[dokumenty-08] Dvacet pět let matematické olympiády v Československu

Bohdan Zelinka

Jak pracuje matematik

In: Jozef Moravčík (editor); Jan Vyšín (editor): [dokumenty-08] Dvacet pět let matematické olympiády v Československu. Sborník (Czech). Praha: Ústřední výbor matematické olympiády, 1976. pp. 167–181.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405351

(V)

JAK PRACUJE MATEMATIK

BOHDAN ZELINKA

O tom, jak pracují vědci různých oborů, jsou již mezi lidmi určité vžité představy. Chemik zahřívá různé roztoky v kádinkách, astronom se dívá dalekohledem na hvězdy, anatom pitvá. Tyto představy samozřejmě nevystihují plně činnost těchto vědců, ale alespoň ji jaksi charakterizují. Zeptáme-li se však někoho (laika), jak pracuje matematik, nejspíše nám odpoví, že matematik počítá.

Taková je tedy vžitá představa o práci matematika. Musíme říci, že vystihuje tuto práci podstatně méně než představy výše uvedené o chemicích, astronomech a anatomech. V době, kdy ještě na vysokých školách existovalo umístěnkové řízení, kterýsi průmyslový podnik žádal matematicko-fyzikální fakultu Karlovy univerzity, aby mu přidělila jednoho svého absolventa. Na dotaz fakulty, jak chtějí tohoto absolventa zaměstnat, podnik odpověděl, že ho potřebují jako účetního. Zde se právě projevila ona představa o tom, že matematik je prostě počtář. Je jisté, že účetní musí být zručným počtářem, a je také jisté, že matematik zručným počtářem také obvykle je. Přijmeme-li však matematika na místo účetního, nebude mu sice dělat potíže počítání, zato však si nebude umět hned poradit s „má dáti“ a „dal“. Což o to, naučit se to může také; potom to však bude znamenat, že se přeškolil z matematika na účetního, tedy pověsil své původní povolání na hřebík, což je škoda — studoval matematiku zbytečně. Stalo se také, že rodiče zázračného dítěte násobícího zpaměti hbitě trojmístná (snad i vícemístná) čísla mluvili s jistým docentem matematiky a ptali se ho, zdali by to uměl také. Když docent prohlásil, že nikoli, byli velice pyšní na to, že jejich dítě předčí docenta. Ono ho skutečně předčilo v mechanickém počítání, zdaleka to však neznamenalo, že by se proto také mělo stát docentem. Ano, existovali kdysi řemeslní počtáři. Německy se jim říkalo Rechenmeister, a mnozí z nich se opravdu zasloužili o rozvoj matematiky. Dnes, kdy existují stolní počítací stroje a samočinné počítače, by se takoví lidé neuživili. S pojmem počtář se dnes setkáme pouze u dělostřelectva. Je to voják, jehož úkolem je hbitě vypočítat potřebné prvky střelby. Zde jde tedy o dovednost zručného počítání v podmínkách, kdy není možné brát s sebou kalkulačku ani telefonovat do výpočetního střediska.

Matematik je tedy něco jiného než počtář. A co tedy vlastně dělá? Mnoho matematiků samozřejmě vyučuje, a to skoro na všech typech škol. O této práci zde mluvit nebudeme. Každý z vás jistě viděl učitele matematiky při práci. Řekneme si, v čem spočívá vědecká práce v matematice.

Vědeckou práci matematika můžeme zhruba rozdělit na tři druhy. Jednak je to objevování a dokazování matematických vět, jednak nalézání různých metod matematických postupů, jednak aplikování matematiky v jiných vědách.

