Korespondenční seminář ÚV MO

Antonín V r b a

Už před mnoha lety vznikl v Praze a později v Bratislavě seminář pro mimořádně úspěšné řešitele z těchto měst, kteří vysoko vynikali nad průměr a běžné olympijské úlohy pro ně byly příliš snadné. Na těchto seminářích se pod vedením pracovníků vysokých škol a vědeckých ústavů řeší úlohy z elementární matematiky vysokého stupně obtížnosti a pracuje v nich každý rok 10 - 15 účastníků. Bezprostředním motivem pro jejich vznik byla snaha po kvalitní přípravě na mezinárodní matematickou olympiádu.

Mimořádní talenti ovšem žijí nejen v metropolích - bývají však handicapováni tím, že často nemají kontakt s jinými kolegy této úrovně a chybějí jim podněty k dalšímu rozvoji. Proto byl ve školním roce 1974/75 založen tzv. korespondenční seminář určený - řekněme - mimořádným venkovským talentům. Zprvu byl organizován tak, že vždy určitý pracovník připravil sérii obtížných úloh, rozeslal ji účastníkům a došlá řešení pak zhodnotil. Časem se však ukázalo, že pro pracovníka, který určité téma připravil, bylo neúnosné pečlivě prohlédnout několik set řešení jednotlivých úloh celé série, takže zpětná vazba někdy fungovala s velkým zpožděním a nedostatečně. Od školního roku 1978/79 byl proto systém zreorganizován. Recenzováním řešení se pravidelně zabývá tým složený převážně z mladých pracovníků a aspirantů MÚ ČSAV, mezi nimi i bývalí vynikající olympionici. Každý si vždy vezme na starost jednu úlohu, došlá řešení doprovodí svými poznámkami a připraví koncept textu, v němž je úloha vyřešena a ze všech stran podrobně komentována. Účastník dostane během měsíce zpět svá opravená řešení spolu s rozmnoženým komentářem.

V současné době je k účasti v korespondenčním semináři zváno každý rok 40 - 50 studentů, účastní se pak asi polovina; sérií bývá během školního roku pět zpravidla po sedmi úlohách. Je potěšitelné sledovat vzrůst kvality řešení mnohých účastníků během průběhu semináře, zejména pokud jde o formulování myšlenek. Jak účastníci, tak pracovníci MO vesměs hodnotí korespondenční seminář ÚV MO vysoce kladně. Připomeňme ještě, že korespondenční semináře standardní obtížnosti s poněkud jinými cíli pořádají i některé KV MO. Zejména korespondenční seminář ve Východoslovenském kraji je velmi úspěšný. Je mu věnován samostatný příspěvek M. Gavalce.

Uvádíme znění všech úloh prvních šesti ročníků korespondenčního semináře ÚV MO. Zvláště upozorňujeme na úlohu 3.7 ročníku 1979/80. Tu se nepodařilo vyřešit žádnému účastníku a v publikaci, odkud byla převzata, je, jak se ukázalo, vyřešena chybně. Ani v okruhu vedení semináře nenašla řešitele, pátrání v literatuře bylo také bezvýsledné. Představuje tedy otevřený problém, a to velmi zajímavý. Zvláště cenným materiálem pro práci matematických kroužků jsou tři série úloh z kombinatoriky ročníku 1976/77. Úlohy jsou komponovány tak, že druhá série jsou vlastně návody k úlohám první série určené řešitelům kteří neuspěli, třetí série pak napovídá ještě více.

1974/75

Číselná teória (zostavil doc. dr. J. Moravčík, CSc.).

1. Určte posledné dve cifry čísla $7^{7^{7^{7}}} - 7^{7^{7}}$

2. Vyšetrite, pre ktoré cifry a ($0 \leq a \leq 9$, celé číslo) možno nejaké číslo

$$\frac{n(n+1)}{2} > 10$$

(n prir. číslo) zapísať v desiatkovej sústave len ciframi a.

3. Nájdite všetky prirodzené čísla x, pre ktoré platí

$$\left[\sqrt[3]{1}\right] + \left[\sqrt[3]{2}\right] + \dots + \left[\sqrt[3]{x^3 - 1}\right] = 400 .$$

4. Dokážte, že pre každé prvočíslo p je číslo

$$\underbrace{11 \dots 1}_{p}\underbrace{22 \dots 2}_{p}\underbrace{33 \dots 3}_{p} \dots \underbrace{99 \dots 9}_{p} - 123456789$$

deliteľné číslom p.

5. Nech a, b, m, n sú prirodzené čísla, $d(a, b) = 1$, $a > 1$. Dokážte, že ak $a^m + b^m$ je deliteľné číslom $a^n + b^n$, potom m je deliteľné číslom n.

6. Nech a, b sú prirodzené čísla, pre ktoré platí: $0 \leq b < a$. Nech ďalej $z_n = an + b$, $n = 0, 1, 2, \dots$, je daná postupnosť prirodzených čísel taká, že pre nejaké m je $d(z_m, a) = d$. Presvedčte sa, či potom pre všetky n platí $d(z_n, a) = d$.

7. Nech $P(x)$ je mnohočlen s celočíselnými koeficientami. Dokážte, že ak číslo d je deliteľom každého z čísel $a_n = 3^n + P(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, potom d je mocnina čísla 2 s celočíselným ex-

ponentom.

8. Dokážte, že súčet $\sum_{k=0}^{s} \binom{n}{2k+1} (1973)^k$, $s = \left[\frac{n-1}{2}\right]$, je pre každé prirodzené n deliteľný číslom 2^{n-1}.

9. Dokážte, že číslo $\sum_{k=1}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$ nie je pre žiadne prirodzené číslo n deliteľné číslom 5.

10. Nech $x_n = (p + \sqrt{q})^n - \left[(p + \sqrt{q})^n\right]$ pre $n = 1, 2, \ldots$. Dokážte, že ak p, q sú prirodzené čísla vyhovujúce nerovnosti $p - 1 < \sqrt{q} < p$, potom $\lim_{n \to \infty} x_n = 1$.

Poznámka: Symbol $[a]$ v úlohách 3, 8 a 10 znamená celú časť čísla a, tj. celé číslo c také, že $c \leq a < c + 1$.

Stereometria (zostavili prof. dr. M. Fiedler, DrSc. a J. Zemánek).

1. Ak je odchýlka každých dvoch stien štvorstena ostrý uhol, potom všetky steny štvorstena sú ostrouhlé trojuholníky. Dokážte.

2. Dokážte, že zo šiestich vnútorných uhlov, ktoré zvierajú steny štvorstena, sú vždy aspoň tri ostré.

3. Body $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sú všetky vrcholy konvexného mnohostena, $d = \max A_iA_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Dokážte, že vzdialenosť každých dvoch bodov tohto telesa je menšia alebo rovná d.

4. V priestore je daný bod P a množina bodov M taká, že jej prienik s každou rovinou prechádzajúcou bodom P je kruh. Dokážte, že M je guľa.

5. V priestore je daná konečná množina bodov taká, že každá priamka prechádzajúca dvoma jej bodmi obsahuje ešte aspoň jeden ďalší bod tejto množiny. Dokážte, že všetky body danej množiny ležia v jednej priamke.

6. Nech M je množina bodov v priestore taká, že ku každému bodu priestoru možno v množine M nájsť práve jeden najvzdialenejší bod. Dokážte, že množina M je jednobodová.

Rovnice a sústavy rovníc (zostavil dr. J. Hojdar).

1. Riešte rovnicu $a(x^2 - a^2) = b(x^2 - b^2)$, kde a, b sú dané reálne čísla. Má táto rovnica vždy reálne riešenie?

2. Určte všetky reálne riešenia sústavy rovníc $x - |y + 1| = 1$, $x^2 + y = 10$.

3. Riešte sústavu rovníc $\cos x + \frac{1}{\cos x} = 9 \operatorname{tg} y$,

$$\sin x + \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} y ,$$

kde x, y sú neznáme.

4. V rovnici $(m + 2)^2x^2 - 2(m^3 - 4)x + n = 0$ s neznámou x sú m, n reálne čísla.

a) Určte všetky čísla m, n, pre ktoré má daná rovnica jediný koreň.

b) Stanovte všetky čísla m, n, pre ktoré sú korene danej rovnice navzájom prevrátené čísla.

5. Určte všetky reálne čísla p, pre ktoré rovnica

$$x^2 - 2(p + 4)x + p^2 + 6p = 0$$

s neznámou x má:

a) oba korene rôzne a záporné;

b) jeden koreň záporný, druhý nezáporný.

6. Riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x + y + z &= a , \\ x^2 + y^2 + z^2 &= b^2, \\ xy &= z^2, \end{aligned}$$

kde a, b sú dané čísla.

Udajte podmienky, ktorým musia vyhovovať čísla a, b, aby čísla x, y, z vyhovujúce danej sústave boli kladné a navzájom rôzne.

7. Je daná rovnica $x^2 + 2px + 2p^2 - 1 = 0$ s neznámou x, kde p je reálne číslo. Nájdite všetky čísla p, pre ktoré má daná rovnica reálne korene, z ktorých žiadny nemá absolútnu hodnotu väčšiu než jedna.

Kombinatorika a kombinatorická geometria (zostavil dr. M. Koman, CSc.).

1. (úloha o deviatkách) Určte nutnú a postačujúcu podmienku pre to, aby k danému prirodzenému číslu existoval násobok, ktorý možno v desiatkovej sústave napísať len pomocou deviatok, tj. má tvar 999 ... 99.

2. (úloha o prirodzených číslach) Zistite, či je medzi ľubovoľnými za sebou nasledujúcimi desiatimi prirodzenými číslami vždy aspoň jedno nesúdeliteľné so zostávajúcimi číslami.

3. (úloha o letiskách) Na každom z 12 letísk štartuje lietadlo

a odlietava na najbližšie susedné letisko. Vzdialenosti medzi letiskami sú navzájom rôzne čísla. Určte maximálny počet lietadiel, ktoré môžu pristáť na jednom letisku.

4. (úloha o lodiach) Na voľnom mori plávajú rozptýlene tri lode L_1, L_2, L_3, ktoré majú rovnakú maximálnu rýchlosť. Na admirálov rozkaz sa majú čo najskôr stretnúť na jednom mieste. Určte najvýhodnejšiu polohu miesta stretnutia S.

Poznámka: Pokúste sa úlohu riešiť tiež pre prípad väčšieho počtu lodí alebo pre prípad rôznych maximálnych rýchlostí.

5. (úloha o červenej ceste) Štvorec C je rozdelený na $4n^2$ zhodných štvorcových polí, ktoré sú biele a čierne, pričom každé dve polia súmerne položené podľa stredu S štvorca C sú rôznej farby. Strany polí zafarbíme červene práve vtedy, keď patria rôzne zafarbeným poliam. Dokážte, že existuje červená cesta spájajúca niektoré dva body ležiace na protiľahlých stranách štvorca C.

