Vybrané úlohy MO ročníků 41-50

In: Leo Boček (editor); Karel Horák (editor): [dokumenty-11] Padesát let matematické olympiády. 1951-2001. (Czech). Praha: Matfyzpress, 2001. pp. 11–67.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405391

Vybrané úlohy MO ročníků 41–50

41 – A – I – 3

Jestliže všechny zlomky se jmenovatelem nejvýše rovným n, jež leží v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a jsou zapsány v základním tvaru, seřadíme podle velikosti, pak pro každé dva sousední zlomky $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ bude platit $cb - ad = 1$ (čísla 0 a 1 chápeme jako zlomky $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$). Dokažte.

Řešení. Platí-li $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ $(b, d > 0)$, platí i $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$. Je-li navíc $bc - ad = 1$, je také $b(a+c) - a(b+d) = 1$ a $c(b+d) - d(a+c) = 1$. Vyjdeme tedy od zlomků $\frac{0}{1}$ a $\frac{1}{1}$, to bude první krok. Při druhém kroku přidáme mezi tyto zlomky zlomek $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$, při třetím kroku přidáme mezi tyto zlomky $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{3}$, dostaneme tak konečnou posloupnost $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{1}$. Tak postupujeme dále, při n-tém kroku přidáme mezi každé dva zlomky $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$ zlomek $\dfrac{a+c}{b+d}$; pokud ovšem bude $b + d \leqq n$. Dostaneme konečnou posloupnost zlomků, jejichž jmenovatelé jsou vesměs přirozená čísla nejvýše rovná n, a budou-li stát v této posloupnosti zlomky $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$ vedle sebe, platí pro ně $bc - ad = 1$. Stačí už jenom ukázat, že jsme tím dostali všechny zlomky z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ se jmenovatelem menším než $n + 1$.

Předpokládejme tedy, že zlomek $\dfrac{p}{q}$ $(q \leqq n)$ v naší posloupnosti není, pak musí ležet mezi dvěma jejími sousedními členy $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$, tj. $\dfrac{a}{b} < \dfrac{p}{q} < \dfrac{c}{d}$, odkud plyne $bp - aq \geqq 1$, $cq - dp \geqq 1$. Vynásobíme-li první nerovnost d, druhou b a sečteme-li je, dostaneme s využitím vztahu $bc - ad = 1$ nerovnost $q \geqq b + d$. To ale znamená, že $b + d \leqq n$. Pak by ale zlomky $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$ nemohly být sousedními členy uvažované posloupnosti, protože by mezi nimi ležel ještě zlomek $\dfrac{a+c}{b+d}$. Tím je dokázáno, že po n-tém kroku obsahuje posloupnost všechny zlomky $\dfrac{p}{q}$, pro které je $0 \leqq p \leqq q \leqq n$.

41 – A – III – 5

Uvažujme funkci f definovanou v intervalu $(0, 1)$ jako

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ iracionální}, \\ \dfrac{p+1}{q}, & x = \dfrac{p}{q}, \end{cases}$$

kde $0 < p < q$ jsou nesoudělná celá čísla. Najděte maximum funkce f na intervalu $(\frac{7}{8}, \frac{8}{9})$.

Řešení. V intervalu $(\frac{7}{8}, \frac{8}{9})$ leží číslo $\frac{15}{17}$, pro které je $f(\frac{15}{17}) = \frac{16}{17} > \frac{8}{9}$. Podle řešení úlohy A–I–3 neleží v intervalu $(\frac{7}{8}, \frac{15}{17})$ žádné racionální číslo $\frac{p}{q}$ se jmenovatelem $q < 25$ a podobně interval $(\frac{15}{17}, \frac{8}{9})$ neobsahuje žádné racionální číslo $\frac{p}{q}$ se jmenovatelem $q < 26$. Pro každé racionální číslo $\frac{p}{q}$ z intervalu $(\frac{7}{8}, \frac{8}{9})$, $\frac{p}{q} \neq \frac{15}{17}$, tedy platí $q \geqq 26$, a proto je

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} + \frac{1}{q} < \frac{8}{9} + \frac{1}{26} < \frac{16}{17}.$$

Protože pro každé iracionální číslo $x \in (\frac{7}{8}, \frac{8}{9})$ je $f(x) = x < \frac{8}{9}$, je hledané maximum $\frac{16}{17}$.

