

[dokumenty-07] 20 let matematické olympiády v ČSSR

František Zítek
Matematické klíčky

In: Petr Benda (editor); Jozef Moravčík (editor); Jan Vyšín (editor); František Zítek (editor): [dokumenty-07] 20 let matematické olympiády v ČSSR. 1951-1971. (Czech). Praha: Ústřední výbor matematické olympiády, 1971. pp. 59–60.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405322>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

František Zítek, Praha

MATEMATICKÉ KLÍPKY

Kromě záludností samotné matematiky číhá na účastníky matematické olympiády ještě další protivník, se kterým se ve vyšších kolech MO potýkají - je to časová tíseň. Olympionik má vyřešit zadané úlohy nejen dobře, ale také ve vyměřeném čase. Vedle zásoby věcných znalostí hraje tu tedy důležitou úlohu také schopnost rychle se rozhodovat a umění improvisace.

V časové tísně si pak olympionici - a olympioničky - dovedou vypomoci i bujnou vlastní fantasií. A tak se můžeme na stránkách jejich řešení setkat leckdy s překvapujícími větami a vzorci, které sice řešitel považoval za tak známé a zřejmé, že se ani nepokoušel je dokazovat a odvozovat, ale které většinou ani dokázat nelze, protože prostě neplatí. To je ostatně zjev známý i z vážných odborných prací profesionálních matematiků, kde formulace jako "Zřejmě platí ..." nebo "Snadno se dokáže ..." často uvozují výsledky a tvrzení, jejichž důkaz je příliš složitý nebo se autorovi vůbec nepovedl.

Někdy však bývá situace přece jen zajímavější. V historii naší olympiády se traduje jedna netriviální planimetrická věta, jejíž použití sice umožnilo takřka bleskově rozřešit olympiádní úlohu, ale která nebyla - ani tehdy ani později - dosud dokázána - ale ani vyvrácena - takže dodnes není známo, zda opravdu platí nebo neplatí. Jde o tuto větu:

V rovině je dán konvexní n -úhelník $A_1A_2 \dots A_n$ takový, že délky jeho stran tvoří neklesající posloupnost

$$A_1A_2 \leq A_2A_3 \leq \dots \leq A_{n-1}A_n \leq A_nA_1.$$

Potom uvnitř daného n -úhelníka existuje bod B takový, že velikosti úhlů $\sphericalangle A_i B A_{i+1}$ rovněž tvoří neklesající posloupnost

$$\sphericalangle A_1 B A_2 \leq \sphericalangle A_2 B A_3 \leq \dots \leq \sphericalangle A_{n-1} B A_n \leq \sphericalangle A_n B A_1.$$

Celkem snadno se dokáže, že pro $n = 3$ věta platí (přičemž předpoklady jsou zde splněny automaticky, neboť každý trojúhelník je konvexní a v každém trojúhelníku tvoří délky stran při vhodné volbě označení neklesající posloupnost). V trojúhelníku lze za bod B např. vždy vzít střed kružnice vepsané; je-li daný trojúhelník rovnostranný, je možná jediná tato volba. V "obecném" trojúhelníku je zřejmě více bodů splňujících podmínky věty.

Avšak již pro $n = 4$ je situace mnohem složitější a ani na první pohled celkem přirozeně se nabízející cesta přes vyšetřování geometrického místa bodů, z nichž jsou dvě sousední strany mnohoúhelníka vidět pod stejným úhlem, neslibuje jednoduchý výsledek. Zdá se, že i ve speciálním případě čtyřúhelníků by bylo úplné řešení úlohy (tj. důkaz věty anebo - pokud neplatí obecně - charakterisace čtyřúhelníků, v nichž takový bod existuje) zajímavým a cenným přínosem. Otvírá se tu volné pole působnosti pro hloubavé přátele matematických problémů; najdou se?