6. (1. úloha o šachovnici) Všetky polia ľubovoľnej šachovnice $n \times n$ sú očíslované nezápornými reálnymi číslami tak, že číslo ľubovoľného poľa sa rovná aritmetickému priemeru čísel napísaných na všetkých susedných poliach. Charakterizujte všetky prípustné očíslovania. (Pojem susedného poľa možno chápať dvoma rôznymi spôsobmi.)

7. (2. úloha o šachovnici) Všetky polia šachovnice so 100x100 poliami sú očíslované prirodzenými číslami tak, že čísla na každých dvoch susedných poliach sa líšia najviac o 50. Zistite, či môžu byť všetky polia šachovnice očíslované navzájom rôznymi číslami.

8. (úloha o koľajniciach vláčika) Dráhu pre elektrický vláčik možno zostaviť z úsekov, ktoré majú tvar štvrťkružnice. Bola postavená okružná rovinná dráha (bez križovatiek a nadjazdov). Pri zvolenom zmysle obiehania tvorí n_1 dielcov ľavotočivú zákrutu a n_2 dielcov pravotočivú zákrutu. Dokážte, že čísla n_1 a n_2 sú párne a číslo $n_1 + n_2$ je násobkom čísla 4.

9. (úloha o n bodoch) V rovine je daných n $(n > 4)$ bodov, z ktorých žiadne tri neležia v priamke. Dokážte, že existuje aspoň $\binom{n-3}{2}$ konvexných štvrouholníkov, ktorých vrcholmi sú niektoré z daných bodov.

10. (úloha o n-uholníku) Konvexný n-uholník P_n neobsahuje žiadne tri uhlopriečky, ktoré by prechádzali jediným spoločným vnútorným bodom. Koľko trojuholníkov ohraničujú jeho uhlopriečky?

Poznámka: Pokúste sa túto úlohu riešiť pre štvoruholníky; stačí odhad.

Funkcie a mnohočleny (zostavil doc. dr. J. Moravčík, CSc.).

1. Nech f je funkcia definovaná pre všetky reálne x predpisom $f(x) = \frac{1 - x^2}{x^6 + 4}$. Zistite, či funkcia f nadobúda najväčšiu a najmenšiu hodnotu a v kladnom prípade ich nájdite.

2. Kvadratický trojčlen $f(x) = ax^2 + bx + c$ je taký, že rovnica $f(x) = x$ nemá reálne korene. Dokážte, že rovnica $f(f(x)) = x$ tiež nemá reálne korene.

3. Nájdite prirodzené čísla p, q také, aby koreňmi mnohočlenov $P(x) = x^2 - qx + p$ a $Q(x) = x^2 - px + q$ boli len prirodzené čísla.

4. Dokážte, že mnohočlen $P(x)$ s celočíselnými koeficientami, ktorého absolútna hodnota v troch rôznych celých číslach sa rovná 1, nemá celočíselné korene.

5. Nájdite najmenšie reálne číslo A také, že pre každý kvadratický trojčlen $f(x)$, pre ktorý platí $|f(x)| \leq 1$, ak $0 \leq x \leq 1$, je splnená nerovnosť $f'(0) \leq A$.

6. Určte reálne čísla a, b, c také, že $|f(x)| = |ax^2 + bx + c| \leq 1$ pre $|x| \leq 1$ a súčet $\frac{8}{3}a^2 + 2b^2$ je maximálny.

7. Nech f je reálna funkcia reálnej premennej x taká, že nie je identicky rovná nule a pre každé reálne čísla x, y platí: $f(x) \cdot f(y) = f(x - y)$. Nájdite všetky také funkcie f.

8. Nájdite všetky usporiadané dvojice f, g funkcií reálnej premennej x, ktoré sú definované pre všetky reálne čísla x okrem $-1; 0; 1$ a pre ktoré v každom bode x ich definičného oboru platí: $x\,f(x) - \frac{1}{x}\,g(\frac{1}{x}) = 1$, $\frac{1}{x^2}\,f(\frac{1}{x}) = x^2 g(x)$.

9. Nech $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$. Dokážte, že pre každé $x \in (0; \pi)$ platí: $f(x) > 0$.

10. Nech f a g sú reálne funkcie definované v intervale $(-\infty, \infty)$, pre ktoré platí $f(x + y) + f(x - y) = 2\,f(x) \cdot g(y)$ pri každom reálnom x a y. Dokážte, že ak f nie je identicky rovná 0 a $|f(x)| \leq 1$ pre každé x, potom tiež $|g(y)| \leq 1$ pre každé y.

Číselná teória (zostavil M. Kaukič).

1. Nech a, b sú celé čísla také, že $a^2 + b^2$ je deliteľné číslom 21. Potom $a^2 + b^2$ je deliteľné tiež číslom 441. Dokážte.

2. Súčet piatich celých čísel je rovný nule. Dokážte, že súčet piatich mocnín týchto čísel je deliteľný číslom 15.

3. Nájdite všetky dvojice celých čísel x, y, ktoré vyhovujú rovnici $x^2 - y^3 = 1$.

4. Nájdite najmenšie prirodzené číslo, z ktorého zámenou jeho niektorej cifry nemôžeme dostať prvočíslo. (Skúste riešiť analogickú úlohu pre dve cifry.)

5. Nájdite všetky prirodzené čísla n tej vlastnosti, že ciferný súčet čísla n^2 je rovný 4.

6. Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel tvaru $m^2 + n^2$, kde m, n sú prirodzené čísla. (Návod: Každé prvočíslo tvaru $4k + 1$ možno aspoň jedným spôsobom rozložiť na súčet druhých mocnín dvoch prirodzených čísel.)

7. Je dané $a_1 = 1$, $a_k = \left[\sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}}\right]$; určte a_{1975}. ($[c]$ znamená celú časť čísla c.)

8. Nech $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť pozostávajúca zo všetkých prvočísel. Nech $S(k)$ je súčet všetkých súčinov pozostávajúcich z rôznych prvočísel menších najviac rovných p_k, k prirodzené číslo.

Dokážte, že v rozklade čísla $S(k) + 1$ na prvočinitele sa vyskytuje aspoň k prvočísel.

9. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel taká, že prirodzené číslo k je jej členom práve vtedy, keď jeho ciferný súčet je deliteľný siedmimi. Nájdite

$$\max_{1 \leq n < \infty} (a_n - a_{n-1}) .$$

10. Označme na číselnej osi všetky čísla tvaru $81m + 100n$ (m, n prirodzené čísla) zelenou farbou a ostatné celé čísla červenou farbou. Nájdite na číselnej osi taký bod x, aby ľubovoľné dva celočíselné body symetrické vzhľadom na x boli zafarbené rôznou farbou.

Geometria (zostavili prof. dr. M. Fiedler, DrSc. a J. Zemánek).

1. V priestore je daná množina bodov, ktorej pravoúhlými priemetmi do dvoch rovín sú kruhy. Dokážte, že tieto kruhy majú rovnaké polomery.

2. V štvorci je daných deväť bodov, z ktorých žiadne tri neležia v jednej priamke. Dokážte, že tri z týchto bodov sú vrcholmi trojuholníka, ktorého obsah neprevyšuje $\frac{1}{8}$ obsahu štvorca.

3. V priestore sú dané štyri polpriamky p_1, p_2, p_3, p_4 so spoločným začiatočným bodom, ktoré neležia v žiadnom polpriestore. Dokážte, že platí $\sphericalangle p_1p_2 + \sphericalangle p_2p_3 + \sphericalangle p_3p_4 + \sphericalangle p_4p_1 > 360^\circ$.

4. V rovine je dané nekonečne mnoho bodov, ktorých všetky vzájomné vzdialenosti sú prirodzené čísla. Dokážte, že všetky tieto body ležia v jednej priamke.

5. V rovine sú dané dve bodové množiny M_1, M_2, z ktorých každá má párny počet prvkov a žiadne tri z bodov $M_1 \cup M_2$ neležia v jednej priamke. Dokážte, že v tejto rovine existuje priamka, ktorá neprechádza žiadnym z daných bodov a taká, že po oboch jej stranách leží práve polovica bodov každej z oboch daných množín.

6. Dokážte, že počet hrán mnohostena nemôže byť rovný siedmim.

Funkcie a mnohočleny (vybral doc. dr. J. Moravčík, CSc.).

1. Pre funkciu $f(x) = ax^2 + bx + c$ v intervale $\langle -1; 1\rangle$ platí: $|f(x)| \leqq 1$. Potom pre funkciu $g(x) = cx^2 + bx + a$ v tom istom intervale platí: $|g(x)| \leqq 2$. Dokážte.

2. Dokážte, že funkcia $P(x) = x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$ má v každom bode $x \in (-\infty, \infty)$ kladnú hodnotu.

3. Nech $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ je mnohočlen s celočíselnými koeficientami. Nech a, b, c, d sú navzájom rôzne celé čísla, pre ktoré platí: $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 5$. Dokážte, že neexistuje celé číslo k tak, že $P(k) = 8$.

4. Je daný mnohočlen $P(x)$ s a) prirodzenými koeficientami, b) celými koeficientami. Označme a_n ciferný súčet čísla $P(n)$ v dekadickom zápise pre každé prirodzené číslo n. Dokážte, že existuje číslo, ktoré sa v postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyskytuje nekonečne mnoho ráz.

5. Postupnosť mnohočlenov $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ je definovaná reku-

rentne takto: $P_0(x) = 2$, $P_1(x) = x$, $P_{n+1}(x) = x\,P_n(x) - P_{n-1}(x)$, $n = 1, 2, \dots$. Dokážte, že existujú reálne čísla a, b, c tak, že pre každé prirodzené číslo n platí:

$$(x^2 - 4)\left[P_n^2(x) - 4\right] = \left[a\,P_{n+1}(x) + b\,P_n(x) + c\,P_{n-1}(x)\right]^2.$$

6. Dokážte, že ak funkcia $f(x) = \sin x + \cos ax$ je periodická, potom a je racionálne číslo.

7. Nájdite najmenšiu kladnú hodnotu súčtu $x + y$, ak $(1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} y) = 2$.

8. Je dané číslo $\alpha > 1$. Dokážte, že neexistuje funkcia $f(x) \not\equiv$ konšt. definovaná pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$ tak, aby pre každé reálne a, b platilo $|f(a) - f(b)| \leqq |a - b|^{\alpha}$.

