řešení.

MOZ 7 - I - 2

Rozbor



Obr. 126

1. $\triangle AYX$ je rovnoramenný $\Rightarrow |\sphericalangle XAY| = |\sphericalangle XYA|$
2. $\leftrightarrow XY \parallel \leftrightarrow AB \Rightarrow |\sphericalangle XYA| = |\sphericalangle YAB|$ (střídavé úhly)

Z 1. a 2. dostáváme $|\sphericalangle XAY| = |\sphericalangle YAB|$, tj. $\leftrightarrow AY$ je osou úhlu CAB.

Konstrukce

1. Sestrojíme trojúhelník ABC
2. o; osa úhlu CAB
3. bod $Y: o \cap BC = \{Y\}$
4. přímka p: $p \parallel \leftrightarrow AB$, současně $Y \in p$
5. bod $X: p \cap \leftrightarrow AC = \{X\}$

MOZ 7 - I - 3

Rozdělíme dvoukoruny na tři hromádky po 27 mincích.

První měření – zjistíme, v které z těchto hromádek je falešná mince. (Odvážíme libovolné dvě z těchto hromádek, má-li jedna menší hmotnost, falešná mince je v ní, jsou-li stejné, falešná mince je ve třetí, nevážené hromádce.)

Druhé měření – rozdělíme hromádku mincí, o níž jsme zjistili, že obsahuje falešnou minci, zase do tří hromádek po 9 mincích atd. Falešnou minci umíme tedy určit po čtvrtém vážení. Zjišťujeme, že trojím vážením ji není možno určit.

MOZ 7 - I - 4

Lukáš nemohl předat vzkaz, protože ve svém druhém tvrzení by lhal, což není možné.

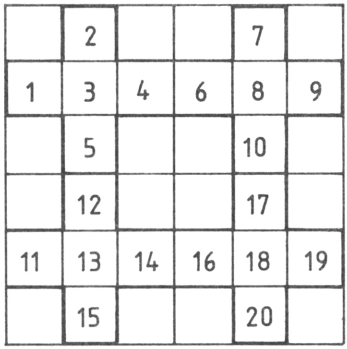
Jestliže předal vzkaz Jakub, který nikdy nemluví pravdu, vzkaz není pravdivý.

Jestliže předal vzkaz Václav, jeho druhé tvrzení je pravdivé, první tedy musí být nepravdivé.

Vzkaz nebyl pravdivý. Z výpovědi se nedá určit, který z bratrů vyřídil maminčin vzkaz.

MOZ 7 - I - 5

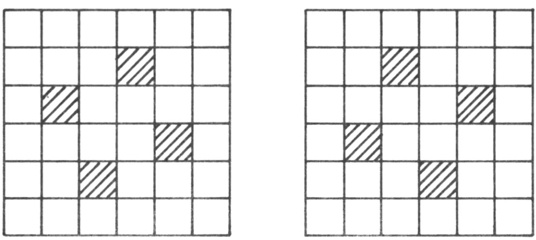
I. část ř e š e n í



Obr. 127

Na šachovnici 6 × 6 se dají umístit 4 nepřekrývající se kříže, a proto bude nevyhnutelné vyšrafovat aspoň 4 čtverečky.

II. část ř e š e n í



Obr. 128 a) b)

Stačí vyšrafovat 4 čtverečky, jak je vidět z obrázku 128.

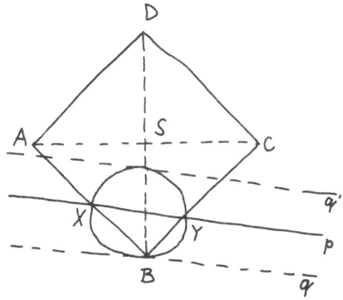
Úloha má dvě řešení.

MOZ 7 - I - 6

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 63 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 61 =$
$= (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 61) \cdot (62 \cdot 63 - 1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 61 \cdot 3\,905$
$3\,905 : 71 = 55$, uvedený rozdíl součinů čísel je dělitelný číslem 71. (Podíl bude $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 61 \cdot 55$.)

MOZ 7 - II - 1

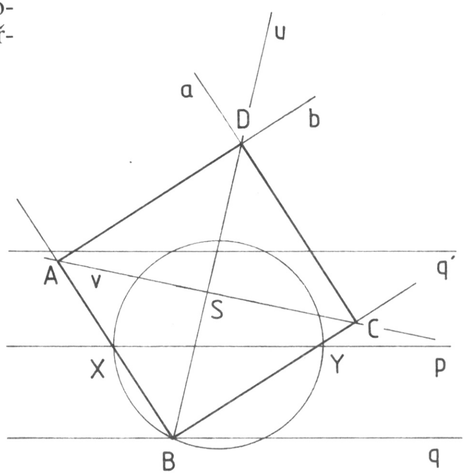
Rozbor (obr. 129):



Obr. 129

Bod B leží na přímce q, resp. q' vzdálené 2,5 cm od p a současně na Thaletově kružnici k nad průměrem XY; bod S (střed čtverce) leží na ose úhlu XBY, protože úhlopříčky čtverce půlí jeho vnitřní úhly a $|BS| =$ 4 cm.