41 – C – I – 5

Jsou-li a, b, c velikosti stran trojúhelníku a t_a, t_b, t_c velikosti příslušných těžnic, pak

$$\frac{3}{4} < \frac{t_a + t_b + t_c}{a + b + c} < 1.$$

Dokažte.

Řešení. Označme K, L, M středy stran po řadě protilehlých vrcholům A, B, C daného trojúhelníku a T jeho těžiště (obr. 1). Podle trojúhelníkové nerovnosti v trojúhelníku BCT platí

$$|BC| < |BT| + |CT|, \quad \text{tj.} \quad a < \frac{2}{3}t_b + \frac{2}{3}t_c.$$

Podobně z trojúhelníků ABT a CAT usoudíme, že

$$c < \frac{2}{3}t_a + \frac{2}{3}t_b \quad \text{a} \quad b < \frac{2}{3}t_c + \frac{2}{3}t_a.$$

Sečtením těchto tří nerovností dostaneme

$$a + b + c < \frac{4}{3} \cdot (t_a + t_b + t_c),$$

což je vlastně levá dokazovaná nerovnost. Dále si všimněme, že podle trojúhelníkové nerovnosti v trojúhelníku KMA platí

$$|AK| < |KM| + |AM|, \quad \text{tj.} \quad t_a < \frac{b}{2} + \frac{c}{2},$$

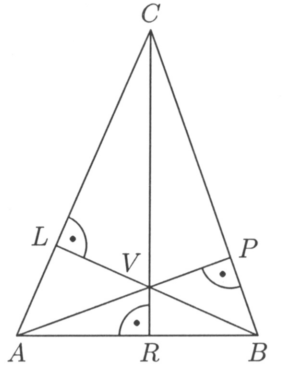
podobně z trojúhelníků LKB a MLC plyne

$$t_b < \frac{c}{2} + \frac{a}{2} \quad \text{a} \quad t_c < \frac{a}{2} + \frac{b}{2}.$$

Sečtením těchto tří nerovností dostaneme

$$t_a + t_b + t_c < 2\Big(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\Big) = a + b + c,$$

a to je vlastně pravá dokazovaná nerovnost.



Obr. 1

41 – C – I – 6

Najděte nejmenší přirozené číslo n tak, aby existovalo právě 45 uspořádaných dvojic (u, v) přirozených čísel, jejichž nejmenší násobek je n.

Řešení. Je-li $p, q, r, \ldots$ posloupnost všech prvočíselných dělitelů hledaného čísla n, pak rozklad n na prvočinitele má tvar $n = p^a q^b r^c \ldots$, kde exponenty a, b, c, … jsou celá kladná čísla. Libovolní dva dělitelé čísla n pak mají tvar

$$n = p^d q^e r^f \ldots \quad \text{a} \quad n = p^g q^h r^i \ldots,$$

kde d, e, f, …, g, h, i, … jsou celá *nezáporná* čísla. Navíc je číslo n je nejmenší společný násobek těchto čísel u a v, právě když platí soustava rovností

$$a = \max(d, g), \;\; b = \max(e, h), \;\; c = \max(f, i), \;\; \ldots .$$

Výběry možných dvojic (d, g), (e, h), (f, i), … jsou tedy navzájem nezávislé, např. pro dvojici (d, g) máme možnosti

$$(0, a), \; (1, a), \; \ldots, \; (a, a), \; (a, a-1), \; \ldots, \; (a, 1), \; (a, 0),$$

tj. právě $(2a + 1)$ možností. Existuje tedy právě $(2a + 1)(2b + 1)(2c + 1)\ldots$ uspořádaných dvojic (u, v) zkoumané vlastnosti. (Všimněte si, že určený počet závisí na exponentech a, b, c, ..., nikoliv na hodnotách prvočísel p, q, r, ... v rozkladu čísla n.) Požadovaná rovnost

$$45 = (2a+1)(2b+1)(2c+1)\dots$$

představuje rozklad čísla 45 na několik celých činitelů větších než 1, tedy jeden ze součinů 45, $15 \cdot 3$, $9 \cdot 5$ nebo $5 \cdot 3 \cdot 3$ (na pořadí činitelů nebereme ohled). To znamená, že číslo n má jeden z tvarů