9. Funkcia f definovaná na intervale $\langle 0; 1\rangle$ má nasledujúce vlastnosti: Pre všetky $x \in \langle 0; 1\rangle$ je $f(x) \geqq 0$, $f(1) = 1$. Pre každé x_1, x_2 také, že $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$, $x_1 + x_2 \leqq 1$ platí $f(x_1 + x_2) \geqq f(x_1) + f(x_2)$.

a) Pre každé $x \in \langle 0; 1\rangle$ platí: $f(x) \leqq 2x$. Dokážte.

b) Platí pre každú funkciu f uvedených vlastností tiež $f(x) \leqq 1{,}9x$ v intervale $\langle 0; 1\rangle$?

10. Nájdite všetky spojité reálne funkcie f definované na intervale $\langle 1; \infty)$, ktoré vyhovujú rovnici

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{x + y}$$

pre všetky $x, y \in \langle 1; \infty)$.

Kombinatorika (zostavil dr. M. Koman, CSc.).

1. Známa hra "námorná bitka" sa hrá na štvorcoch zložených z $N = 10 \times 10$ jednotkových štvorčekov. Lietadlová loď je znázornená ako obdĺžnik zložený zo 4 štvorčekov (obdĺžnik 1×4). Môže byť umiestená na ľubovoľnom mieste.

Určte najmenší počet "striel", ktoré zabezpečia a) zasiahnutie, b) potopenie lietadlovej lode. (Predpokládáme, že na hracej ploche je len lietadlová loď.)

Doplnok. Riešte úlohu pre ľubovoľnú štvorcovú hraciu plochu zloženú z $N = k \times k$ štvročekov ($k \geqq 4$).

2. Určte najväčší počet kráľov, ktorých možno rozmiestniť na štvorcovej šachovnici zloženej z N^2 polí tak, aby každý kráľ susedil nanajvýš s jedným ďalším kráľom.

Doplnok. Riešte analogickú úlohu pre iné šachové figúry.

3. Usporiadajte množinu všetkých prirodzených čísel 1, 2, 3, ..., N tak, aby aritmetický priemer žiadnych dvoch čísel sa nerovnal niektorému číslu umiestenému medzi nimi. Napríklad pre $N = 8$ je prípustné poradie 1, 5, 3, 7, 8, 4, 6, 2 a neprípustné poradie 1, 5, 8, 7, 6, 3, 2, 4 (napr. $6 = (8 + 4) : 2$).

4. Zistite, či existuje taká postupnosť P prirodzených čísel (nemusia to byť všetky prirodzené čísla), že každé prirodzené číslo sa dá vyjadriť ako rozdiel práve dvoch členov postupnosti P.

5. V štvorcovej tabuľke s n^2 poliami je zapísaných n^2 čísel (tieto čísla sú tedy usporiadané do tzv. štvorcovej matice), ktorých súčet je kladné číslo. Dokážte, že stĺpce tabuľky možno permutovať tak, aby súčet čísel na uhlopriečke vedúcej z ľavého dolného rohu do pravého horného rohu bol tiež kladný.

6. V každom poli pravouholníkovej tabuľky $m \times n$ je zapísané niektoré prirodzené číslo (tj. celé kladné číslo). Sú dovolené dva druhy operácií:

a) Zdvojenie všetkých čísel niektorého riadku.

b) Odčítanie jedničky od všetkých čísel niektorého stĺpca.

Dokážte, že po konečnom počte operácií možno vždy získať tabuľku, v ktorej všetky čísla sú nuly.

7. V rovine je daných niekoľko červených a niekoľko modrých bodov. Niektoré z nich sú spojené úsečkami. Bod nazveme "labilným", ak viac než polovica bodov, s ktorými je spojený úsečkami, má inú farbu než je farba uvažovaného bodu. Ak existuje aspoň jeden labilný bod, zvolíme niektorý z nich a zmeníme jeho farbu (červenú na modrú alebo obrátene). Dokážte, že po konečnom počte krokov nezostane žiadny labilný bod.

8. V rovine je daných n červených a n modrých bodov, z ktorých žiadne tri neležia v priamke. Dokážte, že je vždy možno zostrojiť n úsečiek, ktoré spájajú dvojice bodov rôznych farieb a sú po dvoch disjunktné.

9. Je daný konvexný mnohouholník M. a) Pre každú trojicu po sebe idúcich vrcholov mnohouholníka M zostrojíme kružnicu prechádzajúcu týmito bodmi. Z nich vyberieme tú, ktorá má najväčší polomer. Dokážte, že mnohouholník M je časťou kruhu ohraničeného touto kružnicou.

b) Pre každú trojicu po sebe idúcich strán mnohouholníka M

zostrojíme kružnicu, ktorá sa dotýka týchto troch úsečiek. Z nich vyberieme tú, ktorá má najmenší polomer. Dokážte, že celá táto kružnica je časťou mnohouholníka M.

10. Je daný konvexný mnohouholník, ktorého časťou nie je žiadny trojuholník s obsahom 1. Dokážte, že tento mnohouholník možno umiestniť do trojuholníka s obsahom 4.

Rovnice a sústavy rovníc (vybral dr. J. Hojdar):

1. Nech a, b, c sú navzájom rôzne reálne čísla. Potom rovnica

$$\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} + \frac{1}{x - c} = 0$$

má vždy reálne riešenie. Dokážte.

2. Rozhodnite, pre ktoré x má zmysel rovnica

$$\log_x 10 + \log_x 100 + \log_x 1000 = \frac{\log_{10} x^3}{1 + \log_{10} x}$$

a nájdite všetky jej riešenia.

3. Určte všetky reálne riešenia rovnice

$$\sqrt{x^2 - p} = x - p ,$$

kde p je dané reálne číslo. Urobte diskusiu vzhľadom na číslo p.

4. Riešte rovnicu

$$x^2 - 6(k - 1)x + 9(k^2 - 2) = 0$$

s neznámou x, ak k je dané reálne číslo.

5. Sú dané rovnice

$$x^2 + px + 1 = 0 ,$$

$$x^2 + x + p = 0 ,$$

kde p je dané reálne číslo. Určte všetky čísla p také, pre ktoré obe rovnice majú spoločný reálny koreň.

6. Sú dané dve kvadratické rovnice

$$x^2 + ax + b = 0 ,$$

$$x^2 + cx + d = 0$$

s reálnymi koeficientami. Nájdite nutné a postačujúce podmienky medzi koeficientami daných rovníc pre to, aby obe rovnice mali jeden spoločný kladný koreň a aby zostávajúci koreň prvej rovnice bol väčší než zostávajúci koreň druhej rovnice.

7. V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 + 2x - 1} = p ,$$

kde p je dané reálne číslo. Urobte diskusiu riešiteľnosti vzhľadom na číslo p.

8. Je daná sústava rovníc $|1 - x| = a$, $|x - y| = b$, $|y - 1| = c$, kde a, b, c sú dané prirodzené čísla. Dokážte, že sústava má buď dve riešenia alebo je neriešiteľná. Určte podmienku riešiteľnosti.

1976/77

Kombinatorika (zostavil dr. M. Koman, CSc.).

1.1. Kocka s hranou k (k je celé kladné číslo) je rozdelená na k^3 jednotkových kociek. Zistite, či možno všetky jednotkové kocky zafarbiť červenou a modrou farbou tak, aby vždy každá kocka susedila práve s dvoma ďalšími kockami tej istej farby. (Kocky sú susedné, ak majú spoločnú stenu.)

1.2. V nekonečnej sieti zhodných štvorcov je zafarbených práve n štvorcov čiernou farbou, ostatné sú biele. To je tzv. nultá generácia. Z k-tej generácie ($k = 0, 1, 2, \ldots$) vznikne $(k + 1)$-tá generácia týmto prefarbením: Každý štvorec $[a, b]$ (a je číslo stĺpca, b číslo riadku, v ktorom štvorec leží) z $(k + 1)$-tej generácie má rovnakú farbu ako väčšina zo štvorcov $[a, b]$, $[a + 1, b]$, $[a, b + 1]$ v k-tej generácii.

a) Dokážte, že v istej generácii zostanú len biele štvorce.

b) Dokážte, že v n-tej generácii sú vždy všetky štvorce biele.

c) Charakterizujte všetky nulté generácie s n čiernymi štvorcami, pre ktoré sa samé biele štvorce po prvý raz vyskytnú v n-tej generácii.

1.3. Hra. Na stole je daných N guľ, z ktorých je a bielych, b červených a c modrých ($N = a + b + c$). Ťahom rozumieme túto výmenu: Zvolíme ľubovoľné 2 gule rôznych farieb, ktoré vymeníme za jedinú guľu zostávajúcej farby. (Napríklad pre $a = 3$, $b = 5$, $c = 8$ môžeme zvoliť guľu bielu a modrú, ktoré odstránime a namiesto nich pridáme červenú guľu. Vznikne nová pozícia $a_1 = 2$, $b_1 = 6$, $c_1 = 7$.) Partia končí, keď už nemožno vykonať žiadnu výmenu.

a) Dokážte, že vo všetkých partiách, ktoré končia tým, že na stole zostane jediná guľa, má táto guľa vždy rovnakú farbu.

b) Určte farbu poslednej gule v závislosti na číslach N, a, b, c.

1.4. Vrcholy pravidelného N-uholníka ($N > 3$) sú ohodnotené číslami $+1$ a -1. (Každému vrcholu je priradené práve jedno z týchto čísel.) Cieľom je určiť súčin všetkých ohodnotení. Je dovolené klásť otázky: Čomu sa rovná súčin ohodnotení zvolených m vrcholov ($N \geqq 2m$).

Určte najmenší možný počet P otázok, ktorý dovoľuje určiť hľadaný súčin všetkých ohodnotení.

1.5. Na množine všetkých postupností zložených z 3000 cifier, z ktorých každá je 1 alebo 2, sú dovolené výmeny ľubovoľných dvoch za sebou nasledujúcich trojíc. Napr. postupnosť

$$112\ \underline{122}\ \overline{212}\ 11\ldots\ldots$$

možno zmeniť na postupnosť novú

$$112\ \overline{212}\ \underline{122}\ 11\ldots\ldots\ .$$

Dve postupnosti nazveme ekvivalentnými, ak jednu možno konečným počtom dovolených výmen zmeniť na druhú.

Určte počet všetkých neekvivalentných postupností.

1.6. Dokážte, že v nekonečnom desatinnom rozvoji Ludolfovho čísla π možno pre každé prirodzené číslo n nesúdeliteľné s číslom 10 nájsť aspoň jeden taký úsek, že prirodzené číslo zapísané v danom poradí číslicami z tohto úseku je deliteľné číslom n.

Napr. pre $n = 17$ je jeden taký úsek v zápise čísla

$$3,141\ \underline{592\ 653}\ ,,,$$

podčiarknutý.

