Úlohy MO kategorií A, B a C

Leo Boček
(MFF UK Praha)

Na několika příkladech chceme ukázat tématiku úloh matematické olympiády v kategoriích A, B, C v posledních deseti letech, obtížnost jedněch i snadnost jiných úloh.

V kategorii B 39. ročníku MO jsme použili pěknou sérii úloh od dlouholetého pracovníka v MO dr. Jiřího Sedláčka, CSc., z Matematického ústavu ČSAV v Praze. V 1. kole to byla úloha:

Je dáno liché přirozené číslo n, najděte aspoň jednu dvojici přirozených čísel x, y tak, aby $D(x,y) = n$ a současně $D(xy+x, xy+y) = 2n$. Přitom $D(u,v)$ značí největší společný dělitel přirozených čísel u, v.

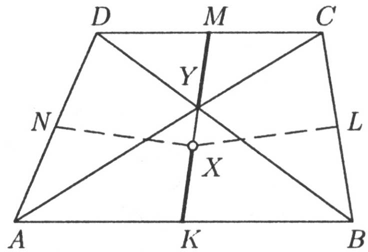
V klauzurní části 1. kola to byla úloha *nalézt ke každému přirozenému číslu n přirozená čísla x, y tak, aby $D(x,y) = D(xy+x, xy+y) = n$.* V krajském, tedy 2. kole, bylo třeba *k libovolnému přirozenému číslu n najít nesoudělná přirozená čísla x, y s vlastností $D(xy+x, xy+y) = n$.*

Ukážeme si stručně **řešení** všech tří úloh. V první úloze je nasnadě zkusit $x = n$, $y = kn$, kde k je přirozené číslo. Je pak $D(x,y) = n$, $xy + x = n(kn+1)$, $xy + y = n(kn+k)$. Číslo k musíme zvolit tak, aby největším společným dělitelem čísel $kn+1$, $kn+k$ bylo číslo 2. Pak musí být dělitelný dvěma také jejich rozdíl $k-1$. Zkusíme položit $k = 3$, čísla $x = n$, $y = 3n$ skutečně splňují podmínky úlohy, neboť $xy+x = n(3n+1)$, $xy+y = n(3n+3)$. Jelikož je číslo n liché, jsou čísla $3n+1$, $3n+3$ sudá, tedy dělitelná dvěma. A číslo 2 je také jejich největším společným dělitelem, protože největší společný dělitel těchto čísel dělí také jejich rozdíl, tedy číslo 2. Je tedy $D(3n+1, 3n+3) = 2$ a $D(3n^2+n, 3n^2+3n) = 2n$. Řešením úlohy klauzurní části je například dvojice $x = 2n$, $y = 3n$. Je pak totiž $xy+x = 2n(3n+1)$, $xy+y = 3n(2n+1)$. Čísla $3n+1$, $2n+1$ jsou nesoudělná, neboť jejich společný dělitel musí dělit i číslo $3(2n+1) - 2(3n+1) = 1$.

Navazující úloha z 2. kola je obtížnější. Jelikož $xy+x$, $xy+y$ mají být dělitelná číslem n, musí to platit i pro jejich rozdíl $y - x$. Zkusme položit $y = x + n$. Pak je $xy + x = x(x+n+1)$, $xy + y = x(x+n+1) + n$. Obě tato čísla mají být dělitelná číslem n, avšak čísla x, $x+n$ mají být nesoudělná. Proto musejí být nesoudělná i čísla x, n. Pak musí číslo n dělit číslo $x+n+1$. Položme tedy na příklad $x = n-1$, je pak $y = 2n-1$. Jsou to čísla nesoudělná, $xy+x = n(2n-2)$, $xy+y = n(2n-1)$. Největším společným dělitelem posledních dvou čísel je číslo n, protože čísla $2n-1$, $2n-2$ jsou nesoudělná. V případě $n = 1$ není však číslo x přirozené, stačí ale pro $n = 1$ položit $x = 1$, $y = 2$.