Konstrukce (obr. 130):



Obr. 130

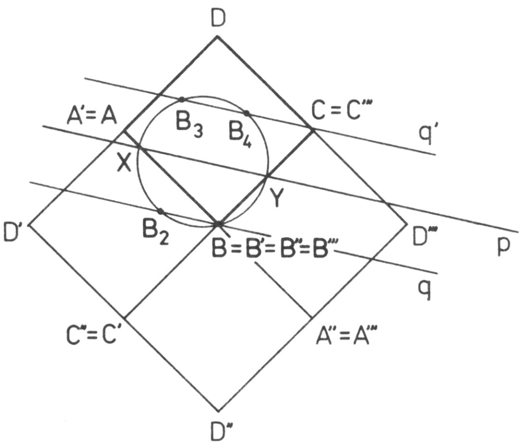
1. Zadání
2. q, q': $|p, q| = |p, q'| = 2,5$ cm
3. k: Thaletova kružnice nad XY
4. bod B: $B \in (q \cap k) \cup (q' \cap k)$
5. polopřímky BX, BY
6. u: osa úhlu XBY
7. S: $S \in u$, současně $|BS| = 4$ cm
8. v: $v \perp u$, současně $S \in v$
9. body A, C: $A \in \leftrightarrow BX \cap v$, $C \in \leftrightarrow BY \cap v$
10. a: $a \parallel AB$, současně $C \in a$; b: $b \parallel BC$, současně $A \in b$
11. bod D: $D \in b \cap a$
12. čtverec $ABCD$

Důkaz

Podle věty *usu* jsou shodné trojúhelníky ABS a BCS a trojúhelníky ABC a DCB. Úhel při vrcholu B je na Thaletově kružnici, je pravý. Zkonstruovaný čtyřúhelník $ABCD$ je čtverec. Protože úsečky SA, SC, SB jsou shodné a $|BS| = 4$ cm, délka úhlopříčky AC čtverce $ABCD$ je 8 cm.

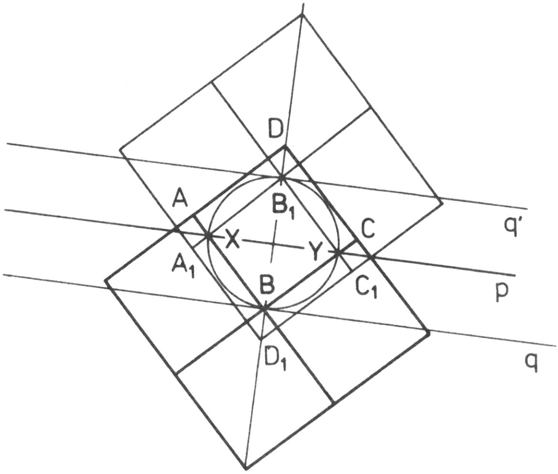
Diskuse

Je-li $|XY| > 5$ cm, potom existují 4 body „B". Je to polohová úloha. Ke každému bodu B existují 4 čtverce, které vyhovují podmínkám úlohy (obr. 131). Dohromady je 16 možností.



Obr. 131

Je-li $|XY| = 5$ cm, úloha má právě 8 řešení (body B jsou 2, viz obr. 132).



Obr. 132

Je-li $|XY| < 5$ cm, úloha nemá řešení.

MOZ 7 - II - 2

$a \mid b$ znamená a dělí b. Jestliže $4 \mid yxy$, potom $4 \mid xy$, jestliže $3 \mid xyx$, potom $3 \mid 2x + y$.

$4 \mid xy$	$3 \mid 2x + y$		$7 \mid xyy$	
xy	$2x + y$		xyy	
12	4	nevyhovuje		
32	8	nevyhovuje		
52	12		522	nevyhovuje
72	16	nevyhovuje		
92	20	nevyhovuje		
24	8	nevyhovuje		
44	12		444	nevyhovuje
64	16	nevyhovuje		
84	20	nevyhovuje		
16	8	nevyhovuje		
36	12		366	nevyhovuje

$4 \mid xy$	$3 \mid 2x+y$		$7 \mid xyy$	
xy	$2x+y$		xyy	
56	16	nevyhovuje		
76	20	nevyhovuje		
96	24		966	
28	12		288	nevyhovuje
48	16	nevyhovuje		
68	20	nevyhovuje		
88	24		888	nevyhovuje

Úloha má jedno řešení $x = 9$, $y = 6$.

MOZ 7 - II - 3

Označme místa na „křižovatkách" jednotlivých chodbiček tak, jako ukazuje následující schéma:

$$
\begin{array}{ccccccc}
m^1 & \rightarrow & n^4 & \rightarrow & o^{10} & \rightarrow & p^{20} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
i^1 & \rightarrow & j^3 & \rightarrow & k^6 & \rightarrow & l^{10} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
e^1 & \rightarrow & f^2 & \rightarrow & g^3 & \rightarrow & h^4 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
a^1 & \rightarrow & b^1 & \rightarrow & c^1 & \rightarrow & d^1
\end{array}
$$

Index u písmene značí počet možností, kterými se myška může dostat do příslušného místa. Porovnej s úlohou MOZ 7 - I - 3 roč. 81/82.

