Korespondenční semináře ÚV MO

Karel Horák

Korespondenční semináře mají už poměrně slušnou tradici. Já se do jejich přípravy zapojil v okamžiku, kdy jsem nastoupil aspiranturu v Matematickém ústavu ČSAV a tam se sešel s Tondou Vrbou, který až do svého faux pas s odznakem polské Solidarności na klopě při setkání úspěšných olympioniků se zástupci ministerstva školství někdy v roce 1981 obstarával náplň těchto seminářů i opravovatele úloh a dával do kupy jimi sepsané komentáře. Díky shora uvedenému poklesku svého přítele jsem pak dostal možnost vyšvihnout se na jeho místo s honosným titulem tajemníka ústředního výboru.

V době, kdy jsem se ujal korespondenčního semináře, nebyly třídy se speciálním zaměřením na matematiku ještě příliš obvyklé, proto byl tento seminář zaměřen především na špičkové řešitele mimo Prahu, Brno, Bílovec a Bratislavu. Postupně však začal zcela přirozeně zahrnovat i ostatní nadané studenty a stal se tak jednou z běžných součástí přípravy potenciálních reprezentantů našich zemí na mezinárodní matematické olympiádě. Do opravování úloh se z velké většiny zapojovali zejména bývalí úspěšní olympionici, kteří postupně přecházeli z řad účastníků do řad organizátorů, a někteří v tom vytrvali i po ukončení studia matematicko-fyzikální fakulty (Jan Kratochvíl, Miroslav Engliš).

Korespondenční seminář nikdy neobsahoval nové originální úlohy, nicméně bylo dobrou snahou jeho organizátorů přinést co nejpestřejší výběr úloh nepříliš známých. Velmi bohatým zdrojem takovýchto úloh pro mne od počátku byl Zadačnik sovětského časopisu Kvant, který v každém čísle publikoval pět často původních úloh, což po deseti ročnících v roce 1981 znamenalo už slušnou zásobu 600 kvalitních úloh. A bylo vždy povzbuzující, když naši účastníci našli často originálnější postupy i slabiny původně publikovaných úloh a jejich řešení. Z tohoto výběru si teď můžete pokusit vyřešit pětici úloh použitých koncem 80. let.

Úlohy

1. Je dáno $2n+1$ kladných čísel takových, že rozdíl mezi součtem libovolných $n+1$ daných čísel a součtem zbylých n čísel je kladný. Dokažte, že pro součin B všech $\binom{2n+1}{n+1}$ takových rozdílů a součet A všech $2n+1$ daných čísel platí

$$B^n \leqq A\binom{2n}{n-1}.$$

2. Na večírek přišlo n manželských párů. Při konverzaci vzniklo několik skupinek $c_1, c_2, \ldots, c_k$ takových, že žádní dva manželé nebyli pohromadě v žádné ze skupin, zatímco každá jiná dvojice byla právě v jedné ze skupin. Dokažte, že pro $n \geqq 4$ je $k \geqq 2n$. Platí uvedené tvrzení i pro $n = 3$?

3. Jestliže

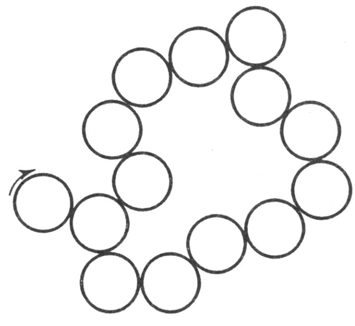
$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0,$$

tak

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

Dokažte.

4. Uvažujme n stejných mincí, které leží na stole a vytvářejí uzavřený řetěz (každé dvě sousední se dotýkají). Kolik otáček vykoná mince stejného rozměru, jestliže s ní objedeme (bez klouzání) celý řetěz (obr. 15), tj. předpokládáme-li, že pohybující se mince se dotkne každé z daných mincí? Jak se odpověď změní, bude-li mít tato mince k-krát větší poloměr než mince v řetězu?



Obr. 15

5. Dokažte, že na povrchu devatenáctistěnu, který je opsán kouli o poloměru 10, existují dva body, jejichž vzdálenost je větší než 21.