V 37. a 38. ročníku MO byly dvě na sebe navazující úlohy o lichoběžníku. V 37. ročníku to byla v kategorii C úloha: *V lichoběžníku $ABCD$ určete bod X tak, aby měly čtyřúhelníky $XKBL$, $XLCM$, $XMDN$, $XNAK$ stejný obsah, přičemž K, L, M, N jsou po řadě středy stran AB, BC, CD, DA.*

Řešení. Jsou-li AB, CD základny lichoběžníku, pak spojnice jejich středů K, M dělí lichoběžník na dva lichoběžníky stejného obsahu (obr. 1). Proto musí bod X nutně ležet na úsečce KM. Kdyby totiž ležel uvnitř lichoběžníku $KBCM$, byl by součet obsahů čtyřúhelníků $XKBL$, $XLCM$ menší než polovina obsahu lichoběžníku $ABCD$, což by bylo ve sporu s podmínkou úlohy. Uvažujme tedy bod X uvnitř úsečky KM. Obsahy trojúhelníků DNX, ANX jsou stejné, protože N je střed úsečky AD. Aby se sobě rovnaly i obsahy čtyřúhelníků $XNAK$, $XMDN$, musejí se rovnat obsahy trojúhelníků MDX, AKX, tedy poměr vzdáleností bodu X od přímek AK a DM musí být právě obrácený, než je poměr délek úseček AK, DM, tj. poměr $|AB| : |CD|$. Průsečík Y úhlopříček AC, BD leží na KM a poměr jeho vzdáleností od přímek AB, CD je právě $|AB| : |CD|$. Sestrojíme tedy bod Y a X je pak ten bod na úsečce KM, pro který platí $|MX| = |KY|$, je pak též $|KX| = |MY|$. Tento bod X splňuje podmínku úlohy.



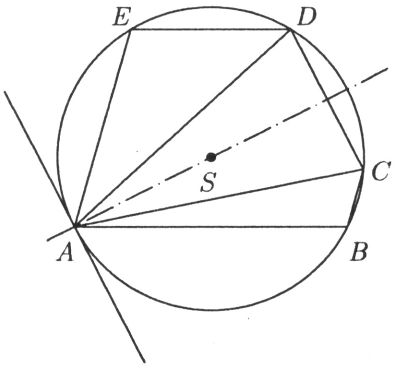
Obr. 1

V dalším ročníku dokazovali titíž žáci, jenže již o rok starší, že *neexistuje v lichoběžníku $ABCD$ bod X tak, aby se sobě rovnaly obsahy trojúhelníků ABX, BCX, CDX, DAX.* Důkaz vedli sporem třeba takto: Předpokládejme, že pro bod X lichoběžníku $ABCD$ se obsahy uvedených trojúhelníků rovnají. Označme p vzdálenost bodu X od přímky AB a q jeho vzdálenost od přímky CD, $a = |AB|$, $c = |CD|$. Rovnost obsahů trojúhelníků ABX, CDX, z nichž se každý rovná jedné čtvrtině obsahu celého lichoběžníku, nám dává pro p, q, a, c podmínky $4ap = 4cq = (a+c)(p+q)$. Vyloučením p, q dostaneme $(a-c)^2 = 0$. To je však spor, neboť pro lichoběžník je $a \neq c$.