Myší rodina měla 20 členů.

MOZ 7 - II - 4

hmotnost Ivana	x (kg)
hmotnost Haryka	$\frac{2}{5}x$ (kg)
hmotnost otce	$\frac{2}{5}x + x + 50$ (kg)
všichni dohromady	$x + \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}x + x + 50$ (kg)

$$2x + \frac{4}{5}x + 50 = 106$$

$$\frac{14}{5}x = 56$$

$$x = 20$$

Ivan měl hmotnost 20 kg, Haryk 8 kg a otec 78 kg.

6. ROČNÍK MOZ ŠKOLNÍ ROK 1985/1986

Kategorie MOZ 4

MOZ 4 - I - 1

Nejstarší syn: 2 + 2 + 3 + 4 + 4 + 4 + 5 = 24 > 23. Úkol není možné splnit.

Prostřední syn: 1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 23, nově vzniklých hůlek má být 7, proto právě jedna hůlka musí zůstat nepřeřezaná (může to být 6, 5 nebo 4 dm dlouhá hůlka – proč?).

I. Nechť zůstane nepřeřezaná hůlka délky 6 dm, potom z hůlek 5, 8, 4 je třeba získat 1, 2, 2, 3, 4, 5.

5 dm můžeme získat jedině z 8 dm, tj. 3 + 5
4 dm můžeme získat jedině z 5 dm, tj. 1 + 4
2 dm – (dvakrát) můžeme získat jedině ze 4 dm, tj. 2 + 2

II. Nechť zůstane nepřeřezaná 5 dm dlouhá hůlka, potom z hůlek 6, 8, 4 je třeba získat 1, 2, 2, 3, 4, 6.

6 dm můžeme získat jedině z 8 dm, tj. 2 + 6
4 dm můžeme získat jedině ze 6 dm, tj. 2 + 4
1 dm a 3 dm můžeme získat ze 4 dm, tj. 1 + 3

III. Nechť zůstane nepřeřezaná 4 dm dlouhá hůlka, potom z hůlek 6, 5, 8 je třeba získat 1, 2, 2, 3, 5, 6.

6 dm můžeme získat jedině z 8 dm, tj. 2 + 6
5 dm můžeme získat jedině ze 6 dm, tj. 1 + 5
2 dm a 3 dm můžeme získat z 5 dm, tj. 2 + 3

Nejmladší syn: Devět hůlek se požadovaným způsobem získat nedá. Ze 4 hůlek můžeme dostat nejvíce 8 hůlek.

Úkol mohl splnit pouze prostřední syn, a to třemi způsoby:

I. 6, 8 = 3 + 5, 5 = 1 + 4, 4 = 2 + 2
II. 5, 6 = 2 + 4, 8 = 2 + 6, 4 = 1 + 3
III. 4, 8 = 2 + 6, 6 = 1 + 5, 5 = 2 + 3

MOZ 4 - I - 2

a) $13 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5$

Hanka mohla zaplatit knížku jednou kuličkou a dvěma kostkami.

b) $49 = 13 \cdot 3 + 2 \cdot 5$

$49 = 8 \cdot 3 + 5 \cdot 5$

$49 = 3 \cdot 3 + 8 \cdot 5$

Hanka mohla zaplatit panenku třemi způsoby: 13 kuličkami a dvěma kostkami, nebo osmi kuličkami a pěti kostkami, nebo třemi kuličkami a osmi kostkami.

MOZ 4 - I - 3

Na levou zeď musí Gulliver přichystat:

$(500 : 2) \cdot (4 + 1) = 250 \cdot 5 = 1\,250$,

na pravou zeď:

$(500 : 2) \cdot 5 = 250 \cdot 5 = 1\,250$ (jako na levou zeď),

na strop musí Gulliver přichystat:

$(500 : 2) \cdot 6 = 250 \cdot 6 = 1\,500$

Gulliver musí přichystat dohromady $1\,250 + 1\,250 + 1\,500 = 4\,000$ kamenů.

MOZ 4 - I - 4

Křížovku můžeme doplnit v pořadí:

1. řádek .... poslední číslice 3
3. řádek .... poslední číslice 6
sloupec B ...... číslo 102
sloupec C ...... číslo 396
sloupec A ...... možnosti: 229, 458, 687, 916, s přihlédnutím k podmínce 3. řádku vyhovuje jen 458
sloupec D 7
2. řádek .... kontrola - číslo 5 097 je dělitelné 3

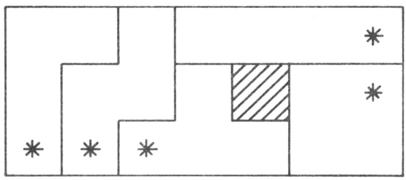
MOZ 4 - I - 5

1. Na místě miliónů musí být číslo 5.
2. Dále stačí použít číslice sestupně, tj. 5 984 310, a protože při dělení deseti nemá být zbytek nula a hledané číslo má být co největší, zaměníme číslice 0 a 1.