Jakým způsobem matematik objevuje matematické věty? V čem je to podobné jako u jiných věd, v čem se to liší? Už jsme zde mluvili o tom, že anatom pitvá. Všichni víme, že například žaludek krávy se skládá ze čtyř částí — bachor, kniha, čepec a slez. Jak anatomové k tomuto objevu dospěli? Představme si, že rozpitváme žaludek jedné krávy a najdeme v něm ony čtyři části. Pokládáme to ovšem za zajímavé. ale spíše by se nám mohlo zdát, že jde o nějakou chorobnou změnu. Rozpitváme-li však žaludky pěti nebo deseti krav, o nichž víme, že nebyly nijak nemocné, a najdeme opět ony čtyři části, napadne nás, že je to tedy něco normálního a že se to vyskytuje u každé krávy. Vyslovíme tedy hypotézu, že žaludek krávy se skládá ze čtyř částí. Zatím je to pouze hypotéza neboli domněnka; na základě pěti nebo deseti případů nemůžeme ještě činit žádné závěry. Rozpitváme-li však sto, dvě stě nebo pět set krav a zjistíme-li, že se čtyři části žaludku vyskytují bez výjimky u všech krav, můžeme už získaný výsledek zobecnit a tvrdit, že to platí pro všechny krávy. Vidíme-li potom někde na louce pasoucí se krávu, řekneme o ní s jistotou, že se její žaludek skládá ze čtyř částí, aniž bychom ji museli pitvat nebo rentgenovat. To je tak zvaná neúplná indukce.

Metody neúplné indukce používá člověk i v běžném životě a často ho tato metoda vede k mylným závěrům. Tak vznikají nespravedlivé předsudky o příslušnících určitých národů nebo povolání. Proto se také lidem cestujícím do ciziny připomíná, aby dobře reprezentovali svou zemi. Jestliže nějaký cizinec dosud neviděl žádného Čecha a náhle se setká s výpravou Čechů chovajících se jako hulváti, učiní z toho neúplnou indukcí závěr, že Češi jsou národem hulvátů. A těžké je potom mu takovýto názor vyvracet.

Matematika se liší od většiny ostatních věd tím, že neúplné indukce neužívá, a to právě proto, že se chce vyvarovat mylných závěrů, k nimž by mohlo při této metodě dojít. Mohli bychom například prozkoumat čísla od 1 do 999 a na základě zkoumání těchto čísel dojít k závěru, že všechna čísla jsou menší než tisíc. To je ovšem velice zjednodušený příklad. Stalo se však, že se v matematické olympiádě vyskytla úloha, v níž je dána jakási funkce proměnné x a mělo se určit, pro která x nabývá hodnot kladných a pro která hodnot záporných. Jeden řešitel dospěl k závěru, že pro celočíselná x nabývá funkce kladných hodnot, pro ostatní hodnot záporných. Šlo samozřejmě o spojitou funkci, takže bylo na první pohled jasné, že toto řešení není správné. Jak toto mylné tvrzení řešitel „dokázal“? Jednoduše. Dosadil $x = 1$, výsledek byl kladný, pak dosadil $x = 1/2$, výsledek byl záporný. „Důkaz“ byl hotov. Taková neúplná indukce je samozřejmě nepřípustná už z toho důvodu, že bylo zkoumáno příliš málo případů. Mohlo se klidně stát i to, že by řešitel dosadil tisíc celočíselných hodnot a vyšla by mu vždy kladná hodnota funkce a stejně tak by v tisíci necelých hodnotách x mohla vyjít záporná funkce. Přesto by tvrzení nebylo správné. Proto se v matematice neúplné indukce nepoužívá.

Matematika bývá nazývána vědou deduktivní na rozdíl od věd induktivních, které používají neúplné indukce. Znamená to, že se matematické věty odvozují tzv. dedukcí z axiómů. Co je to axióm, je vám jistě známo. Jak však ukazuje například americký matematik (maďarského původu) G. Pólya ve své knize Mathematics and Plausible Reasoning, matematik zpravidla nepracuje tak, že by si napsal axiómy a potom dumal, co z nich lze odvodit. I matematik nejprve experimentuje, vyšetří několik případů a na jejich základě vysloví hypotézu. Pravdivost této hypotézy však již neověřuje zkoumáním dalších stovek případů, ale snaží se ji deduktivně dokázat.