$$p^{22}, \quad p^7q^1, \quad p^4q^2, \quad p^2q^1r^1.$$

Nejmenší představitelé těchto čtyř typů jsou čísla 2^{22}, $2^7 \cdot 3$, $2^4 \cdot 3^2$ a $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ (za p, q, r dosazujeme nejmenší prvočísla, přitom vždy k menšímu prvočíslu přiřazujeme větší exponent). Nejmenší je poslední z těchto čísel, tj. číslo 60.

42 – B – I – 4

Honza si zapomněl poznačit kvadratickou rovnici, kterou měl doma řešit. Pamatoval si však, že koeficient u kvadratického členu byl 3 a u lineárního členu 25. U absolutního členu se spletl pouze ve znaménku. Obě rovnice (ta, kterou měl řešit, i ta, kterou řešil) měly celočíselný kořen. Zjistěte, které to byly rovnice.

Řešení. Rovnice mají tvar

$$3x^2 + 25x \pm c = 0; \quad c > 0.$$

Jejich diskriminanty jsou

$$D_{1,2} = 625 \mp 12c \tag{2}$$

a kořeny

$$x_{1,2} = \frac{-25 \pm \sqrt{D_i}}{6}, \quad i = 1, 2.$$

Odtud $\pm\sqrt{D_i} = 25 + 6x_{1,2}$. Je-li některý z kořenů celé číslo, pak musí být také $\pm\sqrt{D_i}$ celé a dále některý z výrazů $-25 \pm \sqrt{D_i}$ je dělitelný šesti. Číslo $\sqrt{D_1} = \sqrt{625 - 12c} < 25$ budeme tedy hledat ve tvaru $\sqrt{D_1} = 6k \pm 1$, $k \in \mathbb{N}_0$. Ze vztahu (2) vyplývá, že $D_1 + D_2 = 1\,250$. $\sqrt{D_2} = \sqrt{1\,250 - D_1}$ musí být celé. Postupně volíme za $\sqrt{D_1}$ čísla 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 a určujeme $\sqrt{D_2}$. Zjistíme, že vyhovuje pouze $\sqrt{D_1} = 5$ nebo $\sqrt{D_1} = 17$.

V prvém případě je $c = \frac{625 - D_1}{12} = 50$ a jedná se o rovnice $3x^2 + 25x \pm 50 = 0$, ve druhém případě to budou rovnice $3x^2 + 25x \pm 28 = 0$. Vyřešením rovnic se přesvědčíme, že vyhovují podmínkám úlohy. Existují tedy dvě různé dvojice rovnic, které jsou řešením dané úlohy.

42 – B – II – 1

Zjistěte, pro která reálná čísla a má soustava rovnic

$$\begin{aligned} x+y &= z+2, \\ x^2+y^2 &= z^2+4, \\ x^3+y^3 &= z^3+a \end{aligned}$$

řešení v oboru reálných čísel, a vyřešte ji.

Řešení. Umocníme-li první rovnici na druhou a od výsledku odečteme rovnici druhou, dostaneme $2xy = 4z$. Z dvojice rovnic $xy = 2z$ a $x + y = z + 2$ vyplývá, že $\{x, y\} = \{2, z\}$. Proto $x^3 + y^3 = z^3 + 8$, takže $a = 8$ je jediná hodnota, kdy má soustava řešení. Všechna řešení pro $a = 8$ jsou trojice (x, y, z) tvaru $(2, p, p)$ nebo $(p, 2, p)$, kde p je libovolný parametr.

42 – B – S – 2

Pro která reálná čísla p má soustava rovnic

$$\begin{aligned} x^3-x+3p &= 6, \\ x^3+x+4p &= 10 \end{aligned}$$

aspoň jedno řešení v oboru reálných čísel?