Řešení: 5 984 301.

MOZ 4 - I - 6

Úloha má jedno řešení. Viz obrázek 133.



Obr. 133

MOZ 4 - II - 1

Nejmenší takové šesticiferné číslo je 205 789, nejmenší takové sudé číslo je 205 798.

MOZ 4 - II - 2

a) Na polepení přední a zadní stěny $8 \cdot 2 = 16$,
b) na polepení dolní, horní a bočních stěn $9 \cdot 4 = 36$,
c) na polepení tunelu zevnitř $3 \cdot 4 = 12$.
Dohromady 64 samolepek, zůstalo mu 36 samolepek.

Kategorie MOZ 5

MOZ 5 - I - 1

1. postup: Sestavíme tabulku násobků 54 a 51 a budeme pozorovat rozdíly:

N_{54}	54	108	162	216	270	324	378	432	486	540	594
N_{51}	51	102	153	204	255	306	357	408	459	510	561
R	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33

Hledané číslo je v posledním sloupci: 594

2. postup: Označme hledané číslo c.

$$c = 51k + 33$$

$$c = 54n$$

Potom

$$51k + 33 = 54n$$

$$51k + 33 = 51n + 3n$$

$$n = 17 \cdot (k - n) + 11$$

Nejmenší hodnotu c dostaneme při nejmenším n, čili když $k - n = 0$. Potom $n = 11$, $c = 54 \cdot 11 = 594$, $594 : 51 = 11$, zb. 33.

Hledané číslo je 594.

MOZ 5 - I - 2

	1	2	3
a	4	4	2
b	8	5	0
c	8	9	9

b) poslední číslice v řádku bude 0

c) 999 – 100 = 899

1) 888 – 400 = 488

a) 244 odzadu 442

2) 4 + 5 = 9

3) vyšlo 209

MOZ 5 - I - 3

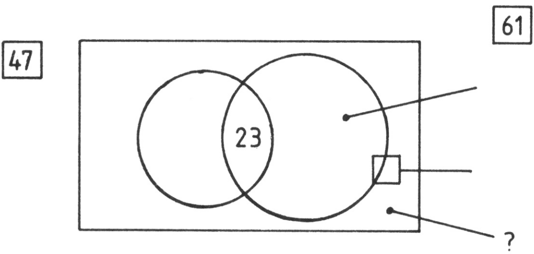
1. postup

1. přítomných 96
2. mimo podezření 61
3. zaměstnanců 47
4. zaměstnanců mimo podezření 23

Z 2. a 4. dostáváme počet hostů mimo podezření 61 – 23 = 38. Z 1. a 3. dostáváme počet všech hostů 96 – 47 = 49. Čili počet hostů, kteří nejsou mimo podezření, je 49 – 38 = 11.

Odpověď: 11 hostů není mimo podezření.

2. postup. Pomocí množinového diagramu pro dvě množiny (obr. 134).



Obr. 134

MOZ 5 - I - 4

Je-li $J = 4$, úloha nemá řešení. Je-li $J = 3$, pro A vyhovují dvě číslice, 9 a 8. Je-li $A = 9$, potom pro kterékoli N a O úloha nemá řešení.

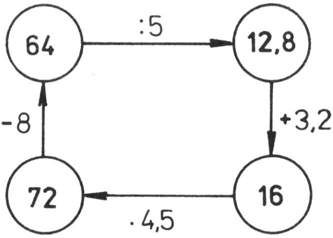
Nechť $J = 3$, $A = 8$. Potom musí být $N = 9$, $O = 1$.

Řešení: $J = 3$, $A = 8$, $N = 9$, $O = 1$.

MOZ 5 - I - 5

Příklad můžeme řešit zkusmo (obr. 135), případně rovnicí:

$$(x : 5 + 3{,}2) \cdot 4{,}5 - 8 = x, \text{ odtud } x = 64.$$



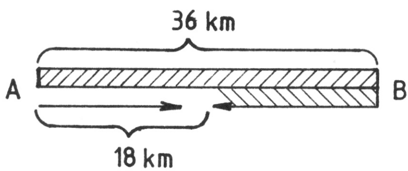
Obr. 135

MOZ 5 - I - 6

Cyklista ujel 18 km za 90 minut, auto ujelo 54 km za 90 – 50 = = 40 minut (obr. 136).

Z toho vypočítáme rychlost auta: za 20 minut ujelo 27 km, za 1 hodinu tedy 81 km.

Rychlost osobního auta Š 100 byla 81 km/h.