Řešení

1. Označme $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ daná čísla. Pro každé pevné $i \in \{1, 2, \ldots, 2n+1\}$ uvažujme všechny rozdíly tvaru

$$x_i + \sum_{j \in \mathsf{A}} x_j - \sum_{j \in \mathsf{B}} x_j = x_i + a - b,$$

kde množiny A, B jsou dvě disjunktní n-prvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, 2n+1\}$, $i \notin \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$. Takových rozdílů je $\binom{2n}{n}$ a můžeme je rozdělit do dvojic

$$x_i + a - b, \qquad x_i - a + b,$$

pro něž dostaneme $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}$ nerovností

$$0 < (x_i + a - b)(x_i - a + b) \leqq x_i^2. \tag{1}$$

Celkem tak (pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, 2n+1\}$) dostaneme $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}(2n+1)$ nerovností, jejichž vynásobením vyjde

$$B^{n+1} \leqq A^{\binom{2n}{n}},$$

neboť každý z rozdílů $(x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_{n+1}}) - (\ldots)$ se na levé straně vyskytne právě $(n + 1)$-krát (pro $i = x_{i_1}$, $i = x_{i_2}$, …, $i = x_{i_{n+1}}$).

A protože
$$\frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \binom{2n}{n-1},$$
je také zároveň
$$B^n \leqq A^{\binom{2n}{n-1}},$$
což jsme měli dokázat.

Podle počtu tehdy zaslaných řešení šlo o úlohu obtížnější, i když uvedené řešení to zcela nepotvrzuje. U podobných úloh se vždy vyplatí podívat se na triviální případy pro malá n, které mohou napovědět obecné řešení. Došlá řešení se většinou lišila jen v jasnosti argumentace. Kromě nerovnosti (1) bylo možno použít i obecnější nerovnosti pro součin $F(x_i)$ všech rozdílů tvaru $x_i + a - b$, jejichž aritmetický průměr je podle stejné úvahy x_i (I. Martišovitš), takže
$$F(x_i) \leqq x_i^{\binom{2n}{n}}.$$
Je tedy
$$B^{n+1} = \prod_{i=1}^{2n+1} F(x_i) \leqq \left(\prod_{i=1}^{2n+1} x_i\right)^{\binom{2n}{n}} = A^{\binom{2n}{n}}.$$
Řada řešitelů také opomenula zdůraznit, že uvedené nerovnosti lze násobit jen díky tomu, že uvažované rozdíly jsou (dle předpokladu) kladné!

2. Z předpokladů úlohy především plyne, že každé dvě skupinky mají nejvýše jeden společný prvek a každá má nejvýše n členů (jinak by v ní byl aspoň jeden manželský pár). Označme jednotlivé hosty čísly 1, 2, …, $2n$ a dále označme d_i počet skupinek, ve kterých je host číslo i.

Je-li $d_i = 2$ pro nějaké i, pak musí obě skupiny A, B dohromady obsahovat všechny hosty kromě partnera hosta i (i se v jiných skupinkách nevyskytuje). Je tedy
$$|\mathsf{A} \cup \mathsf{B}| = 2n - 1, \quad |\mathsf{A} \cap \mathsf{B}| = 1, \quad |\mathsf{A}| \leqq n, \quad |\mathsf{B}| \leqq n,$$
takže obě skupiny musí mít právě n členů. Vezmeme-li teď z každé z obou skupin po jednom členu $a \in \mathsf{A}$ a $b \in \mathsf{B}$, $a \neq i \neq b$, tak pokud to nejsou manželé, musí spolu být pohromadě v nějaké skupině c_j, ve které už nikdo jiný z $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ být nemůže. Takových dvojic, a tedy i různých skupin (když odečteme příslušné manželské dvojice) je $(n-1)(n-1) - (n-1) = (n-1)(n-2)$. Proto pro $n \geqq 4$ a pro počet k skupinek platí
$$k \geqq 2 + (n-1)(n-2) = n^2 - 3n + 4 \geqq 2n.$$

Zbývá vyřešit těžší případ, kdy je $d_i \geqq 3$ pro každé i, $1 \leqq i \leqq 2n$. Přiřaďme každému z hostů nějaké reálné číslo x_i a označme y_j součet těchto čísel pro všechny členy skupinky c_j, tj.
$$y_j = \sum_{i \in \mathsf{c}_j} x_i, \qquad 1 \leqq j \leqq k. \tag{1}$$

Označme ještě $\mathsf{M} = \{\{i,j\};\ i \text{ a } j \text{ jsou manželé}\}$ množinu manželských dvojic. Pak dostaneme následující odhad

