František Zítek, Praha

MATEMATICKÉ KLÍPKY

Kromě záludností samotné matematiky číhá na účastníky matematické olympiády ještě další protivník, se kterým se ve vyšších kolech MO potýkají - je to časová tíseň. Olympionik má vyřešit zadané úlohy nejen dobře, ale také ve vyměřeném čase. Vedle zásoby věcných znalostí hraje tu tedy důležitou úlohu také schopnost rychle se rozhodovat a umění improvisace.

V časové tísni si pak olympionici - a olympioničky - dovedou vypomoci i bujnou vlastní fantasií. A tak se můžeme na stránkách jejich řešení setkat leckdy s překvapujícími větami a vzorci, které sice řešitel považoval za tak známé a zřejmé, že se ani nepokoušel je dokazovat a odvozovat, ale které většinou ani dokázat nelze, protože prostě neplatí. To je ostatně zjev známý i z vážných odborných prací profesionálních matematiků, kde formulace jako "Zřejmě platí ..." nebo "Snadno se dokáže ..." často uvozují výsledky a tvrzení, jejichž důkaz je příliš složitý nebo se autorovi vůbec nepovedl.

Někdy však bývá situace přece jen zajímavější. V historii naší olympiády se traduje jedna netriviální planimetrická věta, jejíž použití sice umožnilo takřka bleskově rozřešit olympiádní úlohu, ale která nebyla - ani tehdy ani později - dosud dokázána - ale ani vyvrácena - takže dodnes není známo, zda opravdu platí nebo neplatí. Jde o tuto větu:

V rovině je dán konvexní n-úhelník $A_1A_2 \ldots A_n$ takový, že délky jeho stran tvoří neklesající posloupnost

$$A_1A_2 \leq A_2A_3 \leq \ldots\ldots\ldots\ldots \leq A_{n-1}A_n \leq A_nA_1.$$

Potom uvnitř daného n-úhelníka existuje bod B takový, že velikosti úhlů $\sphericalangle A_iBA_{i+1}$ rovněž tvoří neklesající posloupnost

$$\sphericalangle A_1BA_2 \leq \sphericalangle A_2BA_3 \leq \ldots \leq \sphericalangle A_{n-1}BA_n \leq \sphericalangle A_nBA_1 .$$

Celkem snadno se dokáže, že pro n = 3 věta platí (přičemž předpoklady jsou zde splněny automaticky, neboť <u>každý</u> trojúhelník je konvexní a v <u>každém</u> trojúhelníku tvoří délky stran při vhodné volbě označení neklesající posloupnost). V trojúhelníku lze za bod B např. vždy vzít střed kružnice vepsané; je-li daný trojúhelník rovnostranný, je možná jedině tato volba. V "obecném" trojúhelníku je zřejmě více bodů splňujících podmínky věty.

Avšak již pro n = 4 je situace mnohem složitější a ani na první pohled celkem přirozeně se nabízející cesta přes vyšetřování geometrického místa bodů, z nichž jsou dvě sousední strany mnohoúhelníka vidět pod stejným úhlem, neslibuje jednoduchý výsledek. Zdá se, že i ve speciálním případě čtyřúhelníků by bylo úplné řešení úlohy (tj. důkaz věty anebo - pokud neplatí obecně - charakterisace čtyřúhelníků, v nichž takový bod existuje) zajímavým a cenným přínosem. Otvírá se tu volné pole působnosti pro hloubavé přátele matematických problémů; najdou se?