1.7. Medzi všetkými n-cifernými číslami ($n \geqq 2$), v ktorých zápise se nevyskytuje nula, určte také číslo, aby rozdiel tohto čísla a jeho ciferného súčinu bol čo najväčší.

1.8. Je daný ľubovoľný mnohočlen k-teho stupňa

$$a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0 \tag{1}$$

s nezápornými celočíselnými koeficientami $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Postupnosť funkčných hodnôt mnohočlena (1) pre $n = 0, 1, 2, \ldots$ označíme

$$A_0, A_1, A_2, \ldots\ . \tag{2}$$

Postupnosť ciferných súčtov všetkých členov postupnosti (2) označíme

(3) $$c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots\ .$$

Dokážte, že v postupnosti (3) existuje nekonečne mnoho sebe rovných členov.

1.9. Na množine všetkých nezáporných celých čísel je daná operácia ".", ktorá má pre všetky a, b, c nasledujúce vlastnosti:

(1) $$a \cdot b = b \cdot c\ ;$$

(2) $$a \cdot b = c \Rightarrow b \cdot c = a\ ;$$

(3) $$a \cdot b > c \Rightarrow b \cdot c < a \text{ alebo } a \cdot c < b\ .$$

a) Určte hodnoty $0 \cdot 0$; $0 \cdot 1$; $1 \cdot 1$; $0 \cdot 2$.

b) Dokážte, že pre všetky a platí: $0 \cdot a = a$; $1 \cdot a = a + 1$ pre párne a; $1 \cdot a = a - 1$ pre nepárne a.

c) Dokážte, že pre všetky a, b, c platí:

$$a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c\ .$$

d) Určte všetky hodnoty $a \cdot b$ pre $a \leqq 7$, $b \leqq 7$.

e) Ukážte, že existuje najviac jedna operácia s vlastnosťami (1) - (3).

f) Ukážte, že taká operácia existuje, a udajte predpis pre výpočet ľubovoľnej hodnoty $a \cdot b$. Špeciálne vypočítajte $1976 \cdot 366$.

g) Dokážte, že operácia "." je grupovou operáciou na množine všetkých nezáporných celých čísel.

1.10. Je daná ľubovoľná funkcia $y = F(x)$ definovaná pre všetky reálne čísla. Dokážte, že možno určiť také dve funkcie $y = f(x)$ a $y = g(x)$, že

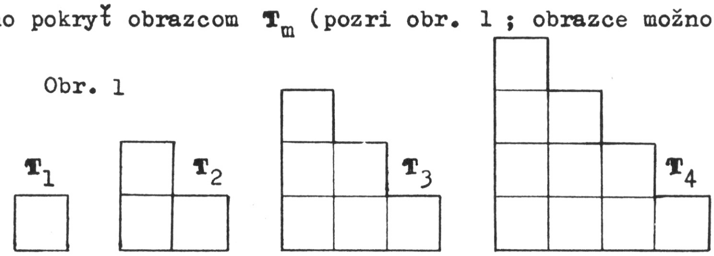
a) $F(x) = f(x) + g(x)$ pre všetky x;

b) graf každej z funkcií $y = f(x)$ a $y = g(x)$ je stredove súmerný. (Stredy súmernosti oboch grafov môžu byť rôzne.)

2.1. Zafarbenie vyhovujúce vlastnostiam z úlohy 1.1 možno uskutočniť práve vtedy, keď je k párne číslo. Dokážte.

2.2. Nech všetky čierne štvorce nultej generácie (pozri úlohu 1.2) možno pokryť obrazcom T_m (pozri obr. 1 ; obrazce možno v sieti

Obr. 1



štvorcov ľubovoľne posúvať, ale nemožno ich otáčať).

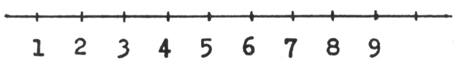
Potom v m-tej generácii sú všetky štvorce biele. Dokážte.

2.3. a) Dokážte tvrdenie z úlohy 1.3a) matematickou indukciou.

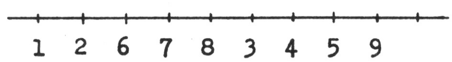
b) Vyhľadajte pre všetky $N \leq 8$ všetky východiskové trojice a, b, c, pre ktoré partie končiace jedinou guľou dávajú bielu guľu.

2.4. Riešte úlohu 1.4 pre prípad $m = 3$. Dokážte, že v tomto prípade je výsledok: $n = 3k \Rightarrow P = k$; $n = 3k + 1 \Rightarrow P = k + 1$, $n = 3k + 2 \Rightarrow P = k + 2$. (Napr. pre $n = 3k$ musíte dokázať: $P \leq k$ a $P \geq k$.)

2.5. Je daná postupnosť 3000 bodov (napr. obrazy čísel 1, 2, 3, ..., 3000 na číselnej osi; obr. 2).



Obr. 2



Obr. 3

Na tejto postupnosti je dovolená operácia výmeny ľubovoľných dvoch za sebou nasledujúcich trojíc bodov. Napr. z vyššie uvedenej postupnosti môžeme získať postupnosť na obr. 3 .

Určte množinu všetkých bodov danej postupnosti, s ktorými možno stotožniť povolenými výmenami ľubovoľne zvolený bod. (Kam možno napr. presunúť z výchozieho postavenia bod 7?)

2.6. Z číslic 0, 1, 2, ..., 9 je zostavená ľubovoľná nekonečná postupnosť

(1) $$a_1, a_2, a_3, \dots .$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n nesúdeliteľné s číslom 10 možno nájsť v postupnosti (1) taký úsek

$$a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+m},$$

že prirodzené číslo zapísané týmito číslicami v uvedenom poradí je deliteľné číslom n.

2.7. Rozdiel čísla N a jeho ciferného súčinu označme $r(N)$. Sú dané dve päťciferné čísla $A = 99911$, $B = 77799$.

Určte čísla C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 tak, aby boli splnené podmienky:

a) $C_0 = B$, $C_5 = A$;

b) dvojice susedných čísel C_i, C_{i+1} $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ sa líšia len v jednej číslici;

c) $r(C_0) \leqq r(C_1) \leqq r(C_2) \leqq r(C_3) \leqq r(C_4) \leqq r(C_5)$.

2.8. Ciferný súčet čísla

a) $13n + 24$;

b) $2n^2 + 13n + 124$

označíme $C_n (n = 0, 1, 2, \dots)$.

Dokážte, že medzi číslami

(4) $$C_0, C_1, C_2, \dots$$

možno nájsť nekonečne mnoho čísel, ktoré sa sebe rovnajú.

2.9. Ak operácia "." má vlastnosti (1) - (3) z úlohy 1.9, potom pre všetky kladné a, b platí

$$a \cdot b = c ,$$

kde c je najmenšie nezáporné číslo, ktoré sa nevyskytuje medzi číslami

$$0 \cdot b, 1 \cdot b, 2 \cdot b, \dots, (a - 1) \cdot b,$$

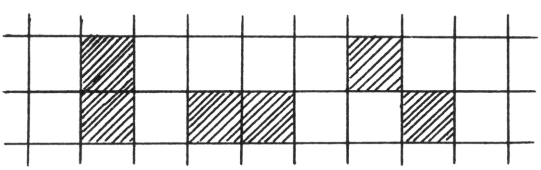
$$a \cdot 0, a \cdot 1, a \cdot 2, \dots, a \cdot (b - 1);$$

dokážte. Dokážte, že obe nerovnosti $a \cdot b > c$, $a \cdot b < c$ vedú k sporu.

2.10. Ukážte, že funkciu $y = |x|$ možno vyjadriť ako súčet dvoch funkcií $y = f(x)$, $y = g(x)$ tak, že každá z funkcií f a g má graf stredove súmerný.

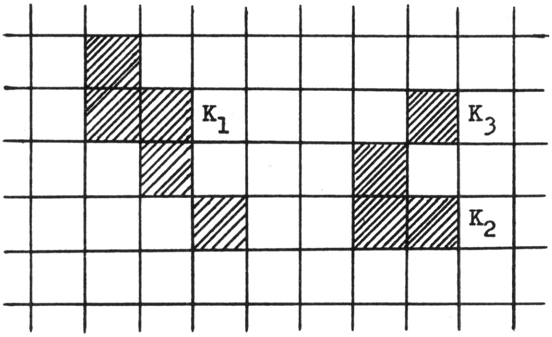
3.1. Ak zafarbenie danej vlastnosti (pozri úlohu 1.1) existuje, potom modrých a červených kociek je párny počet. Dokážte.

3.2. V nekonečnej sieti štvorcov (pozri úlohu 1.2) nazveme dva štvorce susednými práve vtedy, ak nastane niektorá z možností na obr. 4 .



Obr. 4

Množinu M všetkých čiernych štvorcov nultej generácie rozdelíme na komponenty $K_1, K_2, \dots$ tejto vlastnosti: Dva štvorce $A, B \in M$ patria tomu istému komponentu práve vtedy, ak možno dojsť od jedného k druhému postupným prechodom po susedných poliach. Napr. na obr. 5 sa množina čiernych štvorcov rozpadne na tri komponenty.



Obr. 5

Dokážte: Ak množina M obsahujúca n štvrocov sa skladá z jedného komponentu, ktorý nemožno pokryť žiadnym z obrazcov T_1, T_2, ..., T_{n-1} (pozri úlohu 2.2), potom sa v n-tej generácii po prvý raz vyskytnú samé biele štvorce.

3.3. Dokážte (pozri úlohu 1.3):

a) Ak je N párne číslo, potom sú buď všetky a, b, c párne, alebo len jedno párne. V prvom prípade partia nemôže končiť jedinou guľou. V druhom prípade je farba výslednej gule rovnaká ako farba gulí, ktorých je párny počet.

b) Ak je N nepárne číslo, potom sú buď všetky čísla a, b, c nepárne, alebo len jedno je nepárne. V prvom případe partia nemôže končit jedinou guľou. V druhom prípade je farba výslednej gule zhodná s farbou gulí, ktorých je nepárny počet.

3.4. Dokážte, že výsledok úlohy 1.4 je tento: Nech $N = m \cdot d + r$, $0 \leqq r < m$. Ak je m nepárne číslo, potom $r = 0 \Rightarrow P = d$; $r \neq 0$, r párne $\Rightarrow P = d + 2$; r nepárne $\Rightarrow P = d + 1$.

Ak je m párne číslo, potom $r = 0 \Rightarrow P = d$; $r \neq 0$, r párne $\Rightarrow P = d + 1$, r nepárne číslo $\Rightarrow P$ neexistuje.