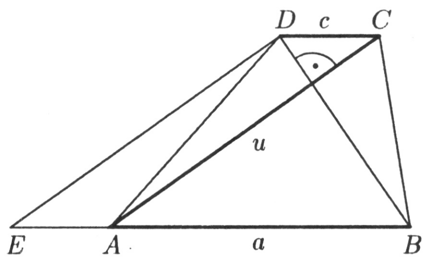
Do 36. ročníku byla zařazena tato geometrická úloha: *Je dán trojúhelník ABC. Zvolte na stranách AB, AC po řadě body M, N tak, aby $|BM| = |CN|$ a aby se obsah trojúhelníku AMN rovnal polovině obsahu ABC.* K vyřešení úlohy stačí umět řešit kvadratickou rovnici a znát vzorec $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ pro obsah trojúhelníku (b, c jsou délky stran AC, AB, α je velikost jimi sevřeného úhlu). Označme $x = |BM| = |CN|$. Podle podmínek úlohy má pro x platit $2(b-x)(c-x)\sin\alpha = bc\sin\alpha$. Jelikož $\sin\alpha \neq 0$, dostáváme pro x kvadratickou rovnici $2x^2 - 2(b+c)x + bc = 0$. Kořen $\frac{1}{2}(b+c+\sqrt{b^2+c^2})$ nevyhovuje, protože je větší než b i c, vyhovuje druhý kořen $\frac{1}{2}(b+c-\sqrt{b^2+c^2})$, který je kladný a menší než b i c. Úsečku délky $\frac{1}{2}(b+c-\sqrt{b^2+c^2})$ dovedeme též snadno pravítkem a kružítkem sestrojit z délek b, c.

V 33. ročníku MO byla v krajském kole kategorie C lehká úloha, jejíž text zní: *Žák měl spočítat délku tětivy kružnice o poloměru r, jestliže se vzdálenost tětivy od středu rovnala d. Domníval se, že se délka tětivy počítá jako $d + r$, přesto dostal správný výsledek. Jaký vztah musel platit mezi d a r?* Odpověď je jednoduchá, musí platit $d + r = 2\sqrt{r^2 - d^2}$, po úpravě a vyřešení kvadratické rovnice dostaneme $\frac{d}{r} = \frac{3}{5}$.

Je všeobecně známo, že větší obtíže činí žákům úlohy geometrické, ať již jde o úlohy konstruktivní, nebo důkazové. Do krajského kola kategorie C 37. ročníku MO byla zařazena úloha: *Konvexní pětiúhelník $ABCDE$ je vepsán kružnici k, přičemž AB je rovnoběžná s ED a BC je rovnoběžná s AE. Dokažte, že přímka CD je rovnoběžná s tečnou kružnice k v bodě A.* K důkazu stačí znát větu o obvodových úhlech a o úhlech v tětivovém čtyřúhelníku. Označíme-li $\alpha = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle AED|$, je $|\sphericalangle ADC| = \pi - \alpha$, neboť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník. Stejně tak je $|\sphericalangle ACD| = \pi - \alpha$, takže je trojúhelník ACD rovnoramenný se základnou CD. Proto prochází osa úsečky CD bodem A a samozřejmě též středem S kružnice k (obr. 2). Tečna kružnice k v bodě A je na tuto osu kolmá a tedy rovnoběžná s CD. Je to úloha velmi pěkná, avšak pro žáky 1. ročníku střední školy jsou důkazové úlohy přece jenom obtížnější. Více



Obr. 2



Obr. 3

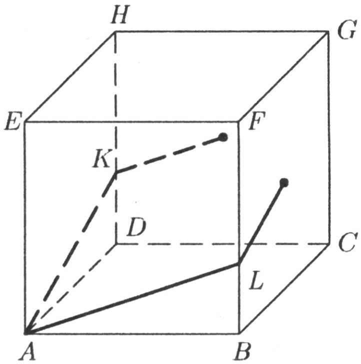
se jim líbí úlohy, při kterých mají něco spočítat. Například v úloze 2. kola kategorie C 36. ročníku MO to byl *obsah lichoběžníku, jehož úhlopříčky jsou na sebe kolmé, jedna z nich má délku u a jsou ještě dány délky a, c obou základen* (obr. 3). **Řešení** spočívá v převedení lichoběžníku na trojúhelník stejného obsahu. Bodem D vedeme rovnoběžku s úhlopříčkou AC ($|AC| = u$) a její průsečík s AB označíme E (AB je rovnoběžno s CD). Trojúhelníky CDB a AED mají stejný obsah, protože $|CD| = |AE|$ a výšky k těmto stranám jsou rovněž stejné, rovnají se vzdálenosti přímek AB, CD. Proto se obsah lichoběžníku rovná obsahu pravoúhlého trojúhelníku EDB, který je $\frac{1}{2}(u\sqrt{(a+c)^2 - u^2})$.