Řešení. Je-li u společný kořen obou rovnic, pak

$$0 = (u^3 - u + 3p - 6) - (u^3 + u + 4p - 10) = -2u - p + 4,$$

odkud $u = -\frac{p}{2} + 2$. Dosazením zpět do libovolné z obou rovnic dostaneme podmínku na číslo p, která je po úpravě tvaru kubické rovnice $p(p^2 - 12p + 20) = 0$ s kořeny $p_1 = 0$, $p_2 = 2$ a $p_3 = 10$. Snadno se přesvědčíme, že daná dvojice rovnic pak má skutečně společný kořen u rovný 2, 1 resp. -3.

42 – Z9 – II – 1

Jestliže pro trojciferná čísla a, b platí $a + b = 1\,000$, potom se čísla a^2, b^2 shodují v posledním trojčíslí. Dokažte.

Řešení. Protože $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 1\,000(a - b)$, je v uvažovaném případě rozdíl $a^2 - b^2$ dělitelný číslem $1\,000$, a proto se čísla a^2, b^2 shodují v posledních třech číslicích.

43 – A – I – 4

Pro která celá $n > 2$ existují racionální čísla p a q taková, že $\sqrt[3]{n} = p + q\sqrt[3]{2}$?

Řešení. Umocněním na třetí dostaneme ekvivalentní rovnost

$$n = (p^3 + 2q^3) + 3p^2q\sqrt[3]{2} + 3pq^2\sqrt[3]{4}. \tag{1}$$

Zabývejme se nejdříve případem $n = 4$. Je-li $\sqrt[3]{4} = p + q\sqrt[3]{2}$, pak z (1) plyne

$$4 = (p^3 + 2q^3) + 3p^2q\sqrt[3]{2} + 3pq^2\big(p + q\sqrt[3]{2}\big), \tag{2}$$

neboli $4 - p^3 - 2q^3 - 3p^2q^2 = \sqrt[3]{2}(3p^2q + 3pq^3)$. Protože $\sqrt[3]{2}$ je iracionální číslo, je poslední rovnost možná, jen když $4 - p^3 - 2q^3 - 3p^2q^2 = 0$ a $3pq(p + q^2) = 0$. Z druhé rovnice plyne $p = 0$, $q = 0$ nebo $p = -q^2$, dosazením do první pak po řadě $q^3 = 2$, $p^3 = 4$, resp. $q^6 + q^3 - 2 = 0$. Protože čísla p a q jsou racionální, je z poslední trojice splnitelná jen třetí podmínka, která znamená, že $q^3 = -2$, nebo $q^3 = 1$. Dostáváme tak jedinou dvojici $(p, q) = (-1, 1)$, pro kterou sice platí (2), ne však $\sqrt[3]{4} = p + q\sqrt[3]{2}$. Proto poslední rovnost nesplňují žádná racionální p a q.

V obecném případě ukážeme, že platí-li (1) pro některá racionální n, p a q, pak koeficient $3pq^2$ u členu $\sqrt[3]{4}$ musí být roven nule. Jinak by totiž šlo z (1) vyjádřit

$$\sqrt[3]{4} = \frac{n - p^3 - 2q^3}{3pq^2} - \frac{p}{q} \cdot \sqrt[3]{2},$$

což by byl spor s tím, že číslo 4 není řešením. Proto platí $3pq^2 = 0$, tj. $p = 0$ nebo $q = 0$. Pak ovšem $n = p^3$ nebo $n = 2q^3$. Je-li navíc číslo n celé, musí být v posledních dvou rovnostech i čísla p, q celá. Odpověď: $n = k^3$ nebo $n = 2k^3$, kde $k > 1$ je celé číslo.

43 – A – II – 4

Rozhodněte, zda existuje kubická rovnice

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

s celočíselnými koeficienty p, q a r, která má v oboru reálných čísel jediný kořen $x_0 = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. *(J. Šimša)*

Řešení. Postupně spočteme

$$x_0^2 = 5 + 4\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}, \quad x_0^3 = 19 + 15\sqrt[3]{2} + 12\sqrt[3]{4}.$$