Ukažme si to opět na příkladě. Nejde zde o žádný veliký vědecký objev, ale o příklad, který běžně řeší studenti na vysoké škole. Je vzat z knihy I. V. Proskurjakova *Sbornik zadač po linějnoj algebre.*

Nejprve si řekneme něco o tom, co jsou matice. Jsou to určité tabulky čísel, pro něž jsou definovány početní operace podobně jako pro čísla. My se zde omezíme na matice o dvou řádcích a dvou sloupcích, a řekneme si, že máme-li dvě matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

pak jejich součin je definován takto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Umocňování matice přirozeným exponentem je odvozeno z násobení, podobně jako u čísel.

Mějme nyní tento příklad: Máme určit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

pro libovolné přirozené číslo n. Jak přitom postupujeme? Nejprve experimentujeme. Vyzkoušíme několik čísel n, např. 2, 3, 4. Dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na základě těchto výsledků vyslovíme hypotézu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pro každé přirozené n. Pozor, zatím je to pouze hypotéza. Nyní teprve musíme začít přemýšlet, jak tuto hypotézu dokázat.

Na důkaze tohoto tvrzení si můžeme ukázat jednu z důležitých metod matematického dokazování. Je to metoda matematické indukce. O ní jste už také asi slyšeli. Máme-li dokázat, že nějaké tvrzení platí pro všechna přirozená čísla n, dokážeme to nejprve pro $n = 1$ (první indukční krok), potom předpokládáme, že platí pro $n = k - 1$ a z tohoto předpokladu dokážeme, že platí pro $n = k$ (druhý indukční krok). V našem případě máme vlastně již první indukční krok proveden. Stejně jako u čísel i u matic umocnění exponentem 1 značí, že se základ mocniny nemění; je tedy skutečně

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní předpokládejme, že platí tvrzení pro $n = k - 1$, tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k-1} = \begin{pmatrix} 1 & k - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dále platí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & k - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tvrzení tedy platí pro $n = k$, a tím jsme dokázali, že skutečně pro všechna přirozená čísla n máme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Metodu matematické indukce si ukážeme ještě na jednom žertovném příkladě: Kdesi v Orientě je město mudrců. Jeho obyvatelé se vyznačují tím, že vědí všechno na světě kromě jediné věci: žádný z nich neví, zda je jeho manželka nevěrná (o cizích manželkách to ví). Jednoho dne vydal sultán ferman, v němž oznamoval, že v městě mudrců dochází k manželské nevěře, a nařizoval, aby každý muž, jakmile zjistí u své manželky nevěru, tuto manželku ještě týž den zabil. Třicátého dne po vydání fermanu byly všechny nevěrné ženy v městě mudrců zabity. Kolik jich bylo?

Při řešení této úlohy si nejprve dokážeme pomocnou větu: Je-li n počet nevěrných žen v městě mudrců, pak budou zabity n-tého dne po vydání fermanu. (Tato věta má tedy platit pro libovolné přirozené číslo n.) Důkaz provedeme matematickou indukcí. V prvním kroku položíme $n = 1$. Je-li tedy v městě mudrců pouze jedna nevěrná žena, pak její manžel ví, že manželky všech ostatních mužů jsou věrné. Protože však sultánův ferman mluví o tom, že se vyskytuje manželská nevěra, musí být nutně nevěrná jeho manželka. Zabije ji tedy hned první den. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro $n = k - 1$. Nechť nyní počet nevěrných žen je k. Manžel kterékoliv z nich ví celkem o $k - 1$ nevěrných manželkách. V k-tý den uvažuje takto: Je-li moje manželka věrná, pak počet nevěrných žen je $k - 1$. Podle předpokladu by však musely být zabity $(k - 1)$-ho dne, tedy již včera. Poněvadž se tak nestalo, není nevěrných žen $k - 1$, ale k; patří k nim tedy i moje žena. A zabije ji. Pomocí této pomocné věty dojdeme k výsledku, že v městě mudrců bylo třicet nevěrných žen.