Obr. 136

MOZ 5 - II - 1

Řešení tabulkou. V prvním řádku jsou čísla, která při dělení 72 dávají zbytek 50, v druhém řádku násobky čísla 74.

x	122	194	266	338	410	482	554	626	698	770	842
y	74	148	222	296	370	444	518	592	666	740	814
$x - y$	48	46	44	42	40	...					

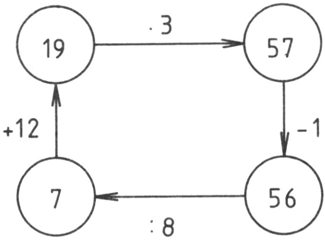
Všimněte si údajů ve třetím řádku tabulky. Po 25 krocích se rozdíl sníží na nulu. Hledané číslo je na 25. místě tabulky. Je to číslo 1 850.

MOZ 5 - II - 2

Je-li ve třídě 35 žáků, ABC odebírá 35 – 20 = 15 žáků. Podobně Kamaráda odebírá 20 žáků. Aspoň jeden z časopisů odebírá 30 žáků, ale 15 + 20 = 35, v průniku tedy musí být 5 žáků.

MOZ 5 - II - 3

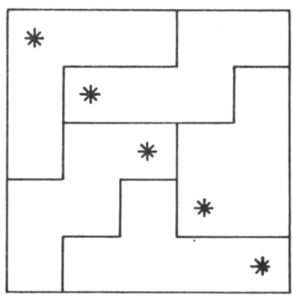
Zkusmo dosazujeme a provádíme naznačené operace (obr. 137).
Ř e š e n í



Obr. 137

MOZ 5 - II - 4

Jedno z řešení je na obrázku 138.


Obr. 138

Ostatní řešení dostaneme otočením o 90°, případně osovou souměrností s osou souměrnosti střední příčkou čtverce.

Kategorie MOZ 6

MOZ 6 - I - 1

a) Ze šesti shodných trojúhelníků složíme rovnoběžník jako na obrázku 139a. Když si vyznačíme velikosti úhlů v těchto trojúhelnících, vidíme, že body X, Y (Z, U) leží na přímce, protože součty velikostí úhlů při nich jsou 180°. Rovnoběžník má stranu $|AB| = 3 + 3 + 3 = 9$ cm, $|BC| = 6$ cm. Má tedy požadovanou vlastnost.

b) 1. Přímka CX je osou úhlu BCD. Potom platí:
$|\sphericalangle XCB| = |\sphericalangle XCY| = 30°$
$|\sphericalangle YCX| = |\sphericalangle CXB| = 30°$ (střídavé úhly)

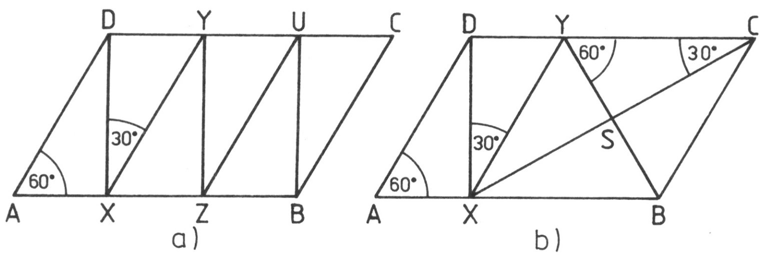
Z toho plyne, že $\triangle XBC$ je rovnoramenný.

Přímka BY je osou úhlu XBC. Potom $\triangle XBS \cong \triangle CBS$ (*usu*).

2. Trojúhelník BCY je rovnostranný, potom $|\sphericalangle YBC| = |\sphericalangle BCY| = |\sphericalangle BYC| = 60°$. $\sphericalangle BYC$ a $\sphericalangle XBS$ jsou střídavé, z toho plyne $\triangle BCS \cong \triangle YSC$.
3. $\triangle XSY \cong \triangle CSY$ (*sus*)
4. $\triangle XYD \cong \triangle XYS$ (*usu*)
5. $\triangle XYD \cong \triangle DAX$ (*usu*)

$$\triangle AXD \cong \triangle YDX \cong \triangle YSX \cong \triangle BSX \cong \triangle BSC \cong \triangle YSC$$

Trojúhelníky jsou pravoúhlé, další dva úhly jsou 30° a 60°. Délky stran jsou 6 cm, 3 cm a $3 \cdot \sqrt{3}$ cm.



Obr. 139

MOZ 6 - I - 2

Na každou stěnu potřebujeme 8 kusů. tj. $6 \cdot 8 = 48$ kusů, na každou „díru" potřebujeme 4 kusy, tj. $6 \cdot 4 = 24$ kusů.

$100 - 48 - 24 = 28$

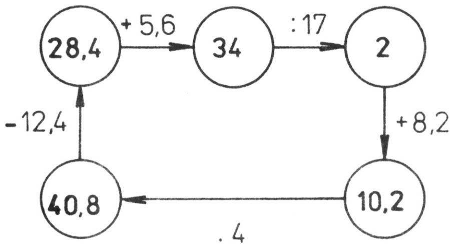
Davidovi zůstalo 28 samolepek.