Pěkné jsou úlohy na určení nejkratší cesty po povrchu tělesa z jednoho jeho bodu do druhého. Uvedeme si dva příklady.

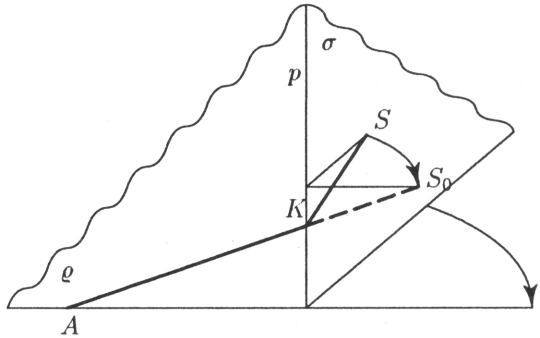
1. kolo kategorie B 33. ročníku MO — *Je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky a. Vrchol A je spojen po povrchu krychle nejkratší čarou se středem stěny $BCGF$ a rovněž se středem stěny $DCGH$. První lomená čára má s hranou BF společný bod L, druhá má s hranou DH společný bod K. Určete obsah trojúhelníku AKL (obr. 4).*

1. kolo kategorie C 37. ročníku MO — *Je dán pravidelný trojboký hranol $ABCA'B'C'$ s podstavnou hranou délky a a výškou v. Označme S střed stěny $BCC'B'$*

a K, L ty body na hranách BB', CC', pro něž jsou lomené čáry AKS, ALS nejkratší. Vypočítejte poměr objemů jehlanu $AKLS$ a daného hranolu.



Obr. 4

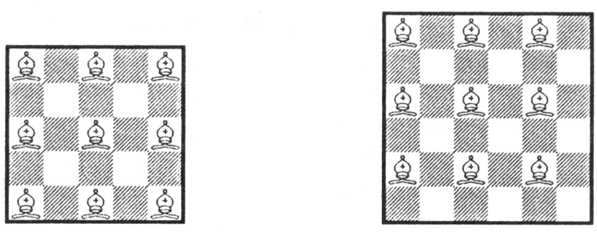


Obr. 5

Řešení obou úloh je jednoduché, uvědomíme-li si dále popsaný princip. Uvažujme roviny ϱ a σ, jež se protínají v přímce p, bod A leží v rovině ϱ, bod S v rovině σ a nechť K je ten bod přímky p, pro který je součet $|AK| + |KS|$ nejmenší. Pak po otočení roviny σ do roviny ϱ kolem přímky p tak, že jsou poloroviny pA a pS_0 opačné (S_0 je otočená poloha bodu S), leží bod K na úsečce AS_0 (obr. 5). Pro vaši kontrolu uvádíme výsledky obou úloh: $\frac{1}{6}a^2\sqrt{11}$; $\frac{1}{18}$.

Další skupinu úloh tvoří úlohy o šachovnicích. Příkladem je úloha 1. kola kategorie B 37. ročníku MO: *Jaký největší počet figurek lze rozmístit na šachovnici $n \times n$ tak, aby žádné dvě nesousedily? (Za sousední považujeme ta políčka, která mají společný aspoň jeden vrchol).*