Popsali jsme si tedy jeden ze způsobů matematického dokazování. Všechny matematické důkazy se ovšem matematickou indukcí neprovádějí. Někdy můžeme provést důkaz přímý, to jest odvodit větu přímo z axiómů nebo z vět, které jsou již dokázány. Příkladem je důkaz tvrzení, že kosinus šedesáti stupňů je roven jedné polovině. Vycházíme ze známých vět o tom, že velikosti všech úhlů v rovnostranném trojúhelníku jsou rovny šedesáti stupňům a že pata každé výšky v tomto trojúhelníku je středem příslušné strany. Vedeme tedy výšku v rovnostranném trojúhelníku; ta nám rozdělí trojúhelník na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky. Přepona každého z těchto trojúhelníků je stranou původního trojúhelníka a jedna z odvěsen je polovinou této strany. Úhel, který tato odvěsna svírá s přeponou, má velikost šedesát stupňů. Poměr délky této odvěsny k délce přepony, tedy kosinus $60°$, je roven jedné polovině. To byl příklad důkazu přímého.

Někdy provádíme důkaz nepřímý neboli důkaz sporem. Předpokládáme, že dané tvrzení neplatí, a z tohoto předpokladu odvodíme závěr, o kterém je zřejmé, že není pravdivý. Tato metoda se často používá v soudní a kriminalistické praxi. Je to tak zvaný důkaz pomocí alibi (alibi je latinské slovo a znamená jinde). Trestný čin byl spáchán v Praze dne 21. listopadu 1973 ve 14 hodin. Podezřelý z tohoto činu je pan X. Je však prokázáno (např. pomocí svědecké výpovědi), že se pan X dne 21. listopadu 1973 kolem 14. hodiny zdržoval v Brně. Provedeme tedy důkaz neviny pana X sporem. Předpokládejme opak tvrzení, které chceme dokázat: že pan X spáchal onen čin. Z tohoto předpokladu vyplývá, že dne 21. listopadu ve 14 hodin byl pan X současně v Praze i v Brně. Toto tvrzení je však zřejmě absurdní, tedy není pravdivé. Potom však není pravda ani to, z čeho jsme vycházeli, totiž že pan X spáchal zmíněný čin. Dokázali jsme, že pan X je nevinen.

Podobně se užívá důkazu sporem v matematice. Měli bychom například dokázat, že prvočísel je nekonečně mnoho. Kdybychom to chtěli dokazovat přímo, museli bychom buď všechna prvočísla vyjmenovat, nebo alespoň nalézt nějaký vzorec, podle něhož bychom určovali jednotlivé členy posloupnosti všech prvočísel. To by byl tzv. důkaz konstruktivní. Dokázali bychom existenci nějakého objektu tím, že bychom jej sestrojili. To se však zatím nepodařilo. Můžeme však použít důkazu sporem. Víme, že alespoň jedno prvočíslo existuje. Nechť je tedy všech prvočísel konečný počet. Označme je $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Součin všech těchto čísel označme P; číslo P je zřejmě dělitelné všemi čísly $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Zkoumejme číslo $P + 1$. Kdyby toto číslo bylo dělitelné některým z prvočísel $p_1, p_2, \ldots, p_n$, musel by být týmž číslem dělitelný i rozdíl čísel $P + 1$ a P, tedy 1; číslo 1 však není dělitelné žádným prvočíslem. Tedy také číslo $P + 1$ není dělitelné žádným prvočíslem.

Musí být tedy buď samo prvočíslem, zřejmě různým od $p_1, p_2, \ldots, p_n$, nebo není prvočíslem, a pak nutně existuje prvočíslo p různé od $p_1, p_2, \ldots, p_n$, které dělí číslo $P + 1$. Není tedy možné, aby existoval pouze konečný počet prvočísel, musí jich být nekonečně mnoho.