3.5. Dokážte: Nech $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sú dve n-členné ($n \geqq 1$) postupnosti číslic 1 a 2. Nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby postupnosti α, β boli ekvivalentné (pozri úlohu 1.5), je splnenie týchto podmienok:

$$a_1 + a_4 + a_7 + \ldots = b_1 + b_4 + b_7 + \ldots ,$$

$$a_2 + a_5 + a_8 + \ldots = b_2 + b_5 + b_8 + \ldots ,$$

$$a_3 + a_6 + a_9 + \ldots = b_3 + b_6 + b_9 + \ldots .$$

3.6. Z číslic 0, 1, 2, ..., 9 je zostavená ľubovoľná postupnosť

(1) $$a_1, a_2, a_3, \dots .$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n možno nájsť medzi $n + 1$ číslami zapísanými v uvedenom poradí číslicami $a_1a_2a_3a_4 \dots$ $\dots a_{n+1}$, $a_2a_3a_4 \dots a_{n+1}$, $a_3a_4 \dots a_{n+1}$, atď., a_{n+1} aspoň dve, ktoré pri delení číslom n dávajú ten istý zvyšok.

3.7. Hľadané číslo (pozri úlohu 1.7) má tvar

$$A = 999 \dots 9\,111 \dots 1 .$$

Určte počet deviatok a počet jedničiek a ukážte, že $r(A)$ (pozri úlohu 2.7) je najväčšie možné číslo, tj. pre ľubovoľné n-ciferné číslo B, v ktorého dekadickom zápise

$$B = b_nb_{n-1} \dots b_3b_2b_1$$

nie sú žiadne nuly a $B \neq A$, je $r(A) > r(B)$. Dokážte! (Použite napr. postup naznačený v úlohe 2.7.)

3.8. Dve čísla M, N nazveme podobnými, ak po vyškrtnutí núl v dekadických zápisoch oboch čísel dostaneme to isté číslo. (Napr. 3 074, 3 700 40 sú podobné čísla.)

Dokážte, že medzi funkčnými hodnotami mnohočlenov

a) $13n + 24$;

b) $2n^2 + 13n + 124$

pre $n = 0, 1, 2, \dots$ je nekonečne mnoho navzájom podobných čísel.

3.9. Zostavte si tabuľku operácie "." pre všetky $a \leq 7$, $b \leq 7$ použitím výsledku úlohy 2.9. Všetky čísla v tejto tabuľke vyjadrite v dvojkovej sústave. Vyjde napr.

$$3 . 5 = 6 \quad \text{čiže} \quad (11)_2 . (101)_2 = (110)_2.$$

Na základe tabuľky vyslovte hypotézu o možnosti výpočtu hodnoty $c = a . b$, ak sú a, b vyjadrené v dvojkovej sústave. Hypotézu dokážte.

3.10. Ukážte, že funkciu $y = |x|$ možno vyjadriť ako súčet dvoch funkcií $y = f(x)$ a $y = g(x)$ tak, že

a) graf funkcie f je stredove súmerný podľa bodu $[0, 0]$ a graf funkcie g je stredove súmerný podľa bodu $[1, 0]$.

b) Pre $x \in \langle 0, 1 \rangle$ je $f(x) = |x|$ a $g(x) = 0$.

Načrtnite grafy funkcií f a g v intervale $\langle -3, 3 \rangle$.

Algebra (zostavil RNDr. M. Šisler, CSc.).

1. Riešte rovnicu

$$\frac{a_1 - a_2}{(x - a_1)(x - a_2)} + \frac{a_2 - a_3}{(x - a_2)(x - a_3)} + \dots + \frac{a_n - a_1}{(x - a_n)(x - a_1)} = x,$$

kde $a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$.

2. Pre ktoré celé čísla x a y platí $x(y^2 + 1) + y^2 = (x + y)^2$?

3. Nech z_i sú komplexné čísla, $|z_i| \leqq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. Potom

$$\left|\prod_{i=1}^{n} z_i - 1\right| \leqq \sum_{i=1}^{n} |z_i - 1| \; ;$$

dokážte.

4. Nájdite všetky hodnoty parametra p, pre ktorý platí nerovnosť

$$x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\,yz \geqq p(x^2 + y^2 + z^2)$$

pre všetky x, y, z.

5. Akú najmenšiu hodnotu môže nadobúdať koeficient a v rovnici

$$x^3 - ax^2 + bx - 8 = 0 \, ,$$

aby všetky korene tejto rovnice boli kladné?

6. Ukážte, že rovnica

$$1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \dots + \frac{1}{n} x^n = 0$$

nemá pre párne n žiadny reálny koreň.

7. Nech z je komplexný koreň rovnice $x^3 + 3 = 0$, w koreň rovnice $x^2 + x + 1 = 0$. Nech $Q(z) = \{az + b \mid a, b \in Q\}$, $Q(w) = \{aw + b \mid a, b \in Q\}$, kde Q je množina racionálnych čísel. Ukážte, že existujú práve dve zobrazenia T množiny $Q(z)$ na množinu $Q(w)$ také, že platí:

a) $T(x + y) = T(x) + T(y)$,

b) $T(xy) = T(x)T(y)$ pre ľubovoľné $x, y \in Q(z)$,

c) existuje aspoň jedno číslo $a \in Q$ tak, že $T(a) \neq 0$.

Školská teória čísel (zostavil M. Kaukič).

1. Je daná rovnica

$$x^2 - ny^2 = 1 \, , \qquad (1)$$

kde n je prirodzené číslo.

a) Rovnica (1) je riešiteľná v obore prirodzených čísel; dokážte.

b) Ak usporiadaná dvojica (x_0, y_0) prirodzených čísel vyhovuje rovnici (1) a neexistuje také prirodzené $\bar{x} < x_0$, že pre niektoré prirodzené $\bar{y}$ je $(\bar{x}, \bar{y})$ riešením rovnice (1), potom všetky riešenia v prirodzených číslach rovnice (1) se dajú určiť zo vzťahu

$$x + y\sqrt{n} = (x_0 + y_0\sqrt{n})^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

a to porovnaním "racionálnej" a "iracionálnej" časti oboch strán poslednej rovnosti. Dokážte.

2. Nech $f_0(x) = \frac{x}{2}$, $f_1(x) = 3x + 1$ sú funkcie definované na množine všetkých reálnych čísel. Reťazcom čísla x nazveme každú konečnú postupnosť

$$a_0 = x,\ a_1 = f_{i_1}(x),\ a_2 = f_{i_2}(f_{i_1}(x)),\ \dots,$$
$$a_k = f_{i_k}(f_{i_{k-1}}(\dots(f_{i_2}(f_{i_1}(x)\dots)\ ,$$

kde $i_m \in \{0, 1\}$ pre $m = 1, 2, \dots, k$, pričom v postupnosti i_1, i_2, ..., i_k nie sú nikde za sebou dve jedničky.

Ak sú čísla a_0, a_k prirodzené, potom všetky čísla v reťazci čísla x sú prirodzené. Dokážte.

3. Nech n je prirodzené číslo. Binomické koeficienty $\binom{n}{k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ sú všetky nepárne práve vtedy, keď $n = 2^m - 1$, kde m je prirodzené číslo; dokážte.

4. Pokúste sa nájsť netriviálne postačujúce podmienky pre to, aby v postupnosti prirodzených čísel $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ k ľubovoľnej usporiadanej skupine dekadických cifier existoval člen v_n taký, že jeho dekadický zápis začína zvolenou skupinou cifier.

5. Vo vrcholoch pravidelného šesťuholníka sú napísané celé čísla a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 také, že ich súčet sa rovná nule. Prenosom nazveme odčítanie jedničky od čísla stojaceho v niektorom vrchole a jej pričítanie k číslu stojacemu v niektorom zo susedných vrcholov. Aký minimálny počet prenosov treba urobiť, aby čísla vo všetkých vrcholoch šesťuholníka boli rovné nule?

6. Existujú také prirodzené čísla x, y, aby $x^2 + y$ aj $x + y^2$ boli druhými mocninami prirodzených čísel?

7. Všetky prirodzené čísla m, pre ktoré je číslo $m^m + 1$ deliteľné číslom 30, tvoria aritmetickú postupnosť; dokážte. Nájdite túto postupnosť.

8. Na každej z 20 kartičiek je napísaná práve jedna z cifier od 0 do 9 tak, že každá z cifier sa vyskytuje práve na dvoch kartičkách.

Rozhodnite, či tieto kartičky možno usporiadať do radu tak, aby kartičky s nulami boli vedľa seba, medzi kartičkami s jednotkou bola práve jedna kartička, medzi kartičkami s dvojkou práve dve kartičky, atď., až medzi kartičkami s deviatkou bolo práve 9 kartičiek.

Postupnosti a rady (zostavil RNDr. J. Kubát):

1. Je daná postupnosť:

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ (n + 2)(n + 1)a_{n+2} - n^2 a_n = 0 .$$

Vyjadrite n-tý člen postupnosti.

2. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická postupnosť s diferenciou d. Potom

$$a_0a_1a_2 \dots a_{k-1} + a_1a_2a_3 \dots a_k + a_na_{n+1}a_{n+2} \dots a_{n+k-1} =$$

$$= a_0a_1a_2 \dots a_k + \frac{a_na_{n+1} \dots a_{n+k} - a_0a_1 \dots a_k}{(k + 1)d} ;$$

dokážte.

3. Nech $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú korene rovnice

$$x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0 .$$

Vypočítajte hodnotu súčtu

$$\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} + \frac{1}{x_3 - 1} + \dots + \frac{1}{x_n - 1} .$$

4. Ak označíme $S_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$, potom platí $n \cdot S_k(n) = S_{k+1}(n) + S_k(n - 1) + \dots + S_k(2) + S_k(1)$; dokážte.

5. Vypočítajte súčet:

a) $S_n = 1 \cdot x + 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x^3 + \dots + n \cdot x^n$;

b) $S_n = 1 + 4 \cdot x + 9 \cdot x^2 + \dots + n^2 \cdot x^{n-1}$.

6. Postupnosť $\{u_i\}_{i=0}^{\infty}$ je určená rekurentne takto:

$$u_0 = 2,\ u_1 = \frac{5}{2},\ u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - \frac{5}{2} .$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí:

$$[u_n] = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}} .$$

(Poznámka. Symbol $[c]$ znamená celú časť čísla c.)

7. Fibonacciho postupnosť $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$ je rekurentne definovaná takto: $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Ak uvažujeme o ľubovoľných štyroch za sebou idúcich členoch Fibonacciho postupnosti, pričom budeme považovať súčin krajných členov a dvojnásobok súčinu stredných členov za dĺžky odvesien pravouhlého trojuholníka, potom bude dĺžka jeho prepony jedným z členov tejto postupnosti; dokážte.