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} y_j^2 &= \sum_{i=1}^{2n} d_i x_i^2 + 2 \sum_{\{r,s\}\notin \mathsf{M}} x_r x_s = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{2n} x_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{2n}(d_i-1)x_i^2 - 2\sum_{\{r,s\}\in \mathsf{M}} x_r x_s = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{2n} x_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{2n}(d_i-2)x_i^2 + \sum_{\{r,s\}\in \mathsf{M}} (x_r^2 + x_s^2 - 2x_r x_s) \geqq \\ &\geqq \sum_{i=1}^{2n}(d_i-2)x_i^2 \geqq \sum_{i=1}^{2n} x_i^2.\end{aligned}$$

Nejprve jsme využili toho, že každá dvojice $\{r,s\}$, $1 \leqq r < s \leqq 2n$, se vyskytuje právě v jedné skupině c_j, pokud r a s nejsou manželé, a nakonec toho, že dvojice manželů jsou (zpravidla) navzájem disjunktní.

Dostali jsme tak nerovnost

$$\sum_{j=1}^{k} y_j^2 \geqq \sum_{i=1}^{2n} x_i^2,$$

která říká, že pro $y_1 = y_2 = \ldots = y_k = 0$ má soustava rovnic (1) pouze triviální řešení $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n} = 0$. To ovšem znamená, že rovnic musí být rozhodně aspoň tolik co neznámých, tj. musí platit $k \geqq 2n$, což jsme měli dokázat.

Z předchozího řešení (z rozboru případu $d_i = 2$) snadno zjistíme, že tvrzení úlohy pro $n = 3$ neplatí. Označíme-li hosty 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, že i a $7-i$ jsou manželé, vystačíme se čtyřmi skupinkami $\{1,2,3\}$, $\{1,4,5\}$, $\{6,5,3\}$, $\{6,2,4\}$.

3. Tato úloha je velmi lehká a dá se řešit mnoha způsoby (předpokládáme samozřejmě, že je $a \neq b \neq c \neq a$). Roznásobením a jednoduchou úpravou se můžeme přesvědčit, že platí

$$\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right) = \frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}.$$

Odtud plyne tvrzení úlohy.

Jiné řešení (přirozenější varianta předchozího řešení). Položíme-li $x = b-c$, $y = c-a$, $z = a-b$, bude podle předpokladu $xyz \neq 0$ a

$$ayz + bxz + cxy = 0. \tag{2}$$

Zároveň zřejmě platí

$$x+y+z=0, \qquad ax+by+cz=0.$$

Vynásobíme-li rovnost (2) postupně čísly yz, zx a xy, dostaneme rovnosti

$$\begin{aligned} ay^2z^2 + bxyz^2 + cxy^2z &= 0,\\ axyz^2 + bx^2z^2 + cx^2yz &= 0,\\ axy^2z + bx^2yz + cx^2y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Jejich sečtením vyjde

$$ay^2z^2 + bx^2z^2 + cx^2y^2 + xyz\big(a(y+z) + b(z+x) + c(x+y)\big) = 0.$$

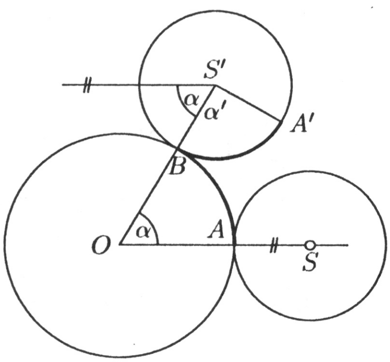
Podle uvedených vztahů přitom ale platí

$$\begin{aligned} a(y+z) + b(z+x) + c(x+y) &= a(y+z) + b(z+x) + c(x+y) + ax + by + cz =\\ &= (a+b+c)(x+y+z) = 0, \end{aligned}$$

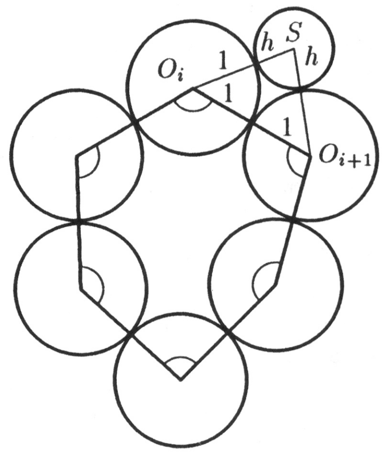
takže dostáváme hledanou rovnost

$$ay^2z^2 + bx^2z^2 + cx^2y^2 = 0.$$

4. Poloměr mincí v řetězu budeme považovat za jednotkový. Z obr. 16 je vidět, že mince o poloměru k se po objetí oblouku délky α otočí kolem svého vlastního středu o úhel $\alpha + \alpha' = \alpha + \frac{1}{k}\alpha = \left(1 + \frac{1}{k}\right)\alpha$ (odpovídající oblouky AB a $A'B$ mají totiž stejnou délku). Speciálně pro $k = 1$ se mince po „projetí“ oblouku délky α sama otočí o úhel 2α.