To bylo několik ukázek, jak matematikové provádějí důkazy. Samozřejmě různé metody dokazování se kombinují a některé matematické věty mohou mít důkazy i na několik stránek. Stává se, že je jako nový objev publikován i nový, jednodušší důkaz některé věty, která byla již dříve dokázána. Důkazy lze hodnotit i z hlediska estetiky. Mluvíme o elegantních důkazech jako protikladu k těžkopádným. Je to něco podobného, jako když mluvíme o kráse šachové partie.

Někdy se při dokazování používá též pomocných vět. S tím jsme se setkali už u oné úlohy s městem mudrců. Před dokazováním určité věty se dokáže jiná věta a té se pak použije v důkaze. Pomocné větě se říkává také *lemma* (pozor, je to slovo středního rodu a skloňuje se jako téma nebo panoráma). Taková věta zpravidla nemívá skutečně jiný význam, než že pomáhá při dokazování jiné věty, a proto by nestála za samostatné publikování. Jsou ovšem výjimky; v teorii uspořádaných množin existuje *Zornovo lemma*, které je významnou matematickou větou. Nicméně stále se mu říká lemma, protože se ho používá jako pomocné věty k dokazování jiných vět (a to velmi často, proto je tak významné).

Řekli jsme si, že lemma zpravidla nemívá význam samo o sobě. Dotkli jsme se faktu, že ne každé matematické tvrzení, které je pravdivé, má smysl předkládat jako větu. Vezměme si opět větu, která tvrdí, že všechny úhly v trojúhelníku mají velikost šedesát stupňů právě, když trojúhelník je rovnostranný. Z této věty bychom mohli odvodit tato tvrzení: Jsou-li v trojúhelníku velikosti všech úhlů rovné šedesáti stupňům a jedna z jeho stran má délku jedna, pak všechny jeho strany mají délku jedna. Jsou-li v trojúhelníku velikosti všech úhlů rovné šedesáti stupňům a jedna z jeho stran má délku dvě, pak všechny jeho strany mají délku dvě. A tak dále. Takto bychom mohli pokračovat do nekonečna a dostávali bychom výsledky, které jsou sice pravdivé, ale neříkají nám nic tak významného, abychom je mohli nazývat větami. O tom, co se má nazývat větou a co ne, musí rozhodnout matematik sám na základě svého úsudku a zkušenosti. Proto se zatím nedaří odvozování matematických vět pomocí samočinných počítačů. Vložíme-li do počítače nějaké axiómy a odvozovací pravidla, on nám sice odvodí něco, co je pravdivé, ale nedokáže rozpoznat, zda to má význam jako věta nebo ne. Kdyby nám začal odvozovat výše uvedená tvrzení o trojúhelnících, mohl by pokračovat takto do nekonečna a nic jiného bychom z něho už nedostali.

Promluvme si ještě o definicích. Definování nových pojmů nám vlastně umožňuje zestručnit vyjadřování. Místo abychom říkali „čtyřúhelník, jehož všechny strany jsou stejně dlouhé a jehož všechny úhly jsou pravé", řekneme stručně „čtverec". Při definování zařadíme vždy definovaný objekt do nějaké širší třídy objektů (čtyřúhelníky) a uvedeme vlastnosti, kterými se tento objekt odlišuje od ostatních objektů této třídy (jeho všechny strany jsou stejně dlouhé a jeho všechny úhly jsou pravé).