MOZ 6 - I - 3

Příklad je možné řešit pokusem (obr. 140) nebo rovnicí.

$$[(x + 5,6) : 17 + 8,2] \cdot 4 - 12,4 = x$$

$$x = 28,4$$



Obr. 140

MOZ 6 - I - 4

3. číslo označme x, potom 1. číslo je $x - 5$; 2. číslo je $x - 10$; 4. číslo je $x - 2$; 5. číslo je $x - 19$. Jejich součet je:

$$x + (x - 5) + (x - 10) + (x - 2) + (x - 19) = 5x - 36$$

Přitom součet všech čísel má být $\frac{1}{4}$ z $256 = 64$. Tedy $5x - 36 = 64$, potom $5x = 100$, $x = 20$. Tato čísla jsou v pořadí: 15, 10, 20, 18, 1. Číslům přiřadíme písmena a dostaneme město Nitra.

MOZ 6 - I - 5

Hledáme taková dvě čísla A, B (čtyřciferné a pěticiferné), aby obsahovala každou číslici 1 až 9 právě jednou a přitom byl jejich součin co největší.

Aby to platilo, musí mít čísla A, B na prvním místě číslici 9 a 8 a na druhém místě číslici 7 a 6. Jsou však dvě možnosti: $A = 97-$, $B = 86-$, nebo $A = 96-$, $B = 87-$.

V součinu $97- \cdot 86- = 8342-$ a $96- \cdot 87- = 8352-$ nám vyhovuje větší součin, tedy čísla 96– a 87–.

Jako další číslice použijeme největší ze zbývajících, tedy 5 a 4. Porovnáme součiny $965- \cdot 874- = 843410-$, $964- \cdot 875- = = 843500-$. Výhodnější je druhý z nich.

Největší ze zbývajících čísel jsou 2 a 3. Číslice 2 a 3 napíšeme na čtvrté místo v číslech A, B.

Porovnáme součiny $9643- \cdot 8752- = 84395536-$ a

$9642- \cdot 8753- = 84396426-$.

Výhodnější je druhý z nich. Poslední číslici 1 můžeme přidat jednomu nebo druhému číslu.

Porovnáme součiny $96421 \cdot 8753 = 843973013$ a

$9642 \cdot 87531 = 843973902$.

Karel má telefonní číslo 9642 a Vladimír 87531.

(Jestliže jste úlohu řešili „jen úsudkem”, mohli jste dojít k výsledku $8642 \cdot 97531$. V čem byl váš úsudek chybný?)

MOZ 6 - I - 6

Označíme počty bodů, které získali chlapci, počátečními písmeny jejich jmen. Čárkou označíme počet bodů získaných druhým členem hlídky. Potom ze zadání:

$$J = D + 10$$
$$D = P + 20$$
$$R = R' - 5$$
$$E = E' - 7 \cdot 5 = E' - 35$$
$$K = K' - 2 \cdot 5 - 5 \cdot 10 = K' - 60$$

Dále víme, že $R' + E' + K' = 380$ (lepší z dvojice). Potom $P + D + J = P + P + 20 + P + 30 = 3P + 50$, $3P + 50 = 380$, tedy $P = 110$.

Potom Petr získal 110 bodů, Dušan 130, Jožka 140 bodů. Nejlepší byl Jožka, byl tedy v hlídce s Karlem, potom Karel získal $140 - 60 = 80$ bodů.

Dále jsou dvě možnosti:

a) Emilův partner je Dušan, potom Emil získal $130 - 35 = 95$ bodů, a partner Rudy je Petr, potom Ruda získal $110 - 5 = 105$ bodů, nebo

b) partner Emila je Petr, potom Emil získal $110 - 35 = 75$ bodů, a partner Rudy je Dušan, potom Ruda získal $130 - 5 = 125$ bodů.

Úloha má dvě řešení:

a) I. místo: Dušan 130 a Emil 95, dohromady 225 bodů.
II. místo: Jožka 140 a Karel 80, dohromady 220 bodů.
III. místo: Petr 110 a Ruda 105, dohromady 215 bodů.

b) I. místo: Dušan 130 a Ruda 125, dohromady 255 bodů.
II. místo: Jožka 140 a Karel 80, dohromady 220 bodů.
III. místo: Petr 110 a Emil 75, dohromady 185 bodů.

MOZ 6 - II - 1

3. číslo označíme x, 1. číslo je potom $x - 13$, 2. číslo je $x + 3$, 4. číslo je $x + 1$ a současně 1. číslo je osmina 4. čísla, tj.

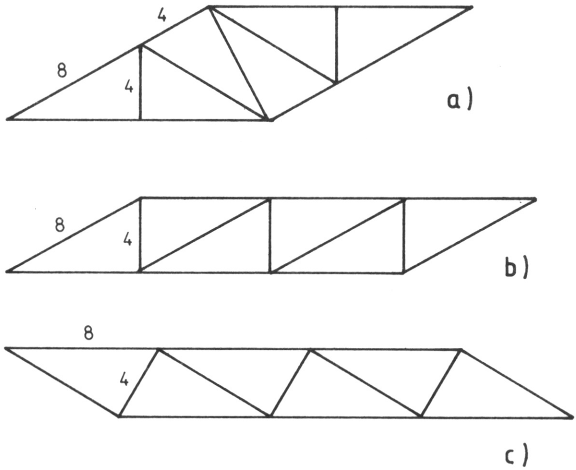
$x - 13 = \frac{1}{8}(x + 1)$, potom $x = 15$.