Řešení. Je-li n liché, je určitě možné rozmístit aspoň $\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)^2$ figurek, při sudém n je možné umístit aspoň $(\frac{1}{2}n)^2$ figurek, jak ukazuje obr. 6 pro $n = 5$ a $n = 6$. Přesně řečeno, vynecháme každý druhý řádek shora a každý druhý sloupec zleva a stavíme figurky pouze na zbylá políčka. Určitě nebudou pak obsazena žádná dvě sousední políčka. Je to ale opravdu maximální počet figurek? Odpověď je ano. Například při sudém n se šachovnice skládá z $\frac{1}{4}n^2$ šachovnic 2×2. Kdyby se na ni dalo umístit více než $(\frac{1}{2}n)^2$ figurek, musely by aspoň na jedné šachovnici 2×2 stát aspoň dvě figurky, to by ale byly figurky sousední. Při lichém n se určitě nedá předepsaným způsobem rozestavit více figurek, než se dá rozestavit na větší šachovnici $(n+1) \times (n+1)$. A to je podle předcházejícího $\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)^2$.



Obr. 6

Na závěr si uvedeme ještě dvě úlohy na využití zápisu čísel v desítkové soustavě a na dělitelnost. Do 1. kola kategorie B 38. ročníku MO jsme zařadili úlohu: *Dokažte, že rovnice $S(x+p) = S(x)$, kde $S(n)$ značí ciferný součet čísla n zapsaného v desítkové soustavě, má aspoň jedno řešení, právě když je p dělitelné devíti.* Úlohu vyřešil velmi pěkně Tomáš Tütz z gymnázia v Brně, tř. kpt. Jaroše. Je-li $S(x+p) = S(x)$ pro nějaké x, dávají čísla $x+p$, x stejný zbytek při dělení devíti. Je-li obráceně $p = 9q$, q přirozené, stačí položit $x = q$. Je pak $x+p = 10q$ a čísla q, $10q$ mají zřejmě stejný ciferný součet.

V krajském kole 39. ročníku MO dokazovali žáci v kategorii C, že *číslo*

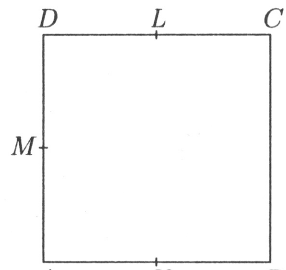
$$\underbrace{111\ldots1}_{k}\underbrace{222\ldots22}_{k+1}5,$$

v němž se číslice 1 *vyskytuje k-krát a číslice* 2 $(k+1)$*-krát, je druhou mocninou přirozeného čísla, a měli též toto číslo určit.* Snadno se na několika případech odhadne, že jde o číslo $\underbrace{33\ldots3}_{k}5$, v němž se číslice 3 vyskytuje k-krát. Pak se prostě ukáže, že jeho druhá mocnina je dané číslo, a to použitím vzorce $(10a+5)^2 = 100a(a+1)+25$. Stačí položit $a = \underbrace{33\ldots3}_{k}$. Žák František Mala z Dolného Kubína ukázal, že dané číslo je číslo $\dfrac{10^k-1}{9}\cdot 10^{k+2} + \dfrac{10^{k+1}-1}{9}\cdot 2\cdot 10+5$, což upravil na tvar $\left(\dfrac{10^{k+1}+5}{3}\right)^2$. Pak mu již stačilo dokázat, že číslo $10^{k+1}+5$ je dělitelné třemi. To však plyne ihned z toho, že jeho ciferný součet je 6.