Než začne matematik pracovat s nějakým pojmem, musí si přesně uvědomit jeho význam, tak aby o každém objektu mohl jednoznačně prohlásit, zda pod tento pojem spadá či nikoliv. Jak by to vypadalo, kdyby se v matematice pracovalo s mlhavými pojmy, nám ukazuje tzv. paradox holohlavého. Jestliže člověku, který není holohlavý, vytrhneme jeden vlas, nestane se tím holohlavým. Z toho můžeme matematickou indukcí odvodit, že člověk, který není holohlavý, se holohlavým nestane ani po vytržení libovolného konečného počtu vlasů, to jest po vytržení n vlasů, kde n je libovolné přirozené číslo. První indukční krok máme vlastně již proveden: pro $n = 1$ to už bylo řečeno v předpokladu. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro $n = k - 1$, tedy, že po vytržení $k - 1$ vlasů se člověk nestane holohlavým. Vytrhneme-li mu další vlas, opět se nestane holohlavým; to jsme předpokládali již na začátku. Bylo mu však vytrženo celkem k vlasů; tedy tvrzení platí pro $n = k$. Z toho vyplývá, že tvrzení platí pro každé přirozené číslo n a tedy člověk, který není holohlavý, se jím ani po vytržení jakéhokoliv konečného počtu vlasů nestane. To ovšem zřejmě není pravda. Kde je tedy chyba? V postupu důkazu jistě ne; princip matematické indukce přece chybný není. Je tedy chyba v tom, z čeho jsme vycházeli. Není pravda, že člověk, který není holohlavý, se jím nestane po vytržení jednoho vlasu.

Nyní se asi divíte, co vám to autor tvrdí. Ale je to skutečně tak. Chceme-li používat matematických metod, musíme si napřed ujasnit smysl pojmů, s nimiž pracujeme. Používáme-li pojmu „holohlavý člověk", musíme tento pojem definovat. Definujme si holohlavého člověka jako člověka, který nemá vůbec žádné vlasy. Potom člověk, který má na hlavě právě jeden vlas, není holohlavý. Vytrhneme-li mu tento vlas, stane se holohlavým. A jakmile jsme se přesvědčili o tom, že nějaké tvrzení třeba jen v jednom případě neplatí, nemůžeme je pokládat za pravdivé. Kdybychom definovali holohlavého člověka trochu šíře, např. jako člověka, který má nejvýše sto vlasů, pak by opět člověk se 101 vlasem holohlavý nebyl, a po vytržení jednoho vlasu by se holohlavým stal. Nelze definovat holohlavého člověka jako člověka, který má málo vlasů; s tak mlhavými pojmy jako „málo" nebo „mnoho" nelze v matematice pracovat. To bychom museli rozhodovat například, zda málo plus jedna se rovná mnoho či málo.

Ukázali jsme si, jak důležitá je přesnost matematických definic. Teď už se asi nebudete divit, že se učitel matematiky zamračí, jestliže mu na otázku, co je to absolutní hodnota, odpovíte, že absolutní hodnota je, když tam není minus.

Poznali jsme také, jak lze vyvrátit určitou hypotézu. Stačí nalézt jediný příklad, kdy tato hypotéza neplatí. Tomu se říká protipříklad neboli krásnou češtinou „kontrabajšpíl“.

Řekli jsme si zde také již dost o větách, hypotézách, lemmatech a důkazech. Nyní se podívejme na jinou stránku práce matematika, na hledání metod určitých matematických postupů. Jestliže se nám podaří detailně rozpracovat určitý matematický postup na jednotlivé kroky na sebe navazující, říkáme tomu algoritmus. Nemá to nic společného s logaritmem, ale vzniklo to z polatinštěného jména středověkého arabského matematika al-Chvárizmího, který jako první popsal postup řešení algebraických rovnic. Příkladem algoritmu může být Eukleidův algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele dvou daných přirozených čísel. Větší číslo dělíme menším; je-li zbytek nulový, je hledaným největším společným dělitelem ono menší číslo. Je-li zbytek nenulový, postupujeme s menším číslem a se zbytkem tak, jako předtím s větším a menším číslem. Takto pokračujeme dále, až nakonec dostaneme nulový zbytek. Potom poslední nenulový dělitel je hledaný největší společný dělitel. Mějme např. čísla 112 a 40. Dělíme 112 : 40, dostáváme zbytek 32. Dělíme 40 : 32, dostáváme zbytek 8. Dělíme 32 : 8, dostáváme zbytek 0. Největší společný dělitel čísel 112 a 40 je tedy 8.