Čísla v pořadí jsou 2, 18, 15, 16 a město jim příslušející je Brno.

MOZ 6 - II - 2

Jsou tři možnosti rovnoběžníků s danou vlastností (obr. 141). Rovnoběžník můžeme sice dostat i jiným přiložením trojúhelníků mezi „dvěma krajními", ale vždy vytvoří stejný rovnoběžník – nepovažujeme je tedy za různé.

Obr. 141



MOZ 6 - II - 3

Jediné řešení až na pořadí sčítanců je

$$\frac{5}{6} + \frac{2}{3} + \frac{4}{1} - \frac{1}{2} = 5.$$

MOZ 6 - II - 4

Číslo, které si myslíme, můžeme zapsat jako

$$1\,000a + 100b + 10c + d,$$

kde a, b, c, d jsou přirozená čísla menší než 10, $a \neq 0$. Potom ze zadání:

$$a + b + c + d = 10a + b, \text{ jestliže } c < 5 \tag{1}$$

nebo

$$a + b + c + d = 10a + b + 1, \text{ jestliže } c \geqq 5 \tag{2}$$

Z (1) určíme $9a = c + d$, potom $a = 1$, protože je-li $a = 2$, pak $c + d = 18$, z čehož $c = d = 9$ a to odporuje podmínkám úlohy. Je-li $a > 2$, postupujeme podobně.

Je-li $a = 1$, pak $c + d = 9$ a z podmínek úlohy $c = 4$, $d = 5$. Druhá číslice je součtem posledních dvou, tedy $b = 9$. Hledané číslo je 1 945.

Z (2) nenajdeme takové c, d, aby vyhovovalo podmínkám úlohy.

Kategorie MOZ 7

MOZ 7 - I - 1

První pondělí v měsíci musí být první den v měsíci. Jinak by následující pondělí nebylo prvním pondělím po první neděli. Podobně poslední sobota v následujícím měsíci musí být posledním dnem měsíce. Jinak by předcházející sobota nebyla poslední sobotou před poslední nedělí.

Počet dní po sobě následujících dvou měsíců může být:

a) 28 + 31 = 59
b) 29 + 31 = 60
c) 31 + 31 = 62
d) 30 + 31 = 61

Protože 1. den v měsíci je pondělí, tak 59. den je středa, 60. den je čtvrtek, 61. den je pátek, 62. den je sobota. Událost se stala tedy ve dvou po sobě jdoucích měsících, které mají 31 dní. To může být buď červenec–srpen, nebo prosinec–leden. V tabulce uvádíme, na který den připadl 1. prosinec a 1. červenec v minulých letech:

	1985	1984	1983	1982	1981	1980	1979
1. 12.	Ne	So	Čt	St	Út	Po	So
1. 7.	Po	Ne	Pá	Čt	Čt	Út	Ne

Začátek cesty byl 1. 7. 1985 a konec cesty byl 31. 8. 1985.

MOZ 7 - I - 2

Dvojciferné násobky čísel 17 a 23 jsou:

17, 34, 51, 68, 85;   23, 46, 69, 92,

konec pásu je tedy 692346923468517.

Poslední skupina je 8 517 a před ní se periodicky opakuje pětice čísel 92 346, 1 981 : 6 = 330, zb. 1.

První číslice pásu je 6.

MOZ 7 - I - 3

Obsah každého z trojúhelníků ABD, BCD, ACD se rovná třetině obsahu daného trojúhelníku ABC. Proto výška každého z těchto trojúhelníků příslušející ke společné straně s trojúhelníkem ABC se rovná $\frac{1}{3}$ výšky trojúhelníku ABC.

Bod D sestrojíme jako společný průsečík tří přímek (rovnoběžných se stranami trojúhelníku ABC ve vzdálenosti $\frac{1}{3}$ příslušné výšky).

Bod D je zřejmě těžištěm trojúhelníku ABC.

MOZ 7 - I - 4

a) Nejvíce 4: $\underline{2}$, $\underline{3}$, 4, $\underline{5}$, 6, $\underline{7}$, 8, 9. Více jich nemůže být, protože mezi 8 po sobě jdoucími čísly jsou aspoň 4 sudá čísla a ta, pokud mezi nimi není dvojka, nejsou prvočísla.

b) Žádné prvočíslo: zvolme např. $a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$. Připočítáme-li k číslu a postupně 2, 3, 4, …, 9, dostaneme jen složená čísla.