8. Dokážte, že pre n-tý člen Fibonacciho postupnosti platí:

$$a_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n-k-1}{k} .$$

1977/78

Nerovnosti v algebre a geometrii (zostavil M. Kaukič, VŠD Žilina):

1. Ak $abc > 0$, potom

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqq \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} ;$$

dokážte.

2. Dokážte, že nerovnosť $pa^2 + (1 - p)(b^2 - pc^2) > 0$, kde p je reálne číslo, a, b, c sú kladné reálne čísla, je správna práve vtedy, keď súčasne platia nerovnosti

$$a + b - c > 0, \qquad a + c - b > 0, \qquad b + c - a > 0.$$

3. Dané sú dve kružnice rovnakej dĺžky 1977. Na jednej z nich je daných 1977 bodov a na druhej niekoľko oblúkov, ktorých súčet dĺžok je menší než 1. Dokážte, že tieto kružnice možno tak "položiť na seba", že žiadny z daných bodov nebude ležať na niektorom z daných oblúkov.

4. Ak m, n sú kladné racionálne čísla a $x > 0$, potom platí

$$mx^n + \frac{n}{x^m} \geqq m + n .$$

Dokážte.

5. Dokážte, že pre $y = a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x$ a všetky reálne čísla x platí

$$\frac{a + c}{2} - \frac{\sqrt{D}}{2} \leqq y \leqq \frac{a + c}{2} + \frac{\sqrt{D}}{2} ,$$

kde $D = b^2 + (a - c)^2$.

6. Ak a, b, c sú dĺžky strán trojuholníka, x, y, z reálne

čísla a platí $ax + by + cz = 0$, potom $ayz + bzx + cxy < 0$; dokážte.

7. Daná je konečná postupnosť celých kladných čísel, ktorej žiadny člen nie je menší než dané číslo M. Okrem toho každý člen tejto postupnosti začínajúc tretím je rovný absolútnej hodnote rozdielu dvoch predchádzajúcich členov. Aký najväčší počet členov môže mať taká postupnosť?

8. Čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sú také, že $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 2a_1$; $a_2 \leq a_3 \leq 2a_2, \ldots, a_{n-1} \leq a_n \leq 2a_{n-1}$. Dokážte, že v súčte $S = a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n$ možno vždy vybrať znamienka tak, že $0 \leq S \leq a_1$.

Množina bodov v priestore (zostavil doc. J. Vyšín, CSc.).

1. V priestore sú dané dva útvary U_1, U_2 a priamka s. Označíme X_1, X_2 dva body týchto vlastností: $X_1 \in U_1 \wedge X_2 \in U_2$, $X_1 \neq X_2$, $X_1X_2 \parallel s$.

Vyšetrite množinu všetkých stredov všetkých takých úsečiek X_1X_2 v týchto prípadoch:

a) U_1, U_2 sú dve mimobežky,

b) U_1 je priamka rôznobežná s rovinou U_2,

c) U_1, U_2 sú dve rôznobežné roviny.

2. V priestore je daný trojuholník ABC a útvar U. Vyšetrite množinu všetkých stredov guľových plôch opísaných všetkým štvorstenom ABCX, kde $X \in U$, a to v prípadoch:

a) U je priamka rôznobežná s rovinou ABC,

b) U je rovina rôznobežná s rovinou ABC a prechádzajúca bodom A.

3. V priestore je daný útvar U, rovina ρ a trojuholník ABC.

Vyšetrite množinu všetkých vrcholov Z všetkých trojuholníkov XYZ, kde $X \in U \wedge Y \in \rho \wedge XY \parallel AB \wedge YZ \parallel BC \wedge ZX \parallel CA$, a to v prípadoch:

a) U je priamka rôznobežná s rovinou ρ,

b) U je rovina rôznobežná s rovinou ρ.

4a. V priestore sú dané dve rôzne roviny ρ, σ a bod A, ktorý neleží v žiadnej z nich. Vyšetrite množinu všetkých bodov všetkých priamok, z ktorých každá prechádza bodom A a má rovnakú odchýlku od roviny ρ i roviny σ.

4b. V priestore sú dané dva rôzne body A, B a rovina ρ, ktorá neobsahuje žiadny z nich. Vyšetrite množinu všetkých bodov X roviny ϱ , pre ktoré majú priamky AX, BX rovnakú odchýlku od roviny ϱ .

5. V priestore je daný bod A, priamka q a útvar U. Ďalej je dané kladné číslo k. Vyšetrite množinu všetkých bodov X týchto vlastností: $X \in q$, podiel vzdialeností bodu X od útvaru U a od bodu A je rovný k, a to v týchto prípadoch:

a) U je priamka mimobežná s q,

b) U je rovina rôznobežná s q.

Matematická analýza (zostavil RNDr. J. Jarník, CSc., MÚ ČSAV Praha).

1. Nech $0 < a < b$ sú reálne čísla, $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$, $n = 2, 3, \ldots$.

Nájdite číslo c také, že platí $x_{2n} > c > x_{2n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, a dokážte, že platí:

Ak je $d \neq c$, potom existuje prirodzené číslo p také, že

$$|x_p - c| < |d - c| .$$

2. Nech postupnosť $\{x_n\}$ kladných čísel je rastúca a nie je ohraničená. Označme $s_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Dokážte, že postupnosť $\{s_n\}$ je taktiež rastúca a nie je ohraničená. Zostane toto tvrdenie správne aj v prípade, keď vynecháme predpoklad, že čísla x_n sú kladné?

3. Nech $a_0 > 1$, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}})$, $n = 1, 2, \ldots$.

Dokážte: Postupnosť $\{a_n\}$ je klesajúca a pre všetky prirodzené n platí $a_n > 1$. Ak je $c > 1$, potom existuje také prirodzené číslo p, že platí $a_p < c$ (a tedy $a_n < c$ pre všetky prirodzené čísla $n \geq p$).

Vyšetrite tiež prípad $0 < a_0 \leq 1$.

4. Nech $\{a_n\}$ je klesajúca postupnosť nezáporných čísel. Označme $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $t_n = 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^n a_{2n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Dokážte, že postupnosť $\{s_n\}$ je ohraničená práve vtedy, keď je ohraničená postupnosť $\{t_n\}$. Nájdite príklad, ktorý ukáže, že tvrdenie vo všeobecnosti neplatí, ak vynecháme predpoklad, že postupnosť $\{a_n\}$ je klesajúca.

5. Určte všetky funkcie f, g definované pre všetky reálne čísla x a vyhovujúce pre všetky reálne čísla x, y rovnosti

$$f(x - y) = f(x)\, g(y) + f(y)\, g(x) .$$

6. Nech n je prirodzené číslo, a, b reálne čísla. Určte všetky funkcie f definované pre všetky reálne čísla x a vyhovujúce pre všetky reálne čísla x rovnici

$$af(x^n) + f(-x^n) = bx .$$

7. Nech f je zobrazenie eukleidovského priestoru do seba.

Dokážte: Ak je f izometria, ktorá nemá pevný bod, potom ani zložené zobrazenie $f \circ f$ /tj. zobrazenie g, ktoré priraďuje každému bodu A bod $g(A) = f(f(A))$ /, nemá pevný bod.

Poznámka: Zobrazenie F eukleidovského priestoru do seba sa volá izometriou, ak zachováva vzdialenosť bodov, tj. ak A, B sú ľubovoľné dva body priestoru, je vzdialenosť bodov $F(A)$, $F(B)$ rovná vzdialenosti bodov A, B.

Nech F je zobrazenie množiny $\mathbb{M}$ do množiny $\mathbb{M}$. Prvok $x \in \mathbb{M}$ sa nazýva pevným bodom zobrazenia F, ak platí $F(x) = x$.

8. Nech $\mathbb{M}$ je neprázdna množina funkcií f tvaru $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, ktorá má tieto vlastnosti:

a/ Ak $f \in \mathbb{M}$, $g \in \mathbb{M}$, potom $g \circ f \in \mathbb{M}$ kde $h = g \circ f$ je funkcia definovaná vzťahom $h(x) = g(f(x))$.

b/ Ak $f \in \mathbb{M}$, potom $f_{-1} \in \mathbb{M}$, kde f_{-1} je funkcia definovaná vzťahom $f_{-1}(x) = y$, kde $x = f(y)$.

c/ Ak $f \in \mathbb{M}$, potom existuje pevný bod zobrazenia f, tj. reálne číslo x_f také, že platí $f(x_f) = x_f$.

Dokážte, že existuje také reálne číslo t, že platí $f(t) = t$ pre všetky funkcie $f \in \mathbb{M}$.

Udajte príklady množiny $\mathbb{M}$ obsahujúcej: a/ konečne mnoho, b/ nekonečne mnoho prvkov.

Kombinatorika (zostavil RNDr. F. Zítek, CSc., MÚ ČSAV Praha):

O konečnej postupnosti celých čísel tvaru

(1) $$c_0 = 0,\ c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n = c$$

budeme hovoriť, že má dĺžku n a končí číslom c.

Hovoríme, že postupnosť (1) je málo rastúca, ak pre $j = 1, 2, \dots, n$ platí $0 \leq c_j - c_{j-1} \leq 1$. Postupnosť (1) nazveme alternatívnou, ak pre $j = 1, 2, \dots, n$ platí $|c_j - c_{j-1}| = 1$. Ktoré postupnosti sú zároveň málo rastúce aj alternatívne?

1. Odvoďte vzorec pre počet $p_n(y)$ /n prirodzené, y celé/ všetkých rôznych alternatívnych postupností dĺžky n končiacich číslom y. Vyšetrite vlastnosti funkcií p_n, $n = 1, 2, 3, \dots$.

2. Odvoďte vzorec pre počet $\pi_n(y)$ všetkých rôznych málo rastúcich postupností dĺžky n končiacich číslom y. Vyšetrite vlastnosti funkcií π_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

3. Odvoďte vzorec pre počet $p_n(y, b)$ všetkých rôznych alternatívnych postupností dĺžky n končiacich číslom y a takých, že pre všetky $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ je $c_j \leqq b$ /b celé/.

4. Odvoďte vzorec pre počet $\pi_n(y, k)$ všetkých rôznych málo rastúcich postupností dĺžky n končiacich číslom y a takých, že pre všetky $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ platí $c_j \leqq kj$ /$k \geqq 0$ reálne/.

5. Odvoďte vzorec pre počet $\pi_n^*(y, k)$ všetkých rôznych málo rastúcich postupností dĺžky n končiacich číslom y a takých, že pre všetky $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ platí $c_j < kj$ /$k > 0$ reálne/.

6. Odvoďte vzorec pre počet $p_n(y, a, b)$ všetkých rôznych alternatívnych postupností dĺžky n končiacich číslom y a takých, že pre všetky $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ platí $a \leqq c_j \leqq b$ /a, b celé/.