Dále si uvedeme ještě několik úloh kategorie A, tedy úloh určených pro soutěžící nejvyšších dvou ročníků středních škol. Z 33. ročníku MO si ukážeme 2 úlohy celostátního kola. V první úloze bylo dáno zobrazení f množiny $\mathbb{Z}$ všech celých čísel do téže množiny, které splňuje pro každé $m \in \mathbb{Z}$ podmínku $f\big(f(m)\big) = -m$. Soutěžící měli dokázat, že a) f je prosté zobrazení množiny $\mathbb{Z}$ na množinu $\mathbb{Z}$, b) pro každé $m \in \mathbb{Z}$ platí $f(-m) = -f(m)$, c) $f(m) = 0$, právě když je $m = 0$. Na závěr měli ukázat příklad takového zobrazení. Úloha patřila k lehčím úlohám tohoto celostátního kola. Řešení úlohy může například vypadat takto: Nejdříve dokážeme, že zobrazení f je prosté. Předpokládejme, že $f(m) = f(n)$. Pak je $m = -f\big(f(m)\big) = -f\big(f(n)\big) = n$, takže $f(m) = f(n)$ pouze v případě $m = n$, což znamená, že je f zobrazení prosté. Je to také zobrazení na množinu $\mathbb{Z}$, protože každý prvek $m \in \mathbb{Z}$ je obrazem prvku $f(-m)$. Protože $-m = f\big(f(m)\big)$, je $f(-m) = f\big(f(f(m))\big) = -f(m)$, stačí totiž ve vztahu $f\big(f(m)\big) = -m$ dosadit za m číslo $f(m)$. Tím je dokázáno, že pro každé $m \in \mathbb{Z}$ je $f(-m) = -f(m)$. Položíme-li $m = 0$, dostaneme $f(0) = -f(0)$, takže $f(0) = 0$. Protože f je zobrazení prosté, nemůže být $f^2(m) = 0$ pro žádné $m \neq 0$. Musíme ještě ukázat příklad zobrazení f, které má všechny uvedené vlastnosti. Je to například zobrazení f, které je definováno vztahy $f(0) = 0$, $f(2k) = 2k-1$, $f(2k-1) = -2k$, $f(-2k) = -(2k-1)$, $f(-2k+1) = 2k$ pro každé přirozené číslo k.

V druhé úloze se z předpokladu $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta = 0$ pro vnitřní úhly α, β, γ, δ konvexního čtyřúhelníku má dokázat, že čtyřúhelník je rovnoběžník, lichoběžník nebo čtyřúhelník tětivový. K řešení úlohy je vhodné převést součet na levé straně předpokládané rovnosti na součin. Použitím vzorce $\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ a vztahu $\alpha+\beta+\gamma+\delta = \pi$ dostaneme $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\delta}{2}$. Tento součin se rovná nule právě tehdy, když je splněna aspoň jedna z podmínek $\alpha+\beta = \pi$, $\alpha+\delta = \pi$, $\alpha+\gamma = \pi$. Jsou-li splněny první dvě podmínky, je čtyřúhelník rovnoběžník, když je splněna jen jedna z nich, je to lichoběžník. Poslední podmínka je splněna, právě když je čtyřúhelník tětivový (když mu lze opsat kružnici).

V 37. ročníku MO pokrývali soutěžící kategorie A čtverec kruhy o stejném poloměru. Ve školním kole měli určit nejmenší číslo r, pro které je možné čtverec o straně 10 pokrýt dvěma shodnými kruhy o poloměru r. Mohli postupovat takto: Označit K, L středy stran AB, CD čtverce $ABCD$ o straně 10 (obr. 7). Je pak zřejmé, že kruhy ohraničené kružnicemi opsanými obdélníkům $AKLD$, $KBCL$ pokrývají čtverec $ABCD$, jejich poloměr je $\frac{1}{2}5\sqrt{5}$. Ukážeme, že r nemůže být menší než $\frac{1}{2}5\sqrt{5}$. Předpokládejme, že čtverec je pokryt dvěma kruhy o poloměru $r < \frac{1}{2}5\sqrt{5}$. Aspoň v jednom z nich musí ležet tři z bodů A, B, C, D, K, L. Patří-li do jednoho body A, K, B a do druhého body D, L, C, musí jeden z nich obsahovat též střed M strany AD. Je-li to například kruh s body A, K, B, obsahuje body B, M a jeho průměr se proto rovná aspoň vzdálenosti těchto dvou bodů, tj. $5\sqrt{5}$. Obsahuje-li kruh jen dva body z trojice A, K, B a jeden z trojice D, L, C, dostaneme stejným způsobem spor, rovněž tak při záměně obou trojic. Je tedy $r = \frac{1}{2}5\sqrt{5}$.