Algoritmy mají význam zejména pro výpočet na samočinném počítači, protože mu dávají návod, jak má postupovat. Snahou je najít vždy co nejjednodušší algoritmus. Přenecháváme-li dřinu strojům, neznamená to, že bychom je měli předřít. Kdybychom se chtěli zvážit na lékárnických vahách, nejenže bychom se nezvážili, ale nezvážili bychom na nich už nikdy nic jiného. Kdybychom chtěli na kalkulačce vypočítat číslo

$2^{64} - 1$, což je známý počet zrnek v úloze o šachovnici, také bychom ničeho nedosáhli, protože kalkulačka nemá tak veliký rozsah. Stejně tak na některé početní postupy by nestačil samočinný počítač. Buď by na ně nestačila kapacita jeho paměti, která také není nekonečná, nebo by výpočet trval příliš dlouho. Jednotlivé početní operace sice počítač vykonává ve zlomcích vteřiny, ale s počtem těchto operací je to jako s počtem zrnek na šachovnici. Čím je postup složitější, tím více počet operací (a tedy i potřebný čas) narůstá. Z tisícin vteřiny se pak mohou stát tisíce let.

Ukázali jsme si Eukleidův algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele dvou daných přirozených čísel. Mohli bychom použít i jiného algoritmu, který nazveme algoritmem nádenickým: brát postupně všechna přirozená čísla od jedné až do menšího z obou čísel, všemi dělit obě daná čísla, vypisovat si ta čísla, kterými jsou obě daná čísla dělitelná, a nakonec z nich vybrat to největší. Jistěže by to bylo mnohem pracnější než Eukleidův algoritmus. A o to tady jde: nalézt způsob nejen jak něco udělat, ale jak to udělat co nejsnáze a co nejrychleji.

Konečně matematikové se zabývají také aplikovanou matematikou. Zkoumají, jak by se matematické objevy daly aplikovat v jiných vědách. O metodách této práce se zde nebudeme šířit; jde zpravidla o kombinaci matematických metod s metodami oboru, v němž se matematika aplikuje. Do aplikované matematiky můžeme zahrnout i zkoumání otázek souvisících s konstrukcí samočinných počítačů. I zde se matematické metody kombinují s metodami technickými.

Zbývá ještě dodat, jak matematik vůbec přichází na to, co by měl hledat a dokazovat. Matematik prostě musí mít nějaký problém, který řeší. Zpočátku tyto problémy dostává od jiných. Je-li vědeckým aspirantem, dává mu problémy jeho školitel. Dále je možno hledat v různých sbírkách neřešených matematických problémů (takovou sbírkou je např. *Collection of Mathematical Problems* od S. M. Ulama), bývají formulovány v monografiích a v článcích matematických časopisů, je možno je získat ústním či písemným sdělením od některého kolegy, třeba i zahraničního. Vyspělejší matematik, který již má přehled o svém oboru, si klade problémy i sám — sám poznává, kde jsou ještě bílá místa, která by bylo třeba vyplnit. A jakmile má problém, začíná jeho vlastní práce. Odhadne, jaké by asi mohlo být řešení problému, vezme si je jako hypotézu a pak se snaží tuto hypotézu dokázat či vyvrátit, jak jsme již o tom mluvili. Podaří-li se mu ji dokázat, je hotov. Podaří-li se mu ji vyvrátit, je o kus blíže k cíli, ví, která cesta je nesprávná. Nepodaří-li se mu ani to, ani ono, může na čas tuto hypotézu odložit a vyslovit jinou, kterou se mu třeba dokázat podaří. Zde jsem mluvil o dokazování vět, ale i při hledání algoritmů je situace obdobná — zkoušejí se různé způsoby a zkoumá se jejich efektivnost.

Ukázali jsme si, jak vypadá práce matematika. Doufám, že někteří z vás si tuto práci zvolí za životní povolání a že se stanou novou generací matematiků, která bude pokračovat v tom, co zde už bylo uděláno.