7. Odvoďte vzorec pre počet $p_n^*(y, k)$ všetkých rôznych alternatívnych postupností dĺžky n končiacich číslom y a takých, že pre všetky $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ platí $c_j \leqq kj$ /$k > 0$ reálne/.

8. Pri pokladni kina s jednotným vstupným 5 Kčs stojí N záujemcov, z ktorých p platí päťkorunou, ostatných $d = N - p$ desaťkorunou.

Koľkými rôznymi spôsobmi možno usporiadať frontu N kupujúcich tak, aby pokladník, ktorý na začiatku predaja nemá v pokladni žiadne peniaze, mohol každému kupujúcemi s desaťkorunou ihneď vydať naspäť?

Ako sa tento počet zmení, ak pokladník má na začiatku v pokladni k päťkorún? /Predpokladáme samozrejme, že nikto nekupuje viac než jeden lístok./

<u>Školská teória čísel</u> (zostavil dr. Š. Sakáloš, MFF UK Bratislava) :

1. Napíšte za sebou všetky čísla od 100 do 999. Vznikne tak dekadický zápis nejakého čísla N.

a/ Dokážte, že N nie je štvorcom žiadneho prirodzeného čísla.

b/ Dokážte, že N nie je prvočíslo.

c/ Určte najväčšieho spoločného deliteľa čísel N a 27000.

d/ Určte najväčšieho spoločného deliteľa čísel N a 27 027 000.

e/ Dokážte, že N nie je /vyššou než prvou/ mocninou žiadneho prirodzeného čísla.

2. Nájdite najväčšie prirodzené číslo x také, že

$$x^{x^x} < 4^{4^{4^4}}.$$

3. Akým najväčším číslom možno krátiť zlomok

$$\frac{7^{3000} - 3^{3000}}{5^{3000}}\ ?$$

4. Dokážte, že existuje 3.10^9 za sebou nasledujúcich zložených prirodzených čísel menších než $10^{10^{10}}$.

5. Dokážte, že číslo

$$1001^{4000} + 4.1000^{1000}$$

je zložené.

6. Dokážte, že kvadratická rovnica

$$8^{8^8}x^2 + 10^{10^{10}}x + 9^{9^9} = 0$$

má dva reálne rôzne korene, ktoré sú iracionálne.

7. a/ Dokážte, že exponent čísla 2 v rozklade čísla $n!$ na súčin prvočísel je $n - k$, kde k je počet jednotiek v dvojkovom zápise čísla n.

b/ Dokážte, že exponent prvočísla p v rozklade čísla $n!$ na súčin prvočísel je $\frac{n - k}{p - 1}$, kde k je ciferný súčet v p-adickom zápise čísla n.

1978/79

1. Nerovnosti

1.1 Dokážte, že pre kladné čísla a, b, c platí

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c).$$

1.2 Nech α, β, γ sú uhly ostrouhlého trojuholníka. Ak $\alpha < \beta < \gamma$, potom $\sin 2\alpha > \sin 2\beta > \sin 2\gamma$; dokážte!

1.3 Súčet druhých mocnín piatich reálnych čísel a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 je 1. Dokážte, že najmenšia z hodnôt $(a_i - a_j)^2$, pre $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$, $i \neq j$ nie je väčšia ako $\frac{1}{10}$.

1.4 Nájdite celú časť čísla

$$y = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}} .$$

1.5 Na jednotkovej kružnici, v prvom kvadrante, sú dané také oblúky $\widehat{AM_1} = X_1$, $\widehat{AM_2} = X_2$, ..., $\widehat{AM_k} = X_k$, $A \equiv (1, 0)$, že $X_1 < X_2 < \ldots < X_k$. Dokážte, že

$$\sin 2X_1 + \sin 2X_2 + \ldots + \sin 2X_{k-1} - \sin(X_1 - X_2) - \sin(X_2 - X_3) - \ldots - \sin(X_{k-1} - X_k) < \frac{\pi}{2} + \sin(X_1 + X_2) + \sin(X_2 + X_3) + \ldots + \sin(X_{k-1} + X_k) .$$

1.6 Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > \frac{n}{4} .$$

1.7 Nech $x_0 = 5$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Potom

$45 < x_{1000} < 45{,}1$; dokážte.

2. Geometrické nerovnosti

2.1 Je dán pravidelný 25-úhelník $A_1A_2 \ldots A_{25}$ se středem O. Z vektorů $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, ..., $\overrightarrow{OA_{25}}$ jich vyberte několik tak, aby velikost součtu vybraných vektorů byla co největší. Určete tuto maximální velikost.

2.2 V konvexním n-úhelníku jsou sestrojeny všechny úhlopříčky a dělí ho tak na mnohoúhelníčky. Určete maximální možný počet stran mnohoúhelníčku.

2.3 Obdélníkové pole o rozměrech 300 x 400 je rozděleno pěšinami na čtverce 100 x 100, po obvodu pole vedou také pěšiny. Po pěšině jde chodec rychlostí v, přes pole rychlostí u. Poraďte chodci, jak se dostane z jednoho rohu pole do opačného rohu nejrychleji a určete, za jak dlouho.

2.4 Je dáno n jednotkových úseček v rovině tak, že mají společný bod a jejich koncové body jsou vrcholy 2n-úhelníka. Dokažte, že alespoň jedna jeho strana není menší než strana pravidelného 2n-úhelníka vepsaného do kružnice o průměru 1.

2.5 Do daného trojúhelníka vepište trojúhelník s co nejmenším obvodem. (Uvnitř každé strany daného trojúhelníka leží jediný vrchol vepsaného trojúhelníka.)

2.6 Mezi všemi trojúhelníky vepsanými do dané kružnice najděte ten, který má největší součet čtverců stran.

2.7 Poloměr kružnice opsané trojúhelníku označme R, vepsané r. Dokažte, že $R \geq 2r$. Pro které trojúhelníky platí rovnost? Dokažte, že pro každá dvě čísla $R \geq 2r$ existuje příslušný trojúhelník.

3. Mnohočleny

3.1 Součin dvou mnohočlenů s celými koeficienty má všechny koeficienty dělitelné pěti. Dokažte, že alespoň jeden z mnohočlenů má všechny koeficienty dělitelné pěti.

3.2 Je dáno číslo $a \neq 0$ a nenulový mnohočlen $P(x)$. Dokažte, že mnohočlen $(x - a)^n P(x)$ má alespoň $n + 1$ nenulových koeficientů.

3.3 Je dán mnohočlen 7. stupně s komplexními koeficienty. Leží-li v rovině komplexních čísel všechny jeho kořeny uvnitř /ne na hranici/ úhlu velikosti 60° s vrcholem v počátku, jsou všechny jeho koeficienty nenulové. Dokažte.

3.4 Najděte nejmenší reálné číslo a, které má následující vlastnost: Pro každý mnohočlen $f(x)$ druhého stupně, pro který $|f(x)| \leq 1$ pro všechna $0 \leq x \leq 1$, platí $f'(0) \leq a$.

3.5 Napište mnohočlen $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ jako rozdíl čtverců dvou mnohočlenů různého stupně s reálnými koeficienty.

3.6 Buď r přirozené číslo. Dokažte, že trojčlen $x^2 - rx - 1$ není dělitelem žádného nenulového mnohočlenu s celými koeficienty v absolutní hodnotě menšími než r.

3.7 Mají-li dva mnohočleny 3. stupně s celými koeficienty společný iracionální kořen, pak mají ještě další společný kořen. Dokažte.

4. Kombinatorika

4.1 Dřevěnou krychli natřeli na červeno a pak ji rozřezali na n^3 stejně velkých krychliček. Kolika způsoby je možno z krychliček složit červenou krychli původních rozměrů?

4.2 Je dáno prvočíslo $p > 2$ a přirozené číslo n. Kolika způsoby lze obarvit vrcholy pravidelného p-úhelníka pomocí n barev? Způsoby, při nichž se po otočení p-úhelníka barvy shodují, nepokládejte za různé.

4.3 Uvažujme všechna slova složená z n písmen X a n písmen Y. Diferencí slova budeme rozumět číslo, které udává, kolikrát v něm jsou vedle sebe různá písmena. Dokažte, že pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ je počet slov s diferencí $n - k$ roven počtu slov s diferencí $n + k$.

4.4 Je dáno přirozené číslo $n > 2$. Uvažujme všechna slova složená z n písmen X a n písmen Y. Slovům, která lze rozdělit na dvě slova, z nichž každé obsahuje stejně X i Y, budeme říkat slova 1. druhu. Slovům, která lze takto rozdělit jediným způsobem, budeme říkat slova 2. druhu. Dokažte, že slov 2. druhu je dvakrát tolik jako slov 1. druhu.

4.5 Je dáno přirozené číslo $n > 2$ a množina M, jejíž prvky jsou slova složená z písmen X a Y, přičemž každé slovo má právě n písmen a jakákoliv dvě různá slova se liší alespoň na třech místech. Dokažte nerovnost

$$|M| \leq \frac{2^n}{n+1} .$$

4.6 Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$2^{4n-2} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4i+1} .$$

4.7 Řekneme, že systém $\mathcal{S}$ podmnožin nějaké množiny je dokonalý, jestliže pro žádné dvě podmnožiny $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{S}$ neplatí $A \subset B$. Jaký je největší možný počet podmnožin tvořících dokonalý systém podmnožin n-prvkové množiny?

5. Geometrie

5.1 V prostoru jsou dány dva různé body A, B. Najděte množinu všech bodů X, pro které se $|XA|^2 - |XB|^2$ rovná danému kladnému číslu k.

5.2 V prostoru je dána rovina ρ a body A, B v opačných poloprostorech určených rovinou ρ. Najděte v rovině ρ všechny body X, pro které je $\big||XA| - |XB|\big|$ maximální.

5.3 V prostoru je dán klín K /průnik dvou poloprostorů, jejichž hraniční roviny nejsou rovnoběžné/ a uvnitř něho polopřímka p, jejíž počátek náleží hraně klínu K. Najděte rovinu ρ, která prochází polopřímkou p tak, že p je osou úhlu $\rho \cap K$.

5.4 Bod X se pohybuje po přímce p konstantní rychlostí danou vektorem $\vec{u}$, bod Y se pohybuje po přímce q konstantní rychlostí danou vektorem $\vec{v}$. Přímky p a q jsou mimoběžné a v jednom okamžiku je X v bodě A, Y v bodě B. Najděte polohu bodů X, Y, při které je vzdálenost $|XY|$ minimální.

5.5 V trojbokém jehlanu ABCV je $|AV| = |BV|$ a hrana AC je kolmá ke stěně ABV, $|CV| = p$. Koule o poloměru r se dotýká stěny ABV v jejím těžišti, hrany CV a základny ABC. Vypočtěte objem jehlanu pomocí veličin p, r.

5.6 V rovině je dán trojúhelník ABC a bod P. Paty kolmic vedených bodem P k stranám trojúhelníka ABC označíme K, L, M. Udejte nutnou a postačující podmínku pro to, aby

a/ body K, L, M, P ležely na kružnici,

b/ body K, L, M ležely na přímce.

5.7 V rovině je dán trojúhelník ABC. Kružnice k_A prochází bodem A a dotýká se strany BC v bodě B, kružnice k_B prochází bodem B a dotýká se strany CA v bodě C a kružnice k_C prochází bodem C a dotýká se strany AB v bodě A. Dokažte, že se kružnice k_A, k_B, k_C protínají v jednom bodě Q. Co platí o úhlech $\sphericalangle QAB$, $\sphericalangle QBC$, $\sphericalangle QCA$?

5.8 V prostoru jsou dány přímky p, q a rovina ρ, dále je dána délka $d > 0$. Sestrojte úsečku délky d rovnoběžnou s rovinou ρ, jejíž jeden krajní bod náleží p a druhý q.

1979/80

1. Velká čísla

1.1 Najděte největší přirozené číslo x takové, že

$$(x!)! < 10^{10^{10}}$$

a nejmenší přirozené číslo y takové, že $y!$ je násobkem čísla $10^{10^{10}}$.

1.2 Dokažte, že kvadratická rovnice

$$8^{8^8} \cdot x^2 + 10^{10^{10}} \cdot x + 9^{9^9} = 0$$

má dva různé reálné iracionální kořeny.

1.3. Napíšeme-li za sebou všechna čísla od 100 do 999, vznikne dekadický zápis jistého čísla N. Dokažte, že N není prvočíslem ani mocninou /s přirozeným exponentem větším než 1/ žádného přirozeného čísla.

1.4 Dokažte, že existuje mocnina dvou /s přirozeným exponentem/, jejíž dekadický zápis začíná číslicemi

$$197919801981 .$$

1.5 Najděte poslední dvě nenulové číslice čísla $1000\,!$.

1.6 Dokažte, že při žádné volbě znamének není číslo

$$\pm 1^{1^1} \pm 2^{2^2} \pm 3^{3^3} \pm \ldots \pm 59^{59^{59}} \pm 60^{60^{60}}$$

druhou, třetí, čtvrtou, pátou ani šestou mocninou žádného celého čísla.

1.7 Dokažte, že mezi přirozenými čísly menšími než $10^{10^{10}}$ existuje 10^{10} po sobě následujících složených čísel.

2. Goniometrie

2.1 Najděte všechna reálná x, pro která platí

$$26 \sin^2 x^2 + 12 \cos 2x + 5 \sin 2x = 13 .$$

2.2 Najděte všechny trojúhelníky, pro jejichž vnitřní úhly A, B, C platí

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2} .$$

2.3 Najděte všechna reálná a, pro něž je funkce

$$f(x) = \cos ax + \cos x$$

periodická.

2.4 Jsou dána lichá přirozená čísla m, n. Najděte všechna reálná x, pro která platí

$$\sin^n x + \frac{1}{\cos^m x} = \cos^n x + \frac{1}{\sin^m x} .$$

2.5 Bez pomoci tabulek, počítačky a logaritmického pravítka vypočtěte

$$\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ - \sin 83^\circ .$$

2.6 Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \arcsin x + 3 \arccos x + \arcsin \left(2x\sqrt{1 - x^2}\right)$$

v intervalu $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2.7 Najděte všechna reálná x, pro něž platí

$$\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2 .$$

3. Obsahy

3.1 V rovině je dáno několik pásů, žádné dva nejsou rovnoběžné. Posuňte pásy tak, aby zachovaly své směry a obsah jejich průniku byl co největší. /Pásem rozumíme část roviny mezi dvěma rovnoběžkami. Dané pásy nemusejí mít stejnou šířku./

3.2 Dva shodné obdélníky jsou v rovině umístěny tak, že jejich obvody mají 8 společných bodů. Dokažte, že obsah jejich průniku je větší než polovina obsahu každého z nich.

3.3 Dokažte, že každý trojúhelníkový řez čtyřstěnu má obsah menší než některá stěna.

3.4 Jakou polohu má krychle, vrhá-li na rovinu kolmou ke směru světla stín s největším možným obsahem?

3.5 Je dán trojúhelník.

a/ Umístěte do něho středově souměrný mnohoúhelník s co největším obsahem.

b/ Umístěte ho do konvexního středově souměrného mnohoúhelníku s co nejmenším obsahem.

V obou případech extrémní obsahy vyjádřete pomocí obsahu daného trojúhelníka.

3.6 V jednotkovém čtverci je obsažen útvar U /ne nutně souvislý/. Pokud v U neexistují dva body vzdálené $0{,}001$, je obsah U menší než $0{,}3$. Dokažte.

3.7 V jednotkovém čtverci je 102 bodů, žádné tři neleží v přímce. Dokažte, že jisté tři z nich jsou vrcholy trojúhelníka s obsahem nejvýše $0{,}005$.

4. Obdélníková schémata

4.1 Čísla $1, 2, \ldots, n^2$ jsou zapsána ve čtvercové tabulce, jejíž řádky jsou očíslovány indexy $1, 2, \ldots, n$ a sloupce také. Číslo 1 je na libovolném místě; číslo 2 je v řádku, který má stejný index jako sloupec, obsahující číslo 1; číslo 3 je v řádku, který má stejný index jako sloupec obsahující číslo 2 atd. Určete rozdíl součtu čísel v řádku obsahujícím číslo 1 a součtu čísel ve sloupci obsahujícím číslo n^2.

4.2 V obdélníkové tabulce jsou zapsána reálná čísla. Je dovoleno současně změnit znaménka všech čísel v řádku nebo ve sloupci. Je možno každou tabulku převést postupným prováděním těchto změn na tabulku obsahující samá nezáporná čísla?

4.3 Do čtvercové tabulky 8×8 je zapsáno 64 nezáporných čísel, jejichž součet je 1956. Součet všech 16 čísel ležících na úhlopříčkách je 112. Čísla umístěná souměrně podle některé úhlopříčky jsou si rovna. Dokažte, že součet čísel je v každém řádku i v každém sloupci menší než 518.

4.4 Ve čtvercové tabulce $n \times n$ je zapsáno n^2 čísel x_{pq} /tak značíme číslo v p-tém řádku a q-tém sloupci/. Dokažte, že je-li $x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} = 0$ pro libovolné tři indexy $i, j, k \in \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existují čísla $t_1, t_2, \ldots, t_n$ tak, že $x_{ij} = t_i - t_j$ pro všechny $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

4.5 Ve čtvercové tabulce $n \times n$ je zapsáno n^2 čísel. Vynecháme-li jakoukoliv podmnožinu řádků, která neobsahuje všechny řádky /včetně prázdné/, bude ve zbylé tabulce vždy nějaký sloupec obsahovat jedinou nulu. Dokažte, že ať pak vynecháme jakoukoliv podmnožinu sloupců, která neobsahuje všechny sloupce, bude ve zbylé tabulce vždy nějaký řádek obsahovat jedinou nulu.

4.6 Ve čtvercové tabulce 8×8 je zapsáno 64 nenulových čísel. Jediné z nich je záporné a není umístěno v rohu. Je dovoleno změnit znaménka všech čísel nějakého řádku nebo sloupce nebo řady rovnoběžné s úhlopříčkou /sem patří i změna znaménka rohového čísla/. Dokažte, že postupným prováděním těchto změn nemůžeme nikdy dostat tabulku obsahující samá kladná čísla.

4.7 Ve čtvercové tabulce 8×8 je zapsáno 64 čísel. Je dovoleno změnit znaménka všech čísel v libovolné její souvislé části 3×3 nebo 4×4. Je možno každou takovou tabulku převést postupným prováděním těchto změn na tabulku obsahující samá nezáporná čísla?

5. Posloupnosti

5.1 Dokažte, že pro každou posloupnost $\{a_n\}$, jejíž členy jsou navzájem různá přirozená čísla, která nemají ve svém dekadickém zápise číslici 0, platí:
Pro každé přirozené číslo k je

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_k} < 29 .$$

5.2 Je dána posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$. Dokažte, že ke každému přirozenému číslu m existuje přirozené číslo k tak, že

$$\left|\sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=k+1}^{m} a_i\right| \leqq \max_{1\leqq i\leqq m} |a_i| \,.$$

5.3 Je dána posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$, která má tuto vlastnost: Existuje přirozené číslo m takové, že

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m = 0$$

a pro každé přirozené číslo k je

$$a_{m+k} = a_k \,.$$

Dokažte, že existuje přirozené číslo p tak, že pro každé celé nezáporné číslo k platí

$$a_p + a_{p+1} + \dots + a_{p+k} \geqq 0 \,.$$

5.4 Uvažujme čtyři posloupnosti reálných čísel $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ takové, že pro každé přirozené číslo n je

$$a_{n+1} = a_n + b_n \,, \qquad c_{n+1} = c_n + d_n \,,$$

$$b_{n+1} = b_n + c_n \,, \qquad d_{n+1} = d_n + a_n \,.$$

Dokažte, že pokud existují přirozená čísla k, m tak, že

$$a_{k+m} = a_m \,, \quad b_{k+m} = b_m \,, \quad c_{k+m} = c_m \,, \quad d_{k+m} = d_m \,,$$

pak je

$$a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = 0 \,.$$

5.5 Pro posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ platí, že pro každé přirozené číslo n je

$$a_n + a_{n+2} \geqq 2a_{n+1} \,.$$

Dokažte, že pak pro každé přirozené číslo n je

$$\frac{a_1 + a_3 + \dots + a_{2n+1}}{n+1} \geqq \frac{a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}}{n} \,.$$

5.6 Jsou dána přirozená čísla a_1, a_2. Pro přirozená čísla $n > 2$ položme $a_n = |a_{n-2} - a_{n-1}|$. Tak jsme definovali posloupnost nezáporných celých čísel $\{a_n\}$. Je-li největší člen této posloupnosti 1980, jaký je největší možný index prvního nulového členu?

5.7 Je dána posloupnost číslic $\{a_n\}$ neobsahující číslici 9. Ta určuje posloupnost $\{b_n\}$, jejíž členy mají dekadické zápisy

$$b_1 = (a_1) \,, \qquad b_2 = (a_1 a_2) \,, \qquad b_3 = (a_1 a_2 a_3) \quad \text{atd.}$$

Dokažte, že posloupnost $\{b_n\}$ obsahuje nekonečně mnoho složených čísel.