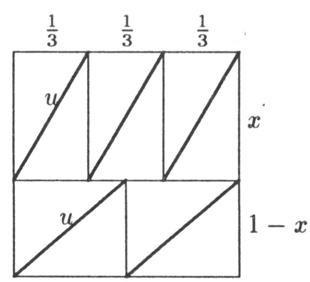


Obr. 7

V krajském kole byla navazující úloha: *Jestliže čtyři shodné kruhy o poloměru r pokrývají jednotkový čtverec, je $r \geqq \frac{1}{4}\sqrt{2}$. Dokažte a zjistěte, zda lze jednotkový čtverec pokrýt pěti shodnými kruhy o menším poloměru.*

Řešení: Předpokládejme, že je čtverec pokryt čtyřmi kruhy o poloměru $r < \frac{1}{4}\sqrt{2} < 1$. Pak v každém kruhu leží právě jeden vrchol čtverce. Aspoň jeden z těchto kruhů obsahuje i střed čtverce, který má od vrcholu čtverce vzdálenost $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, proto je jeho poloměr aspoň $\frac{1}{4}\sqrt{2}$, což je spor s předpokladem $r < \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

K druhé části úlohy rozdělíme čtverec na pět obdélníků podle obr. 8 tak, aby měly stejně velké úhlopříčky délky u. Kruhy, jejichž hraniční kružnice jsou těmto obdélníkům opsány, pokrývají čtverec a jejich poloměr je $\frac{1}{2}u$. Není těžké ukázat, že $u < \frac{1}{2}\sqrt{2}$, takže odpověď na poslední otázku úlohy je ano.



Obr. 8

Podle Cauchyovy nerovnosti platí pro každou trojici reálných čísel x, y, z nerovnost

$$x^2+y^2+z^2 \geqq xy+yz+zx.$$

V 39. ročníku MO byla v I. kole kategorie A úloha *najít všechna reálná čísla α s vlastností: Jsou-li x, y, z délky stran trojúhelníku, pak je $x^2+y^2+z^2 \leqq \alpha(xy+yz+zx)$.*

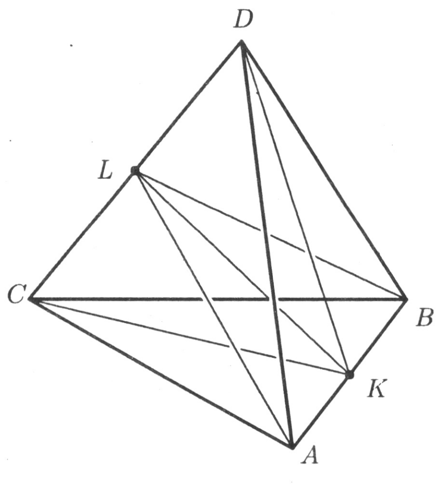
Řešení: Jsou-li x, y, z délky stran trojúhelníku, je $|y-z| < x$, $|z-x| < y$,

$|x-y| < z$. Umocněním těchto nerovností a jejich sečtením dostaneme $x^2+y^2+z^2 < 2(xy+yz+zx)$, takže podmínku úlohy splňují všechna reálná čísla $\alpha \geqq 2$. Je-li $1 \leqq \alpha < 2$, položíme $x=y=1$ a z zvolíme z intervalu $(0, \alpha - \sqrt{\alpha^2-(2-\alpha)})$. Pak jsou x, y, z délky stran trojúhelníku a neplatí $x^2+y^2+z^2 < \alpha(xy+yz+zx)$. Podmínku úlohy splňují tedy právě jen všechna čísla $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geqq 2$.