Obr. 16



Obr. 17

Najdeme tedy součet délek oblouků, které uvažovaná mince objede. Označme O_1, O_2, …, O_n středy jednotlivých mincí v řetězu. Pohybující se mince se určitě nebude pohybovat po obloucích ležících uvnitř n-úhelníku $O_1O_2\ldots O_n$, jejichž celková délka je $(n-2)\pi$ (součet vnitřních úhlů n-úhelníku). Z celkové délky $2\pi n$ všech n kružnic musíme ovšem ještě odečíst ty části oblouků mezi dvěma sousedními mincemi, kterých se otáčející se mince nikdy nedotkne a jež leží v rovnoramenném trojúhelníku O_iSO_{i+1} (obr. 17). Jednoduchým výpočtem zjistíme, že délka těchto dvou oblouků je mezi každými dvěma mincemi rovna $2\arccos\dfrac{1}{1+k}$. Celkový součet délek oblouků, po nichž se uvažovaná mince pohybuje, tedy bude

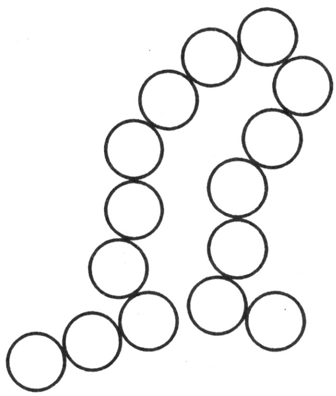
$$2n\pi-(n-2)\pi-2n\arccos\frac{1}{1+k},$$

čemuž odpovídá

$$\frac{1+k}{2k}\left(n+2-\frac{2}{\pi}n\arccos\frac{1}{1+k}\right)$$

otáček pohybující se mince. Speciálně pro $k=1$ vyjde počet otáček jako $\frac{1}{3}n+2$.

Předpoklad, že otáčející se mince se dotkne všech mincí v řetězu, je důležitý, protože jinak bychom nemohli počet otáček v závislosti na počtu daných mincí určit. Zřetězené mince by totiž mohly vytvořit „záliv“ (obr. 18), do kterého by se objíždějící mince vůbec nedostala.



Obr. 18

5. Dokážeme tvrzení úlohy sporem. Předpokládejme, že každé dva body na povrchu devatenáctistěnu mají vzdálenost nejvýše 21. Je-li V_d objem devatenáctistěnu a V objem jemu vepsané koule, je

$$V<V_d.$$

Devatenáctistěn je tvořen 19 jehlany se společným vrcholem ve středu S vepsané koule a jejich podstavy tvoří stěny devatenáctistěnu. Je-li S_i obsah i-té stěny a r poloměr vepsané koule, je

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3<\frac{1}{3}r(S_1+S_2+\ldots+S_{19}) \tag{1}$$

(to je mimochodem vztah mezi povrchem koule a povrchem devatenáctistěnu).

Uvažujme bod X některé stěny devatenáctistěnu a bod S' dotyku této stěny s vepsanou koulí, pak je $|XS'|\leqq\sqrt{21}$. Kdyby totiž bylo naopak $|XS'|>\sqrt{21}$, bylo by také $|XS|>\sqrt{10^2+21}=11$. Pro druhý bod $Y\neq X$ průniku přímky XS s povrchem devatenáctistěnu potom platí $|YS|\geqq 10$ a $|XY|=|XS|+|YS|>21$, což je ve sporu s naším předpokladem.

Zjistili jsme, že každá stěna devatenáctistěnu je částí kruhu se středem v bodě dotyku a poloměrem 21. Je tedy

$$S_i\leqq 21\pi,\qquad 1\leqq i\leqq 19.$$

Rovnost (1) pak pro $r=10$ znamená, že

$$400\pi<19\cdot 21\pi,\qquad \text{tj.}\qquad 400<399,$$

a to je spor.