MOZ 7 - I - 5

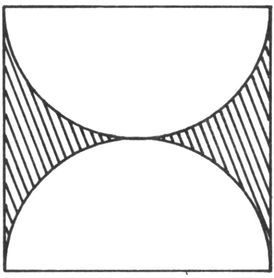
1. hodinu slyšíme $1 + 2 + 3 + 5 = 11$ úderů, 2. – 12 úderů, 3. – 13 úderů, … 12. – 22 úderů. Za 12 hodin uslyšíme 198 úderů. Za $5 \cdot 12$ hodin uslyšíme 990 úderů – jestliže zanedbáme čas, za který slyšíme údery na začátku a na konci tohoto intervalu (proč?) – potom 990 úderů uslyšíme za $59\frac{3}{4}$ hodiny, protože začínáme úderem

1. čtvrthodiny. Víc úderů za $59\frac{3}{4}$ hodiny slyšet nemůžeme, protože kdybychom posunuli začátek poslouchání do „výhodnější pozice" – víc úderů, závěr by byl o toto „zvýhodnění" horší. Potřebujeme slyšet ještě dalších 10 úderů, což můžeme udělat posunutím o $\frac{1}{4}$ hodiny dopředu (tehdy sice uslyšíme až 16 úderů, ale prvních 6 úderů nemusíme poslouchat).

1 000 úderů tedy můžeme slyšet za 60 hodin.

MOZ 7 - I - 6

Uvážíme-li, že doplněk čtyřlístku se skládá ze dvou útvarů U (vyšrafovaných na obrázku 142), potom výpočet je jednoduchý.



Obr. 142

Obsah U $= 6^2 - 2 \cdot \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = 6^2 - 3^2\pi$.

Čtyřlístek Č je doplněk dvou útvarů U do čtverce, obsah Č $= 6^2 - 2(36 - 9\pi) = 36 - 72 + 18\pi = 18\pi - 36 \doteq 20{,}52$ (cm^2).

MOZ 7 - II - 1

Jestliže uvážíme jednu „periodu" kostek: 1 kostka s jedničkou, 2 kostky s dvojkou, ..., 6 kostek se šestkou, pak obsahuje dohromady $1 + 2 + \ldots + 6 = 21$ kostek, na nichž je dohromady $1 + 2 \cdot 2 + + 3 \cdot 3 + \ldots 6 \cdot 6 = 91$ teček.

$$666 : 21 = 31, \text{ zb. } 15$$

666 kostek obsahuje 31 takových celých period a ještě 15 kostek, na nichž je $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 55$ teček. Dohromady je na 666 kostkách $31 \cdot 91 + 55 = 2\,876$ teček.

MOZ 7 - II - 2

Součet obsahů čtyř měsíčků se rovná rozdílu součtu obsahů půlkruhů nad stranami čtverce s obsahem čtverce a obsahu kruhu opsaného čtverci, což je:

$$S = 4 \cdot \frac{\pi r_1^2}{2} + 36 - \pi r^2, \text{ kde } r_1 = 3 \text{ cm a } r = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$S = \frac{4}{2} \cdot 9\pi + 36 - 18\pi = 36$$

Obsah čtyř měsíčků se rovná obsahu čtverce.

MOZ 7 - II - 3

Začneme dělit číslem 37.

300000...0007 : 37 = 810
 40
  30

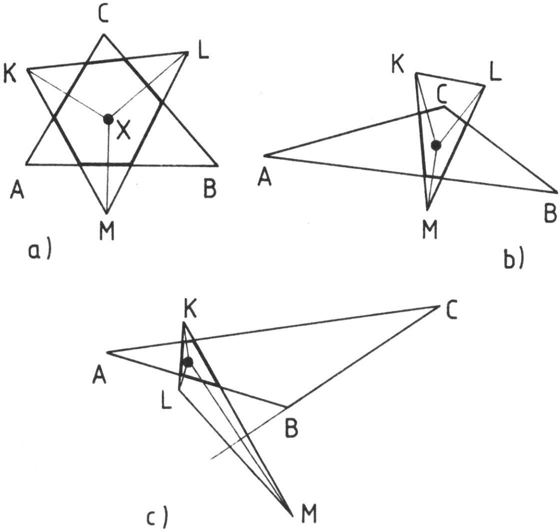
Vidíme, že po 4. nule se začíná v podílu opakovat trojice 810. Jestliže se po $3 \cdot 1 + 1 = 4$ nulách opakuje 1. trojice, pak po $3 \cdot 32 + 1 = 97$ nulách se skončí opakování 32. trojice, dostáváme

..97.98.99.
300... 0 0 0 7 : 37 = 810 ... 810811, zb. 0
 300
  40
  37

Prvních devět číslic podílu je 810810810, posledních devět číslic je 810810811, zbytek je 0.

MOZ 7 - II - 4

Průnikem může být jen šestiúhelník, pětiúhelník a čtyřúhelník závisle na tom, zda je trojúhelník *ABC* ostroúhlý nebo tupoúhlý, a na umístění bodu *X* uvnitř trojúhelníku. (Obr. 143a, b, c.)



Obr. 143