Dosazením do rovnice (1) tak po úpravě dostaneme podmínku

$$(19 + 5p + q + r) + (15 + 4p + q)\sqrt[3]{2} + (12 + 3p + q)\sqrt[3]{4} = 0,$$

která je splněna, pokud jsou rovna nule všechna tři čísla $19+5p+q+r$, $15+4p+q$ a $12+3p+q$. (Podle úlohy A–I–4 domácího kola je to nejen postačující, ale i nutná podmínka.) Snadným výpočtem zjistíme jedinou trojici $(p,q,r) = (-3,-3,-1)$. Zbývá dokázat, že rovnice

$$x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$$

má jediný reálný kořen. To lze provést více způsoby (asi nepříliš schůdné je dělení kořenovým dvojčlenem $x - x_0$), např. takto: protože $3x^2 + 3x + 1 > 0$ pro každé reálné x, je každý kořen rovnice $x^3 = 3x^2 + 3x + 1 > 0$ kladný; ze zápisu $1 = \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ plyne, že tento kořen je nejvýše jeden (pravá strana je totiž pro kladná x klesající).

Jiné řešení. Platí

$$x_0 = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} = \frac{1^3 - \left(\sqrt[3]{2}\right)^3}{1 - \sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1},$$

takže $\frac{1}{x_0} = \sqrt[3]{2} - 1$. Proto je x_0 řešením rovnice

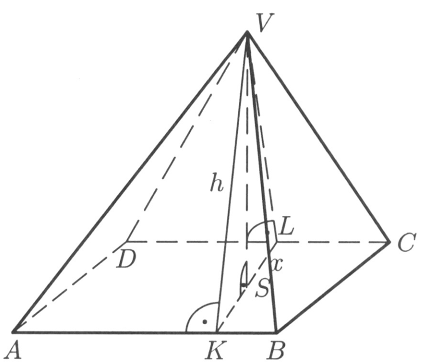
$$\left(\frac{1}{x} + 1\right)^3 = 2,$$

přičemž je jasné, že tato rovnice má v oboru reálných čísel **jediný** kořen. Pro $x \neq 0$ je ovšem tato rovnice ekvivalentní s $(1+x)^3 = 2x^3$, což je po roznásobení hledaná rovnice.

43 – B – I – 6

Určete největší možný objem čtyřbokého jehlanu $ABCDV$, jehož základnou je kosočtverec $ABCD$ se stranou délky a a jehož stěnové výšky z vrcholu V na hrany AB, CD mají délku h.

Řešení. Označme K, L paty kolmic z V na hrany AB, CD. Přímka AB je kolmá na rovinu KLV, protože je kolmá k přímkám KV, LV (obr. 2). Odtud $KL \perp AB$.



Obr. 2

Výška kosočtverce $ABCD$ je $|KL| = 2x$. Pata výšky jehlanu leží v rovině KLC a je zřejmě totožná se středem S úsečky KL. Z pravoúhlého trojúhelníku KSV je tato výška $v = \sqrt{h^2 - x^2}$. Objem jehlanu je tedy

$$V = \frac{2}{3}ax\sqrt{h^2 - x^2} = \frac{2}{3}\,a\sqrt{x^2h^2 - x^4}.$$

Objem bude maximální, právě když bude maximální výraz pod odmocninou

$$U = x^2h^2 - x^4 = \frac{1}{4}h^4 - \left(x^2 - \frac{1}{2}h^2\right)^2.$$

Maximum hledáme na intervalu $0 < x < \frac{1}{2}a$, protože výška kosočtverce $2x$ je menší než velikost a jeho strany. Kvadratická funkce U proměnné $t = x^2$ nabývá absolutního maxima pro $x = \dfrac{h}{\sqrt{2}}$, proto závisí další diskuse na tom, zda bod $\dfrac{h}{\sqrt{2}}$ padne do intervalu $(0, \frac{1}{2}a)$ či nikoliv. Pro $h\sqrt{2} < a$ je tedy maximální objem jehlanu $V_{\max} = \frac{1}{3}ah^2$.

Pro $a \leqq h\sqrt{2}$ je kvadratická funkce U v intervalu $(0, \frac{1}{2}h^2)$ rostoucí, a proto objem jehlanu v tomto případě nemá maximum, ale neomezeně se blíží hodnotě $V_{\max} = a^2\dfrac{\sqrt{4h^2 - a^2}}{6}$ (pro $x = \frac{1}{2}a$ dostaneme čtvercovou podstavu — zde předpokládáme, že *podle běžně užívané definice* čtverec *není* kosočtverec).

43 – B – II – 4

Každý z bodů krychