Řešení některých úloh třetího kola kategorie A

In: Jozef Moravčík (editor); Antonín Vrba (editor): [dokumenty-09] Matematická olympiáda 1951-1981. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1981. pp. 107–142.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405369

Ř e š e n í

I.2 Označíme L, S liché a /nenulové/ sudé číslo. Vytvoříme začátek /5 řádků/ tabulky:

1.	L L L
2.	L S L S L
3.	L L S L S L L
4.	L S S S L S S S L
5.	L L L S L L L S L L L

. . . .

První tři čísla 1. a 5. řádku jsou táž; proto se trojčíslí v 1. až 4. řádku opakují, a tím je dokázáno tvrzení úlohy.

II.1 $|a| > 2$, útvar je bod 0 ;
$|a| = 2$, útvar je poloosa reálných čísel, a to kladná pro $a = 2$ a záporná pro $a = -2$;
$0 \leqq |a| < 2$, útvar jsou dvě různé polopřímky souměrně sdružené vzhledem k ose reálných čísel; pro $a = 0$ je útvar dvojice opačných poloos imaginárních čísel.

II.3 Použijeme indukce a nerovnosti $\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \geqq 2$, která platí pro každá dvě kladná čísla a_i, a_j; rovnost nastane právě tehdy, když je $a_i = a_j$.

Pro $n = 2$ platí dokazovaná nerovnost, jak snadno nahlédneme; rovnost nastane právě tehdy, když je $a_1 = a_2$. Označme $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $t = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$ a předpokládejme, že platí $st \geqq n^2$; přitom předpokládejme, že $st = n^2$ právě když je $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Provedeme tento výpočet

$$\left(s + a_{n+1}\right)\left(t + \frac{1}{a_{n+1}}\right) = st + \frac{s}{a_{n+1}} + a_{n+1}t + 1 =$$

$$= st + \left(\frac{a_1}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1}\right) + \left(\frac{a_2}{a_{n+1}} \quad \frac{a_{n+1}}{a_2}\right) + \dots + \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) +$$

$$+ 1 \geqq n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2 .$$

Tím je odůvodněn indukční krok a věta je dokázána.

III.2 Kořeny rovnice jsou

$$z_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} , \qquad \text{/x/}$$

$$z_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} . \qquad \text{/xx/}$$

Protože trojúhelník OZ_1Z_2 je pravoúhlý rovnoramenný /kde $\sphericalangle Z_1OZ_2 = 90^\circ$/, musí platit

$$Z_1 = iZ_2 \qquad \text{nebo} \qquad Z_1 = -iZ_2 .$$

Případ 1. Pro $Z_1 = iZ_2$ je

$$-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = -i\,\frac{a}{2} - i\sqrt{\frac{a^2}{4} - b} ,$$

a odtud postupně plyne

$$\frac{a}{2}\left(1 - i\right) = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\,.\left(1 + i\right) ,$$

$$\frac{a}{2} = \frac{1 + i}{1 - i}\sqrt{\frac{a^2}{4} - b} ,$$

$$\frac{a}{2} = i\sqrt{\frac{a^2}{4} - b} ,$$

$$\frac{a^2}{4} = -\frac{a^2}{4} + b ,$$

tj.

$$a^2 = 2b .$$

Případ 2. Pro $Z_1 = -iZ_2$ vyplývá stejným způsobem $a^2 = 2b$. Ze vztahů /x/, /xx/ vyplývá, že aspoň jedno z čísel a, b je různé od nuly, jinak by se kořeny Z_1, Z_2 rovnice $Z^2 + aZ + b$ rovnaly nule a útvar OZ_1Z_2 by nebyl trojúhelník. Platí tedy $a^2 = 2b \neq 0$, což jsme měli dokázat.

Obrácená věta zní: Je-li $a^2 = 2b \neq 0$, tvoří oba obrazy kořenů rovnice $Z^2 + aZ + b = 0$ a počátek souřadnic trojúhelník s pravým úhlem při počátku. Dosaďme do /x/, /xx/ za $b = \frac{a^2}{2}$. Dostaneme

$$Z_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{-\frac{a^2}{4}} , \quad Z_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{-\frac{a^2}{4}}$$

neboli

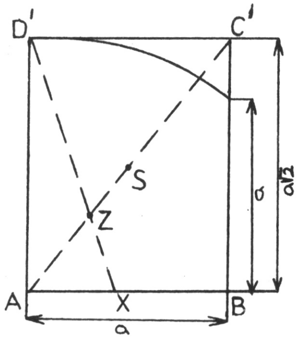
$$Z_1 = -\frac{a}{2}\left(1 + i\right), \qquad Z_2 = -\frac{a}{2}\left(1 - i\right) .$$

Platí $Z_1 = iZ_2$, je i $a \neq 0$, $Z_1 \neq 0$, $Z_2 \neq 0$ a trojúhelník OZ_1Z_2 má při vrcholu O pravý úhel.

III.4 a/ Všecky čtyřúhelníky $B'D'YX$ jsou rovnoramenné lichoběžníky, neboť je $B'D' \parallel XY$ /průsečnice roviny $B'D'X$ s oběma rovnoběžnými rovinami $A'B'C'D'$ a $ABCD$/. $B'D' \neq XY$ /je $XY < BD = B'D'$/ a $B'X = D'Y$, neboť je $\triangle BB'X \cong \triangle DD'Y$ /sus/ a $XY \parallel BD$/. Rovina ACC' je rovinou souměrnosti každého lichoběžníka /je $B'D' \perp ACC'$, $XY \parallel B'D'$, tj. $XY \perp ACC'$, přičemž jsou $B'D'$, XY půleny rovinou ACC'/. Průsečík Z úhlopříček $B'Y$, $D'X$ leží tedy v rovině ACC' a současně náleží vnitřku úsečky $D'X$, tj. náleží vnitřku $\triangle D'AB$. Společné body roviny ACC' a vnitřku $\triangle D'AB$ vyplní vnitřek úsečky AS, kde S je střed krychle.

Obráceně každý bod Z vnitřku úsečky AS je průsečíkem úhlopříček některého lichoběžníka $B'D'YX$, neboť přímka $D'Z$ protne úsečku AB v jejím vnitřním bodě X.

b/ Je-li $D'Z = 2XZ$ /obr. 8/, pak z podobnosti trojúhelníků AXZ, $C'D'Z$ plyne, že $C'Z = 2.AZ$. Průsečík Z úhlopříček hledaného čtyřúhelníka tedy dělí tělesovou úhlopříčku AC' v poměru 1: 2, tj. $C'Z = 2AZ$.



Obr. 8

Dále není možné, aby platilo $XZ = 2.D'Z$, neboť je

$$AX < C'D' = AB ,$$

a tedy vzhledem k podobnosti trojúhelníků AXZ, $C'D'Z$ také $XZ < D'Z$. Postup lze zřejmě obrátit.

IV.3 Vrcholy daného sedmnáctiúhelníka jsou obrazy komplexních kořenů rovnice

$$z^{17} = 1 ,$$

neboli jsou to čísla

/x/ $$z_k = \cos \frac{k \cdot 360^\circ}{17} + i \sin \frac{k \cdot 360^\circ}{17} ,$$

kde $k = 0, 1, 2, \ldots, 16$. Označme

/xx/ $$x_k = \frac{k \cdot 360^\circ}{17} ,$$

kde $k = 0, 1, 2, \ldots, 16$; pak je

$$z_k = \cos x_k + i \sin x_k .$$

Označme dále m kružnici o středu $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ a poloměru 1. Úloha žádá vyhledat všecky ty body $[z_k]$, které mají od středu kružnice m vzdálenost menší než 1, tj. všecky kořeny z_k rovnice $z^{17} = 1$, pro které platí

/xxx/ $$\left| z_k - \left(\sqrt{\tfrac{3}{2}} + i \sqrt{\tfrac{3}{2}} \right) \right| < 1 .$$

Výpočtem zjistíme, že vztah /xxx/ můžeme nahradit vzhledem k /x/ vztahem

$$\left(\cos x_k - \sqrt{\tfrac{3}{2}} \right)^2 + \left(\sin x_k - \sqrt{\tfrac{3}{2}} \right)^2 < 1 .$$

Po úpravě dostaneme

$$\cos^2 x_k + \sin^2 x_k - 2 \sqrt{\tfrac{3}{2}} \left(\cos x_k - \sin x_k \right) + 2 . \tfrac{3}{2} < 1$$

a dále

$$2 \sqrt{\tfrac{3}{2}} \left(\cos x_k + \sin x_k \right) > 2 . \tfrac{3}{2}$$

a konečně

/xxxx/ $$\cos x_k + \sin x_k > \sqrt{\tfrac{3}{2}} .$$

Podle známého vzorce dostaneme

$$\cos \left(45^\circ - x_k \right) > \tfrac{1}{2} \sqrt{3}$$

neboli

$$\sin \left(45^\circ + x_k \right) > \tfrac{1}{2} \sqrt{3} .$$

Protože $\frac{1}{2} \sqrt{3} = \sin 60^\circ = \sin 120^\circ = \sin 420^\circ = \sin 480^\circ$, leží číslo $\left(45^\circ + x_k \right)$ buď v intervalu $\left(60^\circ, 120^\circ \right)$ nebo v intervalu $\left(420^\circ, 480^\circ \right)$; druhý interval zřejmě nepřichází v úvahu, protože platí $k < 17$. Proto musí být

$$60^\circ < 45^\circ + x_k < 120^\circ$$

neboli

$$15^\circ < x_k < 75^\circ .$$

Odtud dostaneme vzhledem ke vztahu /xx/

$$\frac{17}{24} < k < \frac{85}{24} ,$$

tj. $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$. Snadno se přesvědčíme, že vrcholy $[z_1]$, $[z_2]$, $[z_3]$ daného sedmnáctiúhelníka skutečně vyhovují úloze.

IV.4 Je-li x kořen rovnice

$$\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} + \frac{1}{x - c} = 0 ,$$

vyhovuje také rovnici

$$(x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) + (x - a)(x - b) = 0 ,$$

a tedy také rovnici

/x/ $$3x^2 - 2(a + b + c)x + (ab + bc + ca) = 0 .$$

Tato kvadratická rovnice má diskriminant

$$D = 4(a + b + c)^2 - 12(ab + bc + ca)$$

po úpravě

$$D = 4\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right) =$$
$$= 2\left(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca\right),$$

tj.

$$D = 2\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right] > 0,$$

neboť $a \neq b \neq c \neq a$.

Protože a, b, c jsou reálná čísla, má rovnice /x/ dva reálné kořeny. Tyto kořeny vyhovují také dané rovnici, neboť jsou vesměs různé od a, b, c. Dokážeme nepřímo např., že je kořen $\frac{2(a + b + c) + \sqrt{D}}{6}$ různý od a.

Připustíme, že je

$$\frac{1}{3}(a + b + c) + \frac{1}{3}\sqrt{D} = a .$$

Pak je

$$a + b + c + \sqrt{D} = 3a$$

neboli

$$\sqrt{D} = 2a - b - c .$$

Po umocnění

$$4\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right) = 4a^2 + b^2 + c^2 - 4ab - 4ac + 2bc$$

neboli

$$3b^2 + 3c^2 - 6bc = 0$$

neboli

$$3(b - c)^2 = 0 ;$$

to je však ve sporu s předpokladem $b \neq c$.

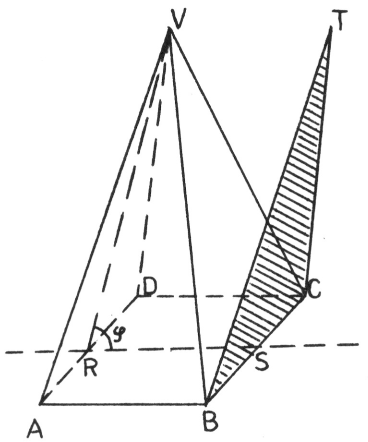
V.4 Každý z trojúhelníků BXY je pravoúhlý /$\sphericalangle BXY = 90^\circ$/ a rovnoramenný /$BX = XY$/. Proto je

$$\sphericalangle YBX = 45^\circ .$$

Bod Y vznikne z bodu X tím, že aplikujeme na X stejnolehlost $\mathcal{H}$ se středem B a koeficientem $\sqrt{2}$; tím vznikne bod $Z = \mathcal{H}(X)$. Bod Y vznikne z bodu Z tím, že aplikujeme na Z otočení R se středem B o úhel 45° ve vhodném smyslu otočení. Podobnost $\mathcal{H}R$ převede otevřený oblouk $\widehat{AB}$ v otevřený oblouk $\widehat{EAB}$.

VI.1 Jde o řešení rovnice $\sqrt{9 - 5p^2} = 3p - 1$. Možná řešení jsou $p = 1$, $p = -\frac{4}{7}$, z nichž číslo $-\frac{4}{7}$ nevyhovuje, neboť $3.\left(-\frac{4}{7}\right) - 1 < < 0$. Úloha má jediné řešení $p = 1$.

VI.2 Výpočet vzdálenosti mimoběžek VA, BC. Předpokládáme znalost věty o vzdálenosti dvou mimoběžek: vzdálenost mimoběžek p, q je vzdálenost dvou rovin ρ, σ, kde ρ obsahuje přímku p a je



Obr. 9

rovnoběžná s přímkou q a σ obsahuje přímku q a je rovnoběžná s přímkou p.

V našem případě je $p = AV$, $q = BC$, $\rho = ADV$, $\sigma = BCT$ /vyšrafovaná rovina/. Vzdálenost rovin ρ , σ se objevuje v $\triangle RSV$, kde R, S jsou po řadě středy hran AD, BC. Trojúhelník RSV je rovnoramenný se základnou $RS = 2d$ a s úhly velikosti φ při základně. Odtud plyne

$$v = 2d \sin \varphi .$$

VI.3 Vyjdeme ze vzorce

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{2 \operatorname{cotg}\alpha} .$$

Nechť $\operatorname{cotg}\alpha = m$, $\operatorname{cotg} 2\alpha = n$ jsou celá čísla. Pak je

$$m^2 - 1 = 2\,mn ,$$

tj.

$$m(m - 2n) = 1 .$$

Je tedy buď

$$m = 1 , \quad m - 2n = 0$$

nebo

$$m = -1 , \quad m - 2n = -1 .$$

Je tedy buď $m = 1$, $n = 0$ nebo $m = -1$, $n = 0$. Odtud dostáváme $\operatorname{cotg}\alpha = \pm 1$, $\operatorname{cotg} 2\alpha = 0$, $\alpha = 45^\circ + k.90^\circ$, kde k je celé číslo.

VII.1 Čísla x, p pokládejme za proměnné souřadnice. Každá dvojice $[x, p]$, která vyhovuje rovnici

/x/ $$x + \sqrt{2p - x^2} = 8 ,$$

vyhovuje i rovnici

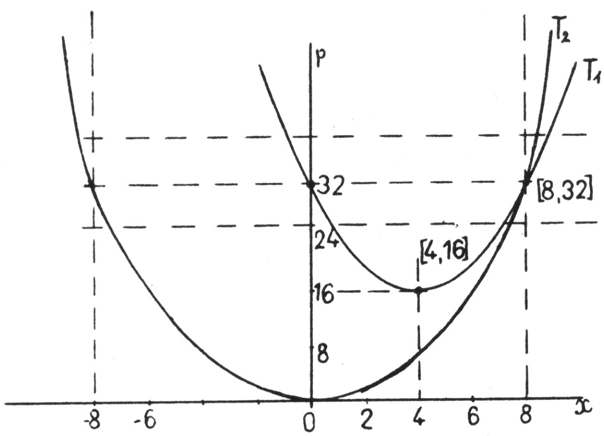
/xx/ $$x^2 - 8x + (32 - p) = 0 .$$

Množina M, která je grafem rovnice /xx/, obsahuje množinu M′, která je grafem rovnice /x/ neboli rovnice

/xxx/ $$(x - 4)^2 = p - 16 .$$

Graf rovnice /xxx/ je parabola, jejíž osa je rovnoběžná s osou p a která má vrchol $[4, 16]$. Omezující podmínky jsou $8 - x \geqq 0$ neboli $x \leqq 8$ a $2p - x^2 \geqq 0$ neboli $p \geqq \frac{1}{2} x^2$. Graf rovnice $p = \frac{1}{2} x^2$ je parabola T_2. Vzhledem k nerovnici $p \geqq \frac{1}{2} x^2$ jsou řešení ve vnitřku paraboly T_2. Z obr. 10 vyčteme:

$p > 32$	jediné řešení
$16 \leqq p \leqq 32$	dvě řešení
$p = 16$	dvě splývající řešení
$p < 16$	žádné řešení



Obr. 10

VII.3 Zřejmě je $\sqrt{2 + \frac{5}{2} \cos x} \geqq 0$, $\sin x \geqq 0$, a tedy

$$2 + \frac{5}{2} \cos x \leqq \sin^2 x .$$

Po úpravě

$$2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 \leqq 0$$

a dále

/x/ $$\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)\left(\cos x + 2\right) \leqq 0 .$$

Z nerovnice /x/ plyne buď

$$\cos x + \frac{1}{2} \geqq 0 \qquad \text{a zároveň} \qquad \cos x + 2 \leqq 0$$

neboli $\cos x \leqq -2$, což nedává žádný kořen dané nerovnice. Nebo z /x/ plyne

$$\cos x + \frac{1}{2} \leqq 0 \qquad \text{a zároveň} \qquad \cos x + 2 \geqq 0 \,.$$

Je tedy

/xx/ $$-2 \leqq \cos x \leqq -\frac{1}{2} \,.$$

Připojíme-li k /xx/ ještě podmínky $\sin x \geqq 0$, $2 + \frac{5}{2} \cos x \geqq 0$ neboli $\cos x \geqq -\frac{4}{5}$, dostaneme

$$-\frac{4}{5} \leqq \cos x \leqq -\frac{1}{2} \qquad \text{a zároveň} \qquad \sin x \geqq 0$$

a pro úhel x

$$\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leqq x \leqq \varphi + 2k\pi \qquad \text{/k číslo celé/.}$$

Přitom úhel φ je určen vztahy $\cos \varphi = -\frac{4}{5}$, $\sin \varphi \geqq 0$. Zkouškou ověříme, že tyto úhly x jsou opravdu řešením dané nerovnice.

VIII.1 Hledaný pravoúhlý trojúhelník doplníme na rovnoběžník ABCD a lokalizujeme úsečku $BD = 2t_b$. Úkolem je sestrojit bod A. Označíme T těžiště $\triangle ABC$ a B' střed odvěsny AC. Bod A pak leží jednak na kružnici $m = \left(T, \frac{2}{3} t_a\right)$, jednak na Thaletově kružnici k nad průměrem $B'D$. Diskuse dá podmínku řešitelnosti

$$t_a < 2\,t_b \qquad \text{a zároveň} \qquad t_b < 2\,t_a \,.$$

VIII.2 Vzhledem k třetí podmínce jsou buď všecka tři čísla a, b, c kladná, nebo je jedno z nich kladné a dvě záporná. Vyvrátíme, že je $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$. Podle druhé podmínky je

/x/ $$ab > -c(a + b) \,.$$

Z první podmínky je

$$a + b > -c$$

a dále

$$(a + b)(-c) > (-c)(-c)$$

neboli

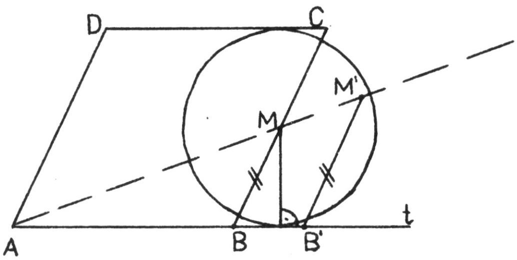
$$-c(a + b) > c^2 \,.$$

Spojením s /x/ dostaneme

$$ab > c^2 \,,$$

což je ve sporu se vztahy $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$.

IX.3 Sestrojíme nejprve přímku, na které leží bod B. Je to tečna t vedená z bodu A ke kružnici $k = \left(M, \frac{v}{2}\right)$. Na této tečně t zvolíme bod $B' \neq A$ a na přímce AM sestrojíme bod M' tak, aby



$AB' = 2B'M'$

Obr. 11

bylo $AB' = 2B'M$. Rovnoběžka s přímkou BM' vedená bodem M protne tečnu t v bodě B. Trojúhelník ABM doplníme na hledaný kosočtverec /obr. 11/. Diskuse ukáže, že podmínka řešitelnosti je

$$2d > v$$

a že úloha má nejvýše 4 řešení. Kosočtverec může přejít ve čtverec, právě když platí

$$2d = \sqrt{5}\, v\ .$$

IX.4 Pro existenci odmocnin je nutné a stačí, aby platilo $\frac{x^2}{4} \leqq 1$, $\frac{x^2}{2} \leqq 1$. Definiční obor je sjednocení množiny všech záporných čísel a všech nezáporných čísel x, pro něž platí

$$a \leqq x \leqq \sqrt{2}\ .$$

Vyšetříme obě tyto množiny.

a/ $x \leqq 0$. Označíme $1 - \frac{x^2}{4} = a$; pak je $1 - \frac{x^2}{2} = 2a - 1$. +/

Pak je postupně

$$y = \sqrt{a + \sqrt{2a - 1}} - \sqrt{a - \sqrt{2a - 1}}$$

$$y^2 = a + \sqrt{2a - 1} + a - \sqrt{2a - 1} - 2\sqrt{\left(a + \sqrt{2a - 1}\right)\left(a - \sqrt{2a - 1}\right)}$$

$$y^2 = 2a - 2\sqrt{a^2 - (2a - 1)}$$

$$y^2 = 2a - 2\left(1 - a\right) = 4a - 2\ ,$$

neboť $a - 1 \leqq 0$. Dále je

$$y^2 = 4\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) - 2 \qquad \text{čili} \qquad x^2 + y^2 = 2\ .$$

b/ $x < 0$. Označíme $1 + \frac{x^2}{4} = b$; pak je $1 + \frac{x^2}{2} = 2b - 1$.

Obdobně jako v odstavci a/ dostaneme

$$y = \sqrt{b + \sqrt{2b - 1}} - \sqrt{b - \sqrt{2b - 1}}$$

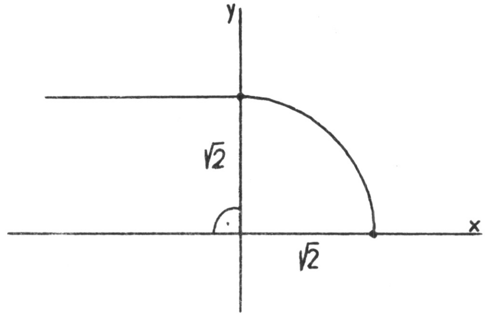
a odtud

$$y^2 = 2b - 2\left(b - 1\right) = 2 \qquad \text{neboli} \quad y \geqq 0\ .$$

+/ Počtářský trik.

Je totiž $b - 1 = \frac{x^2}{4} \geqq 0$.

Graf funkce je zřejmě



Obr. 12

X.1 Členy dané posloupnosti zařadíme do skupin podle následujícího vzoru:

Členy posloupnosti	1	2, 2	3,3,3	4,4,4,4	...	n,n,...,n
Index skupiny	1	2	3	4	...	n

Index skupiny udává zároveň čísla skupiny i počet členů, které skupina má. Prvních n skupin obsahuje

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n + 1)$$

členů dané posloupnosti.

Je-li tisící člen posloupnosti v n-té skupině, je $S_n \geqq 1000$, neboli

$$\frac{1}{2} n(n + 1) \geqq 1000 .$$

Po úpravě dostaneme požadavek formulovaný nerovnicí

/x/ $$n^2 + n - 2000 \geqq 0 .$$

Nerovnice /x/ má kořeny

$$n_1 = \frac{1}{2} \left(- 1 + \sqrt{8001}\right) > 0 ,$$

$$n_2 = \frac{1}{2} \left(- 1 - \sqrt{8001}\right) < 0 .$$

Zřejmě musí platit $n \geqq n_1$. Ale protože je $90 > \sqrt{8001} > 89$ a dále

$$n_1 > \frac{- 1 + 89}{2} = 44$$

$$n_1 < \frac{- 1 + 90}{2} = 44,5$$

Vztah $n \geqq n_1$ platí tedy pro všechna přirozená čísla n větší nebo rovná číslu 45. Tisící člen je tedy ve skupině S_{45} a je 45 .

X.3 Označme T /v sekundách/ čas, který uplynul od startu cyklistů až do jejich prvního potkání; dále označme o obvod kruhové dráhy; pak platí:

$$Tc_1 + Tc_2 = o$$

neboli

/x/ $$T = \frac{o}{c_1 + c_2} .$$

Za dobu xT, kde x je přirozené číslo, dojde k n potkáním; označíme-li t čas od startu cyklistů až do určitého okamžiku mezi x-tým a $(x + 1)$-ním setkáním, potom platí

/xx/ $$xT \leqq t < (x + 1)T .$$

Objel-li v okamžiku t první cyklista obvod právě n-krát, pak platí $o.n = c_1 t$, tj.

/xxx/ $$t = \frac{o.n}{c_1} .$$

Dosadíme-li z /x/, /xxx/ do /xx/, dostaneme

$$x \frac{o}{c_1 + c_2} \leqq \frac{o.n}{c_1} < (x + 1) \frac{o}{c_1 + c_2}$$

a po úpravě

$$x \leqq n \frac{c_1 + c_2}{4} < x + 1$$

neboli

$$x = \left[n \frac{c_1 + c_2}{c_1} \right] ,$$

kde $[k]$ značí funkci "celá část z čísla k".

V daném číselném příkladě je

$$x = \left[11 . \frac{17}{10} \right] = [18,7] = 18 .$$

Cyklista tedy objel dráhu 11krát, cyklisté se potkali 18krát.

XI.1 Daný trojčlen rozložíme na súčin lineárnych faktorov:

$$2x^2 - x - 36 = (2x - 9)(x + 4).$$

Podmienky úlohy môžu byť zrejme splnené len pre také čísla x, pre ktoré jeden z faktorov rozkladu nadobúda niektorú z hodnôt ± 1, $\pm p$, $\pm p^2$, kde p je prvočíslo a druhý zároveň v uvedenom poradí hodnotu $\pm p^2$, $\pm p$, ± 1. Vyšetríme postupne jednotlivé prípady:

a/ V prípade $2x - 9 = 1$, $x + 4 = p^2$ dostaneme z prvej rovnice $x = 5$, čo vyhovuje aj druhej rovnici pre prvočíslo $p = 3$.

b/ Pre $2x - 9 = - 1$, $x + 4 = - p^2$ dostaneme z prvej rovnice $x = 4$, čo však nevyhovuje druhej rovnici pre žiadne prvočíslo p.

c/ V prípade $x + 4 = 1$, $2x - 9 = p^2$ dostaneme z prvej rovnice $x = - 3$ a z ľavej strany druhej rovnice po dosadení $2x - 9 = - 15$, čo nie je druhá mocnina prvočísla.

d/ Ak $x + 4 = -1$, $2x - 9 = -p^2$, dostávame z prvej rovnice $x = -5$ a z druhej po dosadení $2x - 9 = -19$, čo opäť nie je druhá mocnina prvočísla.

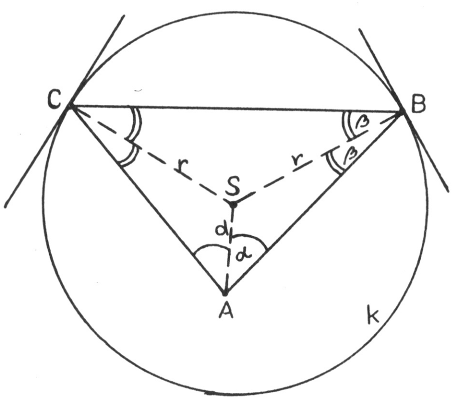
e/ V prípade $x + 4 = \pm p$, $2x - 9 = \pm p$ musí byť $x + 4 = 2x - 9$, z čoho dostávame $x = 13$. Potom však $(x + 4)(2x - 9) = 17^2$, čo je druhá mocnina prvočísla.

Úloha má tedy dve riešenia: $x = 5$, $x = 13$.

XI.4 Pri riešení úlohy vyjdeme zo známeho fyzikálneho zákona, podľa ktorého uhol dopadu a uhol odrazu svetelného lúča sú si rovné. Kolmicou ku krivke odrazu je normála kružnice k, ktorá prechádza jej stredom S. Dráhou svetelného lúča je obvod trojuholníka ABC /obr. 13/. Podľa podmienok úlohy je teda bod S priesečníkom osí uhlov tohto trojuholníka pri vrcholoch B a C a polpriamka AS je osou uhla pri vrchole A. Označme $\measuredangle SAB = \alpha$, $\measuredangle SBA = \beta$ /obr. 13/. Potom z trojuholníka SAB podľa sínusovej vety vyplýva

$$/1/ \qquad d \sin\alpha = r \sin\beta .$$

K tomu, aby sme z /1/ určili $\sin\alpha$ pomocou r a d, potrebujeme vyjadriť β pomocou α. Z toho, že trojuholník SBC je rovnoramenný vyplýva, že $\measuredangle SCB = \beta$. Vzhľadom na to, že polpriamka AS je osou uhla pri vrchole A, je zrejme $\measuredangle SAC = \alpha$. Pre veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC teda platí $2\alpha + 4\beta = 180^\circ$ čiže $\alpha = 90^\circ - 2\beta$. Ak túto hodnotu dosadíme za α do /1/, vyjadríme ľahko $\sin\beta$ a po opätovnom dosadení za $\sin\beta$ do /1/ už dostaneme hľadané $\sin\alpha$. Teda



Obr. 13

$$d \sin (90^\circ - 2\beta) = r \sin \beta ,$$

čiže

$$d \cos 2\beta = r \sin \beta ,$$

z čoho

$$d(1 - 2 \sin^2 \beta) = r \sin \beta ,$$

odkiaľ

/2/ $$2d \sin^2 \beta + r \sin \beta - d = 0 .$$

Pretože podľa predpokladu $d \neq 0$, z /2/ vyplýva

/3/ $$\sin \beta = \frac{- r \pm \sqrt{r^2 + 8d^2}}{4d} .$$

Diskriminant rovnice /2/ je zrejme číslo kladné, ale pretože uhol β je dutý, je $\sin \beta > 0$ a z koreňov /3/ tejto podmienke vyhovuje len koreň so znamienkom +. Je teda

/4/ $$\sin \beta = \frac{\sqrt{r^2 + 8d^2} - r}{4d} .$$

Prežože $\sqrt{r^2 + 8d^2} > \sqrt{r^2} = r$, je zlomok v /4/ číslo kladné. Ľahko sa presvedčíme, že musí byť tiež menšie než 1. V opačnom prípadě by totiž platilo $\sqrt{r^2 + 8d^2} - r \geqq 4d$, z čoho po úprave dostaneme $8d(d + r) \leqq 0$, čo nie je možné.

Ak teraz dosadíme zo /4/ do /1/, dostaneme

$$\sin \alpha = r \frac{\sqrt{r^2 + 8d^2} - r}{4d^2} .$$

XII.2 Číslo $2k$, kde k je celé kladné číslo rozložme na súčet prirodzených čísel x a $y = 2k - x$. Označenie zvolíme tak, aby platilo $x \leqq y$. Potom je $xy = x(2k - x) = k^2 - (k - x)^2$. Prirodzené číslo xy je najväčšie práve vtedy, keď je $k - x = 0$ čiže $x = k$. Dostávame tak rozklad $k + k$, ktorý však vyhovuje požiadavke nesúdeliteľnosti oboch sčítancov len pre $k = 1$.

Uvažujme teraz o prípadoch, keď je $k > 1$. Označme $k - x = n$, kde n je prirodzené. Súčin $xy = k^2 - n^2$ bude tým väčší, čím je n menšie. Rozlišujme prípady, keď je k číslo párne, resp. nepárne.

Ak je k párne, potom pre $n = 1$ sú $k - 1$, $k + 1$ nepárne čísla s rozdielom 2. Z toho vyplýva, že majú len spoločného deliteľa 1 a sú teda nesúdeliteľné. V tomto prípade je hľadaným rozkladom $(k + 1) + (k - 1)$.

Nech je $k > 1$ číslo nepárne. V tomto prípade sú čísla $k - 1$, $k + 1$ párne čísla so spoločným deliteľom 2 a nesplňujú tedy podmienku nesúdeliteľnosti. Čísla $k - 2$, $k + 2$ sú však nepárne s rozdielom 4, pričom čísla 2, 4 nie sú zrejme ich deliteľmi. Hľadaným rozkladom v tomto prípade tedy je $(k + 2) + (k - 2)$.

XIII.1 Keďže je $6\,000 = 3 \cdot 2\,000$, musíme o čísle $N = 11^{100} - 1$ dokázať, že je deliteľné oboma nesúdeliteľnými číslami $2\,000$ a 3.

Podľa binomickej vety platí

$$N = (10 + 1)^{100} - 1 = M + z ,$$

kde M, z sú prirodzené čísla, pretože kombinačné čísla sú zrejme čísla celé. Platí totiž

$$M = 10^{100} + \binom{100}{1}10^{99} + \dots + \binom{100}{96} 10^4 + \binom{100}{97} 10^3 =$$

$$= 10^4 \cdot a + 100 \cdot 33 \cdot 49 \cdot 10^3 = 10^4 \cdot b ,$$

kde a, b sú celé kladné čísla;

$$z = \binom{100}{98} 10^2 + \binom{100}{99} 10 = 50 \cdot 99 \cdot 100 + 1000 = 496\,000 .$$

Dekadický zápis čísla M končí teda štyrmi nulami a posledným štvorčíslím čísla N je preto posledné štvorčíslie čísla z, tj. $6\,000$. Z toho zároveň vyplýva, že číslo N je deliteľné číslom $2\,000$.

Ďalej platí

$$N = (12 - 1)^{100} - 1 = 12^{100} - \binom{100}{1}12^{99} + \dots - \binom{100}{1}12 + 1 - 1 =$$

$$= 12\,P = 3 \cdot 4P ,$$

kde číslo P je zrejme celé, pretože kombinačné čísla sú celé čísla. Z toho vyplýva, že číslo N je deliteľné tiež tromi, čím je tvrdenie úlohy dokázané.

XIII.3 Ak je $2 \cos\alpha - 1 = 0$, tj.

/1/ $$\alpha = \frac{\pi}{3} , \qquad \alpha = \frac{5\pi}{3},$$

potom rovnica

/2/ $$(2 \cos\alpha - 1)x^2 + 4x + 4 \cos\alpha + 2 = 0$$

má jediný koreň $x = -1$, ako sa ľahko presvedčíme. Hodnoty /1/ preto danej úlohe nevyhovujú.

Nech je teda $\alpha \neq \frac{\pi}{3}$, $\alpha \neq \frac{5\pi}{3}$ čiže $2 \cos\alpha - 1 \neq 0$. Kvadratická rovnica /2/ má potom diskriminant $D = 8(3 - 4 \cos^2\alpha)$. Reálne korene má preto práve vtedy, keď je $3 - 4 \cos^2\alpha \geqq 0$ čiže

/3/ $$|\cos\alpha| \leqq \tfrac{1}{2}\sqrt{3} .$$

Nerovnica /3/ je splnená práve vtedy, keď α patrí do niektorého z intervalov

/4/ $$\left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\rangle, \qquad \left\langle \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\rangle.$$

Rovnica /2/ má jeden koreň kladný a druhý záporný práve vtedy, keď

/5/ $$x_1x_2 = \frac{4\cos\alpha + 2}{2\cos\alpha - 1} < 0 .$$

Sú tieto dve možnosti:

a/ $2\cos\alpha - 1 > 0$ čiže α patrí do niektorého z intervalov $\left\langle 0, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\rangle$. Potom podľa /5/ je $2\cos\alpha + 1 < 0$, tj. $\cos\alpha < -\frac{1}{2}$ čiže α je z intervalu $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$. Je zrejmé, že tieto intervaly sú disjunktné a v tomto prípade úloha riešenie nemá.

b/ Nech $2\cos\alpha - 1 < 0$ čiže α je z intervalu $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ a vzhľadom na /4/ z intervalov

/6/ $$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right\rangle, \quad \left\langle\frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}\right) .$$

Pretože x_1x_2 je číslo záporné, je podľa /5/ $2\cos\alpha + 1 > 0$, tj. $\cos\alpha > -\frac{1}{2}$, čo znamená, že α patrí niektorému z intervalov

/7/ $$\left\langle 0, \frac{2\pi}{3}\right), \quad \left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\rangle .$$

Prienikom intervalov /6/, /7/ sú však intervaly

/8/ $$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right), \quad \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right),$$

ktoré dávajú riešenie úlohy.

Zostáva ešte preskúmať prípad, keď je jeden koreň rovnice /2/ kladný, druhý rovný nule. To nastane práve vtedy, keď je $x_1x_2 = 0$ a súčasne $x_1 + x_2 > 0$. Z /5/ však pre tento prípad vyplýva $2\cos\alpha + 1 = 0$, z čoho

/9/ $$\alpha = \frac{2\pi}{3}, \text{ resp. } \alpha = \frac{4\pi}{3} .$$

Ak platí /9/, potom je zrejme $2\cos\alpha - 1 = -2 \neq 0$ a súčasne $x_1 + x_2 = 2$, čo je číslo kladné. Spojením /8/, /9/ dostávame, že riešením úlohy sú všetky čísla α z intervalov

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\rangle, \quad \left\langle\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) .$$

XIV.1 Dané číslo možno vyjadriť v tvare

$$5 \cdot 2^2 \cdot 5^{2n} \cdot 2^n + 3^2 \cdot 2 \cdot 3^n \cdot 2^{2n} = 20 \cdot 50^n + 18 \cdot 12^n =$$

$= 19 \cdot 50^n + 19 \cdot 12^n + 50^n - 12^n$. Číslo $50^n - 12^n$ je však pre každé celé $n \geq 0$ deliteľné číslom $50 - 12 = 38 = 2 \cdot 19$. Z toho vyplýva, že dané číslo je deliteľné devätnástimi pre každé celé $n \geq 0$.

XIV.3 Predpokladajme, že x je riešením danej rovnice

/1/ $$\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 + 2x - 1} = p ,$$

kde p je dané reálne číslo. Potom zrejme musí platiť jednak

/2/ $$p \geqq 0 ,$$

jednak $x^2 - 2|x| - 1 \geqq 0$ čiže

/3/ $$(x^2 - 1)^2 \geqq 4x^2 .$$

Umocnením oboch strán v /1/ dostaneme

$$x^2 - 2x - 1 + x^2 + 2x - 1 + 2 \sqrt{(x^2 - 1)^2 - 4x^2} = p^2$$

čiže

/4/ $$2 \sqrt{(x^2 - 1)^2 - 4x^2} = p^2 - 2(x^2 - 1).$$

Z toho vyplýva, že

/5/ $$p^2 \geqq 2 (x^2 - 1) .$$

Umocnením /4/ dostaneme

$$4\left[(x^2 - 1)^2 - 4x^2\right] = p^4 - 4p^2(x^2 - 1) + 4(x^2 - 1)^2$$

čiže

/6/ $$4x^2 (p^2 - 4) = p^2 (p^2 + 4) .$$

Zo /6/ vyplýva

/7/ $$p^2 - 4 > 0$$

a za podmienky /7/ može rovnici /1/ vyhovovať len niektoré z čísel

/8/ $$x_{1,2} = \pm \frac{p}{2} \sqrt{\frac{p^2 + 4}{p^2 - 4}} .$$

Z /5/ a /8/ však pre p vyplýva podmienka

$$p^2 \geqq 2 \left(\frac{p^2 (p^2 + 4)}{4 (p^2 - 4)} - 1 \right)$$

a z toho vzhľadom na /7/

$$2 (p^2 - 4) p^2 \geqq p^2 (p^2 + 4) - 4 (p^2 - 4) ,$$

z čoho vyplýva

/9/ $$p^4 - 8p^2 - 16 \geqq 0 .$$

Z /9/ dostaneme

$$\left[p^2 - 4 (1 + \sqrt{2})\right] \left[p^2 + 4 (\sqrt{2} - 1)\right] \geqq 0 ,$$

odkiaľ dostaneme

$$p^2 \geqq 4 (1 + \sqrt{2})$$

a vzhľadom na /2/

/10/ $$p \geqq 2 \sqrt{1 + \sqrt{2}} .$$

Tým sme dokázali, že ak rovnica /1/ má riešenie, môže ním byť len niektoré z čísel /8/, pričom pre číslo p musí byť splnená podmienka /10/.

Na druhej strane však vtedy, keď je splnená podmienka /10/, obe čísla x_1, x_2 určené vzťahom /8/ existujú a vyhovujú vzťahom /5/ a /6/ a teda aj /4/. Zo /4/ a /5/ vyplýva správnosť /3/, obe odmocniny v /1/ sú definované a platí /1/. Dokázali sme teda, že daná rovnica má riešenie práve vtedy, keď platí /10/, a to dve riešenia určené vzťahom /8/.

XV.2 Počet častí, na ktoré rozdeľuje rovinu n kružníc uvedených vlastností, označme p_n. Pridajme k týmto n kružniciam ďalšiu kružnicu k tak, aby sústava $n + 1$ kružníc mala požadované vlastnosti. Kružnica k pretína každú z n pôvodných kružníc v 2 bodoch. Celkom tak dostaneme na k $2n$ bodov, ktoré ohraničujú $2n$ jej oblúkov. Ku každému z týchto oblúkov patrí jedna z p_n častí roviny, ktorá ním bola rozdelená na 2 časti. Znamená to teda, že pridanie kružnice k zapríčinilo vznik $2n$ ďalších častí roviny. Platí teda

/1/ $$p_{n+1} = p_n + 2n \, .$$

Z /1/ postupne dostaneme

/2/ $$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} + 2(n-1), \\ p_{n-1} &= p_{n-2} + 2(n-2), \\ p_{n-2} &= p_{n-3} + 2(n-3), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ p_2 &= p_1 + 2 \, . \, 1 \end{aligned}$$

Sčítaním všetkých rovností /2/ dostaneme

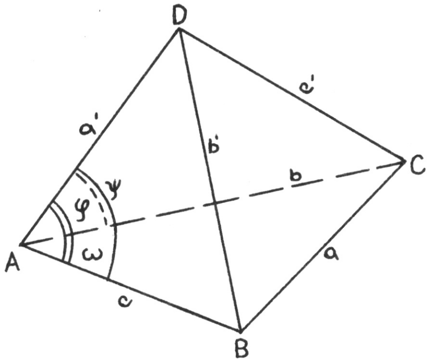
/3/ $$p_n = p_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k \, .$$

Druhý sčítanec v /3/ sa rovná $\frac{1}{2}(2 + 2n - 2).(n - 1) = n(n - 1)$ a pretože $p_1 = 2$ /vnútro a vonkajšok kružnice/, je

/4/ $$p_n = n(n-1) + 2 = n^2 - n + 2 \, .$$

Správnosť /4/ dokážeme pomocou /1/ matematickou indukciou: Pre $n = 1$ dostaneme zo /4/ skutočne $p_1 = 2$. Nech teraz platí /4/. Potom vzhľadom na /1/ je $p_{n+1} = p_n + 2n = n^2 - n + 2 + 2n = n^2 + n + 2 = (n + 1)^2 - (n + 1) + 2$, čo znamená, že /4/ platí aj pre $n + 1$.

XVI.2 Označme $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AD| = a'$, $|BD| = b'$, $|CD| = c'$.



Obr. 14

Potom dané rovnosti možno zapísať v tvare

/1/ $a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2$.

Vyšetrujme veľkosti uhlov $\sphericalangle$BAD, $\sphericalangle$CAD a $\sphericalangle$BAC pri vrchole A. Označme ich /obr. 14/: $\sphericalangle BAD = \varphi$, $\sphericalangle CAD = \psi$, $\sphericalangle BAC = \omega$. Podľa kosínusovej vety je

/2a/ $2a'c \cos \varphi = a'^2 + c^2 - b'^2$,

/2b/ $2a'b \cos \psi = a'^2 + b^2 - c'^2$.

/2c/ $2bc \cos \omega = b^2 + c^2 - a^2$.

Z /1/ však vyplýva

/3a/ $a'^2 - b'^2 + c^2 = b^2 + c^2 - a^2$,

/3b/ $a'^2 - c'^2 + b^2 = b^2 + c^2 - a^2$.

Spojením vzťahov /2abc/ a /3ab/ zistíme, že čísla $\cos \varphi$, $\cos \psi$ a $\cos \omega$ sú súčasne všetky tri buď kladné alebo záporné alebo rovné nule. Je teda buď $\varphi = \psi = \omega = \frac{\pi}{2}$ alebo $\varphi < \frac{\pi}{2}$, $\psi < \frac{\pi}{2}$, $\omega < \frac{\pi}{2}$ alebo $\varphi > \frac{\pi}{2}$, $\psi > \frac{\pi}{2}$, $\omega > \frac{\pi}{2}$.

Rovnaký výsledok však dostaneme aj pre uhly pri vrcholoch B, C, D štvorstena ABCD.

Ak je teraz trojuholník ABC ostrouhlý, netreba už nič dokazovať. Nech je trojuholník ABC pravouhlý alebo tupouhlý a to tak, že $\omega \geqq \frac{\pi}{2}$. Potom však na základe vyššie uvedeného je tiež $\varphi \geqq \frac{\pi}{2}$ a $\psi \geqq \frac{\pi}{2}$. Z toho ale súčasne vyplýva, že pri každom z vrcholov B, C, D je aspoň jeden uhol ostrý. Podľa predchádzajúceho to zároveň znamená, že všetky uhly pri vrcholoch B, C, D sú ostré čiže trojuholník BCD je ostrouhlý.

XVII.2 a/ Uvažujme najskôr o prípade, keď n je číslo prirodzené. Potom na základe binomickej vety platí

$$a_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} 2^{n-k}.(\sqrt{3})^k - (-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k}.(\sqrt{3})^k\right]}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \binom{n}{1} . 2^{n-1} + \binom{n}{3} 2^{n-3}. 3 + \binom{n}{5}. 2^{n-5}. 3^2 + \dots$$

čiže a_n je celé číslo. Ďalej je zrejmé, že všetky členy súčtu, ktorým je vyjadrené, s výnimkou najviac prvého, sú deliteľné troma. Preto a_n je deliteľné troma práve vtedy, keď je $\binom{n}{1}. 2^{n-1} = n\, 2^{n-1}$ deliteľné troma a vzhľadom na to, že 2^{n-1} nie je troma deliteľné, práve vtedy, keď je troma deliteľné číslo n.

b/ Pre $n = 0$ platí:

$$a_0 = \frac{1-1}{2\sqrt{3}} = 0 .$$

Číslo a_0 je teda celé a deliteľné troma.

c/ Nech n je celé záporné číslo. Keďže platí

$$2 + \sqrt{3} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} ,$$

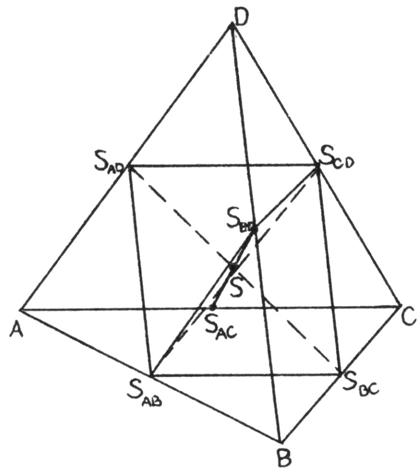
je

$$a_n = \frac{(2-\sqrt{3})^{-n} - (2+\sqrt{3})^{-n}}{2\sqrt{3}} = - a_{-n} .$$

Číslo $-n$ je prirodzené a preto vzhľadom na výsledok časti a/ je číslo a_n celé a deliteľné troma práve vtedy, keď je $-n$ a teda tiež n deliteľné troma.

Dokázali sme teda, že číslo a_n je celé pre každé celé n a deliteľné troma práve vtedy, keď je n deliteľné troma.

XVII.4 Označme stredy úsečiek AB, AC, AD, BC, BD, CD v uvedenom poradí S_{AB}, S_{AC}, S_{AD}, S_{BC}, S_{BD}, S_{CD} /obr. 15/. Nech je S stred úsečky $S_{AB}S_{CD}$ /o prípade $S_{AB} \equiv S_{CD}$ budeme uvažovať zvlášť; zatiaľ predpokladajme, že body S_{AB}, S_{AC}, S_{AD}, S_{BC}, S_{BD}, S_{CD} sú navzájom rôzne/. Podľa známej planimetrickej vety je $S_{AB}S_{AD} \parallel BD$ a tiež $S_{BC}S_{CD} \parallel BD$, z čoho vyplýva, že $S_{AB}S_{AD} \parallel S_{BC}S_{CD}$. Analogicky sa ukáže, že $S_{AD}S_{CD} \parallel S_{AB}S_{BC}$. Štvoruholník $S_{AB}S_{BC}S_{CD}S_{AD}$ je teda rovnobežník a bod S je súčasne stredom úsečky $S_{AD}S_{BC}$. Platí preto: $|SS_{AB}| = |SS_{BC}| = |SS_{CD}| = |SS_{AD}|$ a pretože $AC \perp BD$ a $S_{AB}S_{BC} \parallel AC$, $S_{BC}S_{CD} \parallel BD$, je $S_{AB}S_{BC} \perp S_{BC}S_{CD}$ a rovnobežník je zrejme obdĺžnikom,



Obr. 15

čo znamená, že tiež $|SS_{BC}| = |SS_{CD}|$.

Analogicky sa dokáže, že $S_{AB}S_{BD}S_{CD}S_{AC}$ je obdĺžnik a teda platí: $|SS_{AB}| = |SS_{BD}| = |SS_{AC}| = |SS_{CD}|$. Bod S je teda rovnako vzdialený od všetkých bodov S_{AB}, S_{AC}, S_{AD}, S_{BC}, S_{BD}, S_{CD} čiže existuje guľová plocha so stredom S, ktorá všetkými týmito bodmi prechádza.

Zostáva ešte preskúmať prípad $S_{AB} \equiv S_{CD}$. Ak by tento prípad nastal, boli by body A, B, C, D vrcholmi rovnobežníka $ABCD$, v ktorom $AD \parallel BC$. Vzhľadom na predpoklad $AD \perp BC$ to však nie je možné. Analogicky sa vylúčia prípady $S_{AC} \equiv S_{BD}$, $S_{AD} \equiv S_{BC}$.

XVIII.1 Nech x, y je dvojica racionálnych čísel, pre ktoré platí

/1/ $$(x + y\sqrt{5})^2 = 7 + 3\sqrt{5}\ .$$

Potom

$$x^2 + 5y^2 + 2xy\sqrt{5} = 7 + 3\sqrt{5}$$

čiže

$$x^2 + 5y^2 - 7 = (3 - 2xy)\sqrt{5}\ .$$

Ak by bolo $3 - 2xy \neq 0$, bolo by

$$\sqrt{5} = \frac{x^2 + 5y^2 - 7}{3 - 2xy}$$

racionálne číslo, čo však nie je pravda. Dostávame teda $2xy = 3$, tj.

/2/ $$xy = \frac{3}{2}$$

a súčasne

/3/ $$x^2 + 5y^2 = 7 .$$

Umocnením /3/ na druhú dostaneme

/4/ $$x^4 + 10x^2y^2 + 25y^4 = 49$$

a z /2/ analogicky dostaneme

/5/ $$20x^2y^2 = 45 .$$

Po odčítaní /5/ od /4/ máme

$$x^4 - 10x^2y^2 + 25y^2 = 4$$

čiže

$$(x^2 - 5y^2)^2 = 4 .$$

Je teda buď

/6/ $$x^2 - 5y^2 = 2$$

alebo

/7/ $$x^2 - 5y^2 = - 2 .$$

Sčítaním /3/ a /6/ dostaneme $2x^2 = 9$ čiže $x^2 = \frac{9}{2}$, čo však nie je možné, pretože x je podĺa predpokladu racionálne číslo.

Sčítaním /3/ a /7/ analogicky dostaneme $2x^2 = 5$ čiže $x^2 = \frac{5}{2}$, čo opäť vedie k sporu s predpokladom racionálnosti čísla x.

Zistili sme teda, že neexistuje žiadna dvojica x, y požadovaných vlastností.

XVIII.4 Daná nerovnica je zrejme ekvivalentná s nerovnicou

/1/ $$\left| z - |z + |z|| \right|^2 \geqq 3|z|^2 ,$$

ktorej vyhovuje číslo $z = 0$.

Nech teraz $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, kde $r > 0$, $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$ sú reálne čísla, vyhovuje nerovnici /1/. Potom zrejme platí

$$\left| r(\cos \varphi + i \sin \varphi) - |r(\cos \varphi + i \sin \varphi + r|\right|^2 \geqq 3r^2 ,$$

z čoho po vynásobení číslom r^{-2} a vyjadrení absolútnej hodnoty vo vnútri výrazu na ĺavej strane dostaneme

$$\left|\cos \varphi - \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} + i \sin \varphi\right|^2 \geqq 3 ,$$

čiže

$$\cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} + 2(1 + \cos \varphi) + \sin^2 \varphi \geqq 3 .$$

Z toho po jednoduchej úprave máme

/2/ $$\cos \varphi \geqq \cos \varphi \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} .$$

Z vykonaných úprav je zrejmé, že číslo $z \neq 0$ vyhovuje danej nerovnici práve vtedy, keď jeho amplitúda $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$ splňuje /2/.

Nerovnici /2/ vyhovujú zrejme všetky tie čísla φ, pre ktoré $\cos \varphi = 0$, tj. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ a $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Nech $\cos \varphi > 0$. Potom z /2/ máme $1 \geqq \sqrt{2(1 + \cos \varphi)}$, z čoho po umocnení na druhú a jednoduchej úprave dostávame nerovnicu $\cos\varphi \leq -\frac{1}{2}$, ktorá je v spore s predpokladom. Znamená to teda, že uhly φ, pre ktoré $\cos\varphi > 0$ nerovnici /2/ nevyhovujú.

Nech $\cos\varphi < 0$, potom z /2/ dostaneme

$$1 \leq \sqrt{2(1 + \cos\varphi)} \quad ,$$

z čoho analogicky ako v predchádzajúcom prípade dostaneme nerovnicu

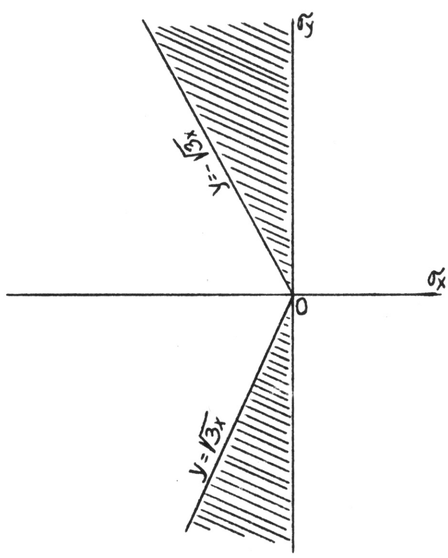
/3/ $$-\frac{1}{2} \leq \cos\varphi < 0 \ ,$$

ktorej vyhovujú práve tie čísla φ z uvažovaného intervalu, pre ktoré platí niektorý zo vzťahov

/4/ $$\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{2\pi}{3} \ , \qquad \frac{4\pi}{3} \leq \varphi < \frac{3\pi}{2} \ .$$

Pre riešenia nerovnice /3/ však zrejme platí $2(1 + \cos\varphi) \geq 1$ čiže $\sqrt{2(1 + \cos\varphi)} \geq 1$ a $\cos\varphi\sqrt{2(1 + \cos\varphi)} \leq \cos\varphi$, tj. vyhovujú nerovnici /2/.

Zistili sme teda, že danej nerovnici vyhovuje číslo $z = 0$ a tie čísla $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$, pre ktorých amplitúdy platí /4/. Množina riešení danej nerovnice je zobrazená na obr. 16.



Obr. 16

XIX.1 Pretože p je prvočíslo väčšie než 2, je nepárne a počet sčítancov na pravej strane je párny. Súčet na pravej strane možno preto upraviť takto:

$$\frac{a}{b} = \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p-2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}} + \frac{1}{\frac{p+1}{2}}\right) .$$

Dvojice sčítancov v zátvorkách možno sčítať:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p - n} = \frac{p - n + n}{n(p - n)} = \frac{p}{n(p - n)} .$$

Preto platí:

$$\frac{a}{b} = p \frac{č}{1 . 2 . \ldots . \frac{p - 1}{2} . \frac{p + 1}{2} . \ldots . (p - 1)} = \frac{p . č}{(p - 1)!} .$$

Čitateľ č je však číslo prirodzené, ktorého presnú hodnotu nepotrebujeme poznať, pretože platí

$$a . (p - 1)! = p . č . b .$$

Prvočíslo p však zrejme nedelí číslo $(p - 1)!$ a musí teda deliť číslo a, ako sme mali dokázať.

XIX.6 Ľavá strana danej nerovnice má podľa definície druhej odmocniny a logaritmickej funkcie zmysel pre všetky x, pre ktoré súčasne platí

$$\mathrm{tg}\, x - 1 \geqq 0 , \quad \mathrm{tg}\, x > 0 , \quad \mathrm{tg}\, x \neq 1, \quad 2 + 4 \cos^2 x > 0 .$$

Všetky tieto nerovnice sú súčasne splnené práve vtedy, keď je

/1/ $$\mathrm{tg}\, x > 1 .$$

Za tohto predpokladu však je daná nerovnica ekvivalentná nerovnici

/2/ $$\log_{\mathrm{tg}\, x}(2 + 4 \cos^2 x) \geqq 2 .$$

Danú nerovnicu možno teda nahradiť sústavou nerovníc /1/, /2/. Podľa /1/ je však základ logaritmu v nerovnici /2/ väčší než 1 a tak nerovnica /2/ je ekvivalentná nerovnici

/3/ $$2 + 4 \cos^2 x \geqq \mathrm{tg}^2 x .$$

Ak do /3/ dosadíme za $\cos^2 x = \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x + 1}$, čo platí pre všetky x, pre ktoré je definovaná funkcia tg x, dostaneme

/4/ $$\mathrm{tg}^4 x - \mathrm{tg}^2 x - 6 \leqq 0 ,$$

čo je nerovnica ekvivalentná nerovnici /3/. Zo /4/ jednoduchou úpravou dostaneme

$$\left(\mathrm{tg}^2 x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqq \frac{25}{4} ,$$

z čoho vzhľadom na /1/ vyplýva

$$\mathrm{tg}^2 x \leqq 3$$

čiže

/5/ $$- \sqrt{3} \leqq \mathrm{tg}\, x \leqq \sqrt{3} .$$

Spojením /1/ a /5/ dostaneme

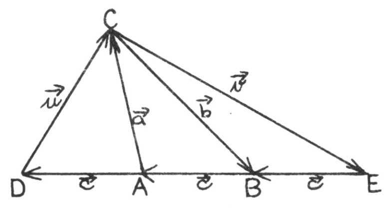
$$1 < \mathrm{tg}\, x \leqq \sqrt{3} ,$$

z čoho vyplýva, že sústave /1/, /2/ a teda aj danej nerovnici vyhovujú čísla

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi ,$$

kde k je ľubovoľné celé číslo.

XX.2 Označme $\vec{BA} = \vec{c}$, $\vec{AC} = \vec{a}$, $\vec{CB} = \vec{b}$, $\vec{DC} = \vec{u}$, $\vec{CE} = \vec{v}$. Potom $\vec{AD} = \vec{c}$, $\vec{EB} = \vec{c}$. /Obr. 17/



Obr. 17

Predpokladajme, že existujú také dĺžky úsečiek a, b, aby existoval trojuholník ABC tej vlastnosti, že $\measuredangle$ DCE je pravý. Potom platí:

/1/ $$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 .$$

Zrejme platí:

/2/ $$\vec{u} = \vec{a} - \vec{c} , \qquad \vec{v} = \vec{b} - \vec{c} ,$$

/3/ $$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o} ,$$

kde $\vec{o}$ je nulový vektor. Podľa /1/, /2/ platí

/4/ $$\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{c}(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \cdot \vec{c} = 0 .$$

Podľa /3/ však je

/5/ $$\vec{a} + \vec{b} = - \vec{c} ,$$

z čoho

/6/ $$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (\vec{c} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} - \vec{b}) .$$

Po dosadení z /5/ a /6/ do /4/ dostaneme teda

$$5\, \vec{c} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

čiže

/7/ $$5\, c^2 = a^2 + b^2 .$$

Ak, naopak v trojuholníku ABC platí /7/, potom sa obrátením postupu presvedčíme, že $\measuredangle$ DCE $= 90^o$.

K tomu, aby sme mohli zostrojiť trojuholník ABC požadovaných vlastností, musí platiť

$$|a - b| < c < a + b$$

čiže

$$a^2 + b^2 - 2ab < c^2 < a^2 + b^2 + 2ab$$

a vzhľadom na /7/ súčasne

$$c^2 = \frac{1}{5}\left(a^2 + b^2\right).$$

Znamená to teda, že musí súčasne platiť

$$4a^2 + 4b^2 - 10ab < 0 , \qquad 4a^2 + 4b^2 + 10ab > 0 .$$

Druhá z týchto nerovností je však splnená pre každé kladné a, b. Prvú nerovnosť upravíme na tvar

$$2\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5\left(\frac{a}{b}\right) + 2 < 0 ,$$

z ktorého dostaneme

/8/ $$\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2 .$$

Všetky úpravy, ktorými sme dostali podmienku /8/, boli ekvivalentné. Stačí teda splnenie tejto podmienky k tomu, aby trojuholník ABC bolo možno zostrojiť a uhol DCE bol pravý.

XXI.2 Použijeme rozkladu otáčení ve dvě rovinové souměrnosti, a to v konstantní souměrnost $\mathcal{S}_1$, která převede A v B a v proměnnou souměrnost $\mathcal{S}_2$ podle roviny ρ trsu B, při čemž $\rho \neq$ BCD.

Souměrnost $\mathcal{S}_1$ převede bod C v bod D, souměrnost $\mathcal{S}_2$ převede bod D v bod kulové plochy Γ, která má střed B a poloměr BD a z níž je vyloučen bod M polopřímky DC; M je určen podmínkou CM = CD. Kulová plocha Γ protne povrch krychle $ABCDA'B'C'D'$ ve čtvrtkružnicích $\widehat{A'C'}$, $\widehat{A'D}$, $\widehat{C'D}$ ležících po řadě ve stěnách $A'B'C'$, $AA'D$, DCC'. Sjednocení těchto tří čtvrtkružnic je hledaná množina všech bodů X .

XXI.5 /Nejkratší žákovské řešení/ Vytvoříme uspořádané dvojice disjunktních podmnožin množiny M. Pro libovolný prvek množiny M máme právě tři možnosti:

/1/ buď je prvkem první podmnožiny;

/2/ nebo je prvkem druhé podmnožiny;

/3/ nebo nepatří do žádné z těchto podmnožin.

Každý z případů /1/, 2/, /3/ má n možností. Je tedy 3^n možností.

XXII. Použijeme toho, že /pro každé přirozené $n \geq 2$/

$$\left[\sqrt{n^2 - 1}\right] = n - 1 ,$$

neboť

$$n - 1 \leqq \sqrt{n^2 - 1} < n - 1 + 1 .$$

Množinu $M = \left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \ldots, \sqrt{n^2 - 1}\right\}$ rozložíme na $n - 1$ disjunktních podmnožin A_i definovaných takto:

$$A_i = \left\{x \in M;\ [x] = i\right\} \qquad i = 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Nyní zjistíme počet p_i prvků množiny A_i. Nejmenším prvkem množiny A_i je zřejmě

$$\alpha_i = \sqrt{i^2} ;$$

Jejím největším prvkem je

$$\beta_i = \sqrt{(i + 1)^2 - 1} .$$

Zřejmě je

$$A_i = \left\{\alpha_i, \alpha_i + 1, \ldots, \beta_i\right\},$$

a proto

$$p_i = (i + 1)^2 - i^2 = 2i + 1 .$$

Z předchozího plyne pro každé $n \geqq 2$

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} \left[\sqrt{k}\right] = \sum_{i=1}^{n-1} i\ p_i = \sum_{i=1}^{n-1}(2i^2 + i) = 2\sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i .$$

Podle známých vzorců pro $\sum i$ a $\sum i^2$ dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} \left[\sqrt{k}\right] = \frac{2}{6}(n - 1) \cdot n(2n - 1) + \frac{1}{2}(n - 1)n ,$$

po úpravě hledaný vzorec

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} [k] = \frac{1}{6} n(n - 1)(4n + 1) .$$

<u>XXII.5.</u> Použijeme analytické geometrie v rovině s jednou komplexní souřadnicí. Místo symbolů +, . pro operace užijeme výraznějších znaků $*$ a $\bullet$. Je tedy

$$\alpha * \beta = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta \ ^{+/}$$

/1/

$$\alpha \bullet \beta = (1 - i)\alpha + i\beta .$$

Z první rovnice /1/ je patrno, že operace $*$ je komutativní, naproti tomu operace $\bullet$ není komutativní, neboť

$$(1 - i)\alpha + i\beta = (1 - i)\beta + i\alpha$$

dává

$$(1 - 2i)\alpha = (1 - 2i)\beta ,$$

což platí jen pro $\alpha = \beta$.

+/ Písmena α, β značí současně body roviny ρ i jejich komplexní souřadnice. Obdobně jiná písmena.

Zobrazení $x \mapsto x'$ z části /b/ a /c/ je charakterizováno vztahem

$$X' \bullet X = (A \bullet X) * B$$

neboli v souřadnicích

$$(1 - i)\ x' + ix = \tfrac{1}{2}(1 - i)a + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{b}{2}\ ,$$

po úpravě

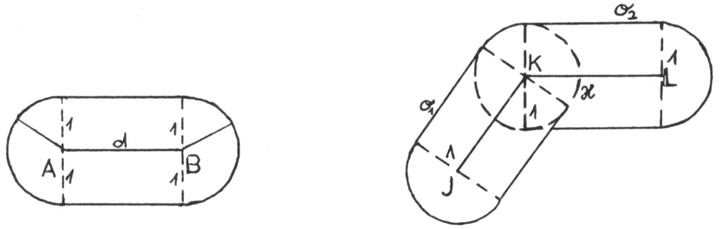
/2/ $$x' = \frac{1 - i}{4}x + \left(\frac{a}{2} + \frac{b(1 + i)}{4}\right).$$

Rovnice /2/ je podobnost přímá s koeficientem $\left|\frac{1 - i}{4}\right| = \frac{1}{\sqrt{8}}$. Její samodružný bod je jediný a dostaneme jej, položíme-li v /2/ $x' = x$. Pak vyjde

$$x = \frac{3 - i}{10}\left(2a + b + bi\right).$$

XXII.6 Nechť AB je libovolná úsečka čáry L. Utvořme ovál složený z pravoúhelníků o stranách 2, d a kružnice o poloměru 1; jeho obsah je $2d + \pi$. Tento ovál /obr. 18/ je množina všech bodů, které mají od některého bodu úsečky AB vzdálenost nanejvýš 1. Jsou-li JK, KL dvě sousední úsečky

Obr. 18



a/ b/

lomené čáry L, mají oba ovály σ_1, σ_2 jako průnik kruh se středem K, poloměrem 1 a obsahu π. Pro obsah P sjednocení všech oválů platí

/1/ $$P \leq \sum_{i=1}^{n} 2d_i + \pi = \pi + 2\sum_{i=1}^{n} d_i\ ,$$

kde d_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ jsou délky úseček lomené čáry L. Kdyby platilo

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \leq 1248$$

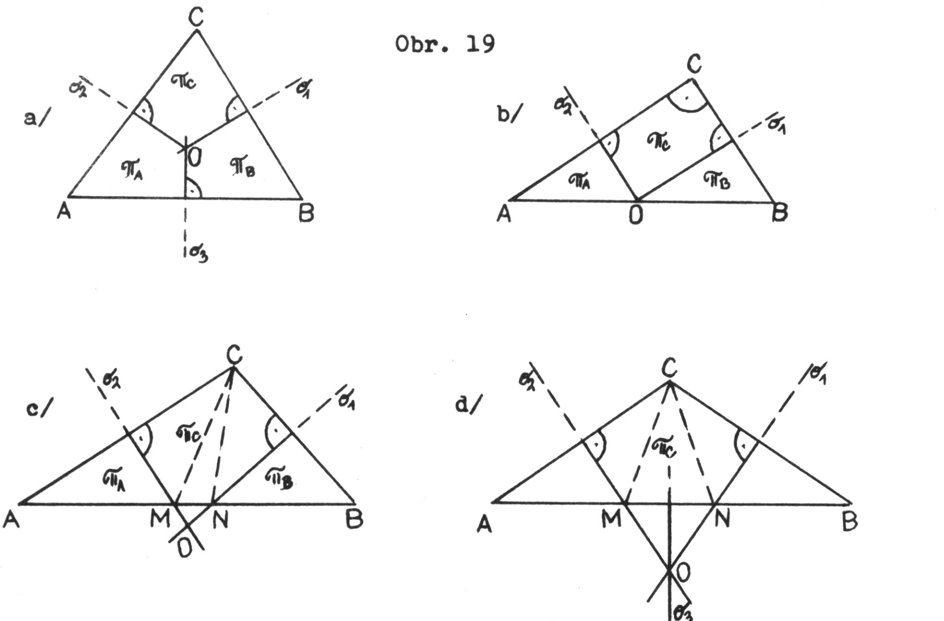
pro některou lomenou čáru L, plynulo by z /1/

$$P \leq \pi + 2496 < 2500 = 50^2\ .$$

To je však spor, neboť $P \geq 50^2$.

XXIII.2 Rozlišíme čtyři případy: I/ $\triangle$ ABC je ostroúhlý, II/ $\triangle$ ABC je pravoúhlý, III/ $\triangle$ ABC je tupoúhlý nerovnoramenný, IV/ $\triangle$ ABC je tupoúhlý rovnoramenný /obr. 19 a, b, c, d/.

Obr. 19



Označíme o_1, o_2, o_3 osy stran $\triangle$ ABC, O střed kružnice opsané. Π_A, Π_B, Π_C jsou množiny bodů, které mají za nejbližší vrcholy body A, B, C.

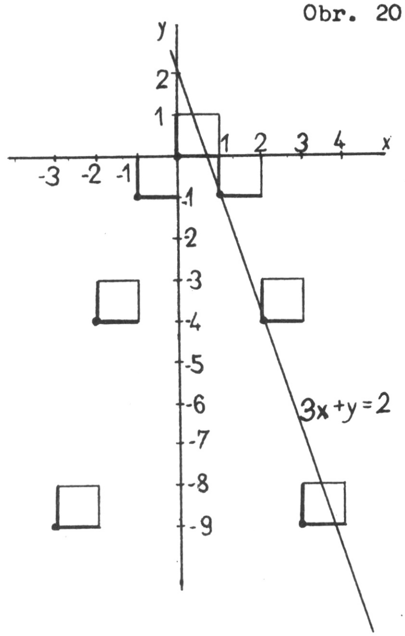
Snadno dokážeme, že na obr. 19 a/ nejdelší z úseček AX, které lze umístit do Π_A je úsečka AO. Obdobně tomu je v oblastech Π_B a Π_C. Největší z úseček AO, BO, CO je kterákoli z nich, neboť je AO = BO = CO. Úloha I má jediné řešení - bod O.

Obdobně tomu je s řešením případu II; také zde má úloha jediné řešení - bod O, který je středem přepony AB.

V případě III nechť je AC $>$ BC. Největší z úseček AX /X $\in \Pi_A$/ je AM /M, N jsou průsečíky os o_2, o_3 s úsečkou AB/, největší z úseček BX /X $\in \Pi_B$/ je BN. Mimo to je AM = CM, BN = CN. Protože je AC $>$ BC, je AM $>$ BN a úloha III má tedy jediné řešení - bod M.

Konečně v případě IV je AC = BC, AM = BN = CM = CN, případ IV má dvě řešení - body M, N.

XXIV.2 Sestrojíme nejprve graf rovnice $[x^2] + [y] = 0$. Na obr. 20 je tento graf, který se skládá z neuzavřených čtverců, k nimž náleží



Obr. 20

vždy levý dolní vrchol a polouzavřená levá a dolní strana. Levé dolní vrcholy jsou body paraboly $x^2 = y$ s celočíselnými souřadnicemi a na ně jsou "přivěšeny" jednotkové čtverečky.

Na obr. 20 je také graf přímky $3x + y = 2$. Snadno dokážeme, že tato přímka m ů ž e zasáhnout jen sedm naznačených čtverců. Všechna m o ž n á řešení jsou pro x

$\frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}$, $\frac{10}{3} < x \leq \frac{11}{3}$, $x = 1$,
$x = 2$.

Příslušná y vypočteme z rovnice
$3x + y = 2$.

XXIV.4 Pro všechna reálná z platí $|z| + z \geq 0$, přičemž rovnost platí jen tehdy, je-li $z \leq 0$. Upravíme danou rovnici na tvar

/1/ $$|x - 2| + |y - 3| + y - 3 = p - 3 .$$

Levá strana je podle předchozího rovna nule, právě když

$$x - 2 = 0 \qquad y - 3 \leq 0$$

a je vždy nezáporná. To znamená, že pro $p < 3$ nevyhovuje dané rovnici žádný bod, pro $p = 3$ je řešením polopřímka

$$x = 2,\ y \leq 3 .$$

Pro $p > 3$ dostáváme v polorovině $y \leq 3$ množinu řešení

$$|x - 2| = p - 3$$

tj. d v o j i c i p o l o p ř í m e k $x - 2 = \pm (p - 3)$. Úloha má tedy jediné řešení $p = 3$.

XXIV.6 Považujme dvojice (x, y) za vektory v dvojrozměrném bodovém prostoru R_2. Podle textu úlohy obsahuje množina M aspoň jeden vektor (a, b) a obsahuje-li dva vektory (x_1, y_1), (x_2, y_2), obsahuje i každou jejich lineární kombinaci a obsahuje i vektor (a^2, b^2), neboť $a^2 = a.a$, $b^2 = b.b$. Vektory (a, b), (a^2, b^2) jsou lineárně nezávislé. Z podmínky $ab(a - b) \neq 0$ plyne $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$. Kdyby byly vektory (a, b), (a^2, b^2) lineárně závislé, platilo by

$a^2 = \lambda a$, $b^2 = \lambda b$, tj. $a = \lambda = b$, což je spor.

Vektory (a, b), (a^2, b^2) jsou báze a proto M je množina všech vektorů R_2. /Řešení bylo odměněno zvláštní cenou MÚ ČSAV./

XXV.1 Druhá mocnina celého čísla náleží vždy do zbytkové třídy 0 nebo 1 modulo 3. V naší úloze, kde $x^2 + y^2 = 3z^2$, náleží $x^2 + y^2$ do zbytkové třídy 0. Z tabulky vyčteme:

Zbytková třída x^2	Zbytková třída y^2	Zbytková třída $x^2 + y^2$
0	0	0
0	1	1
1	1	2

To znamená, že x i y jsou násobky tří: $x^2 = 9x_1^2$, $y^2 = 9y_1^2$, tj. $9x_1^2 + 9y_1^2 = 3z^2$ čili

/1/
$$3x_1^2 + 3y_1^2 = z^2 .$$

Je tedy z násobek tří: $z = 3z_1$, čili z /1/ plyne

$$x_1^2 + y_1^2 = 3z_1^2 .$$

Zvolíme-li za z nejmenší kladné číslo žádané vlastnosti, je $z_1 < z$ ještě menší číslo této vlastnosti, což je spor. Úloha má tedy jediné řešení

$$x = y = z = 0 .$$

XXV.6 Body A, B, C neleží v přímce, tedy ani A', B', C' neleží v přímce. Kdyby body A', B', C', D ležely v rovině, byla by to rovina obsahující π' a bod $D \in \pi$ by ležel na přímce p, což odporuje předpokladu. Tvoří tedy body A', B', C', D opět vrcholy čtyřstěnu.

Z předpokladu rovnoběžnosti $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ plyne existence bodů E, E' na přímce AA', pro něž platí

$$E - A = D' - D$$
$$E' - A' = D - D'$$

Je patrno, že body E, D' /resp. E', D/ jsou stejně vzdáleny od roviny, jež obsahuje polorovinu π /resp. π'/, a proto se objemy čtyřstěnů $ABCD'$ a $ABCE$ /resp. $A'B'C'D$ a $A'B'C'E'$/ sobě rovnají. Stačí proto dokázat rovnost objemů čtyřstěnů $ABCE$ a $A'B'C'E'$.

Platí $AE = A'E' = DD'$ a dále bod B má od přímky AE stejnou vzdálenost jako bod B' od přímky $A'E'$, a proto mají trojúhelníky ABE a $A'B'E'$ týž obsah.

Roviny ABE a $A'B'E'$ splývají a $CC' \parallel ABE$, takže výška čtyřstěnů ABCE a $A'B'C'E'$, a tedy i objemy čtyřstěnů $ABCD'$ a $A'B'C'D$ jsou stejně velké.

XXVI.1 Celú kocku so stranou 1 môžeme rozdeliť na 512 kociek so stranou dĺžky $\frac{1}{8}$. Keďže $4 \cdot 512 = 2048 < 2050$, musí podľa Dirichletovho priehradkového princípu existovať medzi nimi aspoň jedna, ktorá obsahuje najmenej päť z daných bodov. Ak tejto kocke opíšeme guľovú plochu, pre jej polomer r platí

$$r = \frac{\sqrt{3}}{16} = \sqrt{\frac{3}{256}} < \sqrt{\frac{3}{255}} = \frac{1}{\sqrt{85}} < \frac{1}{\sqrt{81}} = \frac{1}{9} .$$

XXVI.4 Ak nejaká trojica x, y, z vyhovuje sústave

/1/ $$x + y + z = 3 ,$$

/2/ $$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{12} ,$$

/3/ $$x^3 + y^3 + z^3 = 45 ,$$

potom musí zrejme byť $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. Z /2/ dostaneme

/4/ $$xy + yz + zx = \frac{5}{12} xyz .$$

Zrejme platí

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz ,$$

z čoho po dosadení z /1/, /3/, /4/ a jednoduchej úprave dostaneme

/5/ $$xyz = - 24 .$$

Vzhľadom na to po dosadení do /4/ hneď bude

/6/ $$xy + yz + zx = - 10 .$$

Z /1/, /6/, /5/ na základe známych vzťahov medzi koreňmi a koeficientami kubickej rovnice vyplýva, že čísla x, y, z vyhovujúce sústave /1/-/3/ musia byť koreňmi rovnice

/7/ $$u^3 - 3u^2 - 10u + 24 = 0 .$$

Keďže $u^3 - 3u^2 - 10u + 24 = (u - 2)(u^2 - u - 12) = (u - 2)(u + 3)(u - 4)$, rovnici /7/ vyhovujú čísla 2, -3, 4.

Dosadením sa ľahko presvedčíme, že všetky permutácie čísel tejto trojice sú riešeniami danej sústavy.

XXVI.5 Môžeme předpokladať, že body nasledujú na priamke za sebou v poradí $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Nech k je najmenší index taký, že medzi bodmi $A_1, A_2, \ldots, A_k$ už sú body všetkých štyroch farieb. Bod A_k má teda inú farbu ako ktorýkoľvek z bodov $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$. Označme j najväčší index taký, že $1 \leq j \leq k - 1$ a že medzi bodmi A_j,

$A_{j+1}, \ldots, A_k$ už sú body všetkých štyroch farieb. Bod A_j má teda inú farbu než ktorýkoľvek z bodov $A_{j+1}, A_{j+2}, \ldots, A_k$. Úsečka A_jA_k už zrejme má požadovanú vlastnosť, pretože farby bodov A_k a A_j sa vyskytujú medzi bodmi $A_j, A_{j+1}, \ldots, A_k$ práve raz a zostávajúce dve farby aspoň raz.

XXVII.4 Najskôr dokážeme, že ak má štvorsten ABCD súčet dĺžok hrán $|AB| + |BC| + |CD| + |AD| = 12$ a súčasne najväčší možný objem, potom musí byť $|AB| = |BC| = |CD| = |AD|$.

Predpokladajme opak. Nech napr. $|AD| \neq |CD|$ /analogicky možno uvažovať o ľubovoľnej dvojici susedných hrán z danej štvorice hrán/. Uvažujme o bodoch D_1, D_2 v rovine ACD, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od bodov A, C a pre ktoré platí

$$|AD_1| + |CD_1| = |AD_2| + |CD_2| = |AD|+|CD| = 12 - |AB| - |BC|.$$

Body D_1, D_2 majú najväčšiu možnú vzdialenosť od roviny ABC a teda štvorsten daných vlastností so susednými hranami rôznych dĺžok nemá maximálny objem, čo je spor s predpokladom.

Nech existujú dve rôzne dlhé protiľahlé strany z danej štvorice, napr. $|AB| \neq |CD|$. Podľa vyššie uvedeného platí $|AD| = |CD|$, z čoho vyplýva $|AB| \neq |AD|$. To však je opäť spor s tým, čo sme dokázali vyššie.

Ďalej je zrejmé, že ak roviny ABC a ACD nie sú na seba kolmé, môžeme otočením niektorej z nich okolo priamky AC do polohy vzájomne kolmej získať štvorsten daných vlastností s väčším objemom. Z toho vyplýva, že v štvorstene s maximálnym objemom musia byť roviny ABC a ACD na seba kolmé.

Nech S je stred hrany AC , $\alpha = \sphericalangle CAD = \sphericalangle CAB$. Potom pre objem V štvorstena platí

$$V = \frac{1}{3}\,\frac{|AC|\,.\,|BS|}{2}\,.\,|DS| = \frac{1}{6}\,|AC|.|BS|.|DS| =$$
$$= \frac{1}{6}\,(2\cos\alpha\,.\,|AB|).(\sin\alpha\,.|AB|).(\sin\alpha\,.\,|AB|) =$$
$$= \frac{1}{3}\cos\alpha\,\sin^2\alpha\,.\,|AB|^3.$$

Pretože $|AB| = 3$, hľadajme maximum funkcie

$$f(\alpha) = 9\cos\alpha\,\sin^2\alpha = 9\,(\cos\alpha - \cos^3\alpha)$$

na intervale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Derivácia

$$f'(\alpha) = 9\sin\alpha\,(3\cos^2\alpha - 1)$$

sa rovná nule pre $\alpha_0 = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Pre objem V štvorstena v tomto prípade platí

$$V = 9\left(\cos\alpha_0 - \cos^3\alpha_0\right) = 9\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9}\right) = 2\sqrt{3}\,.$$

Zistili sme teda, že štvorsten požadovaných vlastností existuje. Jedným z takých je aj štvorsten $ABCD$, v ktorom $|AB| = |BC| = |CD| = |AD| = 3$ cm, roviny ABC a ADC sú na seba kolmé a $\measuredangle CAD = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$.

XXVII.5 Zo zhodnosti trojuholníkov ABC a ABD vyplýva, že polomery vpísaných kružníc sú rovnaké a priamka $C'D'$ je rovnobežná so základňou AB. Analogicky zo zhodnosti trojuholníkov BCD a ACD vyplýva, že je priamka $A'B'$ rovnobežná so základňou AB.

Označme $|AB| = a$, $|BC| = |AD| = b$, $|CD| = c$, $|AC| = |BD| = u$, pričom $a > c$. Nech P, P_1, P_2 sú v uvedenom poradí dotykové body kružnice vpísanej trojuholníku ACD so stranami CD, DA, AC. Potom platí /obr. 21/:

$$|AC| = u = |AP_2| + |P_2C| = |AP_1| + |PC| = b + c - 2|DP|,$$

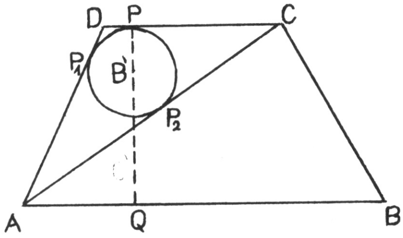
odkiaľ

$$|DP| = \frac{1}{2}\,(c + b - u).$$

Ak Q je bod dotyku kružnice vpísanej trojuholníku AB so stranou AB, analogicky dostaneme

$$|AQ| = \frac{1}{2}\,(a + b - u).$$

Z toho vyplýva, že $|AQ| - |DP| = \frac{1}{2}\,(a - c)$, čo znamená, že priamka PQ je kolmá na základňu AB. V takom prípade však $B'C' \equiv PQ$ a tvrdenie úlohy je dokázané.



Obr. 21

XXVIII.3 Označme s súčin $|AB|\,.\,|CD|$. Potom

$$s + \frac{4}{s} = |AB|\,.\,|CD| + \frac{4}{|AB|\,.\,|CD|} \leqq |AB|\,.\,|CD| + |BC|\,.\,|DA| =$$

$$= |AC|\,.\,|BD|.$$

Zároveň však platí $|AC| \leqq 2$, $|BD| \leqq 2$, z čoho vyplýva, že $s + \frac{4}{s} \leqq 4$ čiže $(s - 2)^2 \leqq 0$. Musí teda platiť $s = 2$ a v danom vzťahu nastáva rovnosť. Potom však tiež $|AC| = 2$, $|BD| = 2$ čiže body A, C sú protiľahlými bodmi kružnice a to isté platí pre body B, D. Z toho vyplýva ďalej, že $|AB| = |CD|$, a pretože $|AB| \cdot |CD| = 2$, musí byť $|AB| = |CD| = \sqrt{2}$. Potom však tiež $|AD| = |BC| = \sqrt{2}$ a body A, B, C, D sú vrcholmi štvorca, čo sme mali dokázať.

XXVIII.4 Najskôr dokážeme pomocné tvrdenie:

Nech $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ sú reálne čísla, potom

$$/1/ \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \leq n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ ,$$

pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď buď $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ alebo $b_1 = b_2 = \dots = b_n$.

Pre každú dvojicu indexov $1 \leq i, j \leq n$ platí

$$/2/ \qquad (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0 \ .$$

Ak sčítame nerovnosti /2/ pre všetky dvojice indexov pre $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$, po jednoduchej úprave dostaneme /1/.

Dokázané tvrdenie aplikujme teraz na n-tice reálnych čísel

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \ , \qquad -x_n \leq -x_{n-1} \leq \dots \leq -x_1 \ .$$

Dostaneme

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} -x_{n-i+1}\right) \leq n \sum_{i=1}^{n}\left(-x_i \cdot x_{n-i+1}\right)$$

čiže

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \geq n \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x_{n-i+1} \ .$$

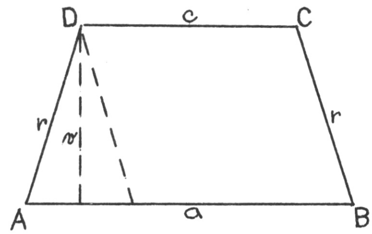
Z toho vyplýva, že nerovnosť z textu úlohy platí práve vtedy, keď platí rovnosť, tj. práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

XXVIII.6 Nech n je prirodzené číslo, pre ktoré platí tvrdenie úlohy. Ak pre prvočíslo p je $p^2 < n$, potom je n deliteľné číslom p. V opačnom prípade by totiž platilo $(p^2, n) = 1$, čo je spor, pretože p^2 nie je prvočíslo.

Ľahko sa zistí, že úlohe vyhovujú čísla 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30. Žiadne iné číslo menšie než 30 nemá požadované vlastnosti.

Nech $n > 30$ má požadovanú vlastnosť. Keďže $2^2 < 30$, $3^2 < 30$, $5^2 < 30$, musí podľa vyššie uvedeného platiť: $2/n$, $3/n$, $5/n$ čiže $n = 30k \geq 60$. Keďže $7^2 < 60$, tak $n \geq 7 \cdot 60 = 420$, ale $11^2 < 420$, $13^2 < 420$, $17^2 < 420$, $19^2 < 420$ a teda $n \geq 420.11.13.17.19 > 10^7$. Danej úlohe vyhovujú teda len čísla 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18,24,30.

XXIX.2 Nech ABCD je hľadaný lichobežník, v ktorom platí $|AB| = a$, $|CD| = c$, $|BC| = |AD| = r$. Označme P pätu kolmice z vrcholu D na základňu AB a $|DP| = v$. /Obr. 22/ Ak by platilo $r = 13$ cm, muselo by platiť $a + c = 2$ cm, čo nie je možné, pretože v tomto prípade



Obr. 22

$v < 13$ cm a obsah lichobežníka by musel byť menší než $13\ \text{cm}^2$. Najdlhšou stranou lichobežníka je teda základňa AB a platí $a = 13$ cm.

Z toho vyplýva

/1/ $$2r + c = 15\ ,$$

$$4v^2 + (13 - c)^2 = 4r^2\ ,$$

z čoho vyplýva $v^2 = 2r - 1$.

Pre obsah P lichobežníka ABCD platí: $P = \frac{1}{2}(13 + c)v$,

z čoho
$$P^2 = \left(\frac{13 + c}{2}\right)^2 (2r - 1) = (14 - r)^2\,(2r - 1)\,,$$

pričom $1 < r < \frac{15}{2}$.

Vyšetrujme funkciu $f(r) = (14 - r)^2(2r - 1) = 2r^3 - 57r^2 + 420r - 196$. Derivácia $f'(r) = 6r^2 - 114r + 420$ sa rovná nule pre $r = 5$ a $r = 14$. Do uvažovaného intervalu patrí len prvá z týchto hodnôt a ľahko sa zistí, že funkcia f nadobúda pre $r = 5$ svoje maximum. Pre $r = 5$ je teda maximálne P^2 a teda aj $P = 27\ \text{cm}^2$. Pri $r = 5$ však musí byť aj $c = 5$cm, ako vyplýva z /1/.

Súčasne sme našli aj zápornú odpoveď na otázku o existencii lichobežníka daných vlastností s obsahom $27{,}001\ \text{cm}^2$.

XXIX.3 Nech je K prienik otvorených polrovín ABC a BCA doplnený ešte o otvorené úsečky AB a BC. Nech je P polrovina opačná k polrovine ABC, z hranice ktorej patrí do P len otvorená polpriamka opačná k polpriamke AB. Podobne nech je Q polrovina opačná k polrovine BCA, z hranice ktorej patrí do Q len otvorená polpriamka opačná k polpriamke CB.

Potom zrejme K, P, Q sú konvexné množiny a ich zjednotením je množina M.

Dokážeme, že $\mathbb{M}$ nemožno získať ako zjednotenie dvoch konvexných množín. Predpokladajme opak: $M = R \cup S$, kde R, S sú konvexné množiny. Zvoľme body U, V, W tak, že bod A je stredom úsečky UV, bod B stredom úsečky UW, bod C stredom úsečky VW. Ak je $U \in R$, potom $V \notin R$, pretože inak by muselo platiť tiež $A \in R \subset \mathbb{M}$, čo je spor. Musí preto byť $V \in S$ a rovnako tiež $W \in S$. Z toho však vyplýva $C \in S \subset \mathbb{M}$, čo je opäť spor.

Tým sme dokázali, že množinu $\mathbb{M}$ nemožno pokryť dvoma konvexnými množinami a tak minimálny počet konvexných množín, ktorých zjednotením je $\mathbb{M}$, je tri.

XXIX.6 Označme $\mathbb{M} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ a $\mathbb{R}_i$ množinu tých rovín z $\mathbb{R}$, ktoré obsahujú bod A_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Analogicky budeme chápať množiny $\mathbb{R}_{ij}, \mathbb{R}_{ijk}, \mathbb{R}_{ijkl}$ ako množiny rovín z $\mathbb{R}$ obsahujúce body z $\mathbb{M}$ s príslušnými indexami. Podľa predpokladu je $\mathbb{R}_{ijkl} = \emptyset$ pre každé i, j, k, l. Ďalej podľa b/ platí $|\mathbb{R}_i| \leqq 4$, kde symbolom $|S|$ označujeme počet prvkov množiny S.

Číslo

$$\sum_{i<j<k} |\mathbb{R}_{ijk}|$$

je počet rovín, ktoré obsahujú práve po tri body. Keďže podľa b/ leží každý bod z $\mathbb{M}$ najviac v štyroch rovinách, tak

$$3 \sum_{i<j<k} |\mathbb{R}_{ijk}| \leqq 4 \cdot 5 ,$$

z čoho vyplýva

$$\sum_{i<j<k} |\mathbb{R}_{ijk}| \leqq 6 .$$

Podľa a/ je $\bigcup \mathbb{R}_i = \mathbb{R}$ a podľa princípu inklúzie a exklúzie máme

$$7 = \sum_{i=1}^{5} |\mathbb{R}_i| - \sum_{i<j} |\mathbb{R}_{ij}| + \sum_{i<j<k} |\mathbb{R}_{ijk}| ,$$

z čoho vyplýva, že $\sum_{i<j} |\mathbb{R}_{ij}| \leqq 20 + 6 - 7 = 19$. Keďže $\binom{5}{2} = 10$, existuje dvojica i, j taká, že $|\mathbb{R}_{ij}| \leqq 1$. Body A_i, A_j sú potom hľadanými bodmi P, Q.