V celostátním kole téhož ročníku pak navazovala úloha do jisté míry obrácená — *najít všechna reálná čísla α, pro která má každá trojice kladných čísel x, y, z splňující nerovnici*

$$x^2+y^2+z^2 \leqq \alpha(xy+yz+zx)$$

tu vlastnost, že to jsou délky stran nějakého trojúhelníku. **Řešení:** Jestliže je pro nějaké α uvedená nerovnice splněna pro některou trojici kladných čísel x, y, z, jež nemohou být délkami stran trojúhelníku, například pro trojici x, y, z s vlastností $z = x+y$, pak α nepatří mezi hledaná čísla. Položíme-li $x=y=1$, $z=2$, vidíme, že úloze nevyhovují čísla $\alpha \geqq \frac{6}{5}$. Ukážeme, že čísla menší než $\frac{6}{5}$ vyhovují. Jinými slovy chceme ukázat, že z platnosti $x^2+y^2+z^2 < \frac{6}{5}(xy+yz+zx)$ pro kladná čísla x, y, z plyne $x < y+z$, $y < x+z$, $z < x+y$. Dokážeme to sporem. Nechť pro kladná čísla x, y, z platí $x^2+y^2+z^2 < \frac{6}{5}(xy+yz+zx)$, ale jedna z předcházejících tří nerovnic splněna není, že například platí $z \geqq x+y$. Položme $t = z-x-y \geqq 0$. Dosadíme-li $z = t+x+y$ do předpokládané nerovnosti, dostaneme po úpravě $t^2 + \frac{4}{5}t(x+y) + \frac{4}{5}(x-y)^2 < 0$, což nemůže platit, neboť t je nezáporné číslo.



Obr. 9

Na závěr si uveďme ještě dvě úlohy ze stereometrie, které byly pro 39. ročník převzaty z maďarské matematické olympiády. *Mezi všemi čtyřstěny $ABCD$ s danými délkami a, c hran AB, CD a danou vzdáleností d středů hran A, CD je třeba v první úloze určit ten, který má největší objem,* v druhé úloze *ten, který má největší povrch.*

První úloha, která je lehčí, byla zařazena do klauzurní části I. kola. Čtyřstěn $ABCD$ rozdělíme na dva čtyřstěny $ABLC$ a $ABLD$, kde L je střed hrany CD (obr. 9). Označme ještě K střed hrany AB. Obsah trojúhelníku ABL se rovná nejvýše $\frac{1}{2}ad$, výšky čtyřstěnů $ABLC$ a $ABLD$ na stěnu ABL jsou stejné a rovnají se nejvýše $\frac{1}{2}c$, takže objem čtyřstěnu $ABCD$ je nejvýše $\frac{1}{6}acd$. Rovná se této hodnotě právě tehdy, když je $KL \perp AB$ a $CD \perp ABL$, takže tehdy, když je KL kolmá na kolmé přímky AB, CD. Ačkoliv výsledek druhé úlohy je stejný, je důkaz mnohem obtížnější. Označme $|KD| = p$, $|KC| = q$ a P, Q obsahy trojúhelníků ABD, ABC. Je $P+Q \leqq \frac{1}{2}a(p+q)$. Z trojúhelníků CLK a DLK plyne pomocí kosinové věty $p^2+q^2 = \frac{1}{2}c^2+2d^2$. Dále je $(p+q)^2 \leqq 2(p^2+q^2)$, rovnost platí pouze při $p=q$. Máme tedy

$$P+Q \leqq \frac{1}{2}a\sqrt{2(p^2+q^2)} = \frac{1}{2}a\sqrt{c^2+4d^2},$$

rovnost

$$P + Q = \frac{1}{2} a\sqrt{c^2 + 4d^2}$$

platí právě tehdy, když je $p = q$, tj. $CD \perp KL$, a souměrně DK a CK kolmé na AB.

Podobný výsledek bychom mohli odvodit pro součet $R + S$ obsahů trojúhelníků CAD, CDB. Největší povrch má tedy čtyřstěn, pro který je přímka KL kolmá na AB i CD a tyto dvě přímky jsou rovněž kolmé. Jeho povrch je $\frac{1}{2} a\sqrt{c^2 + 4d^2} + \frac{1}{2} c\sqrt{a^2 + 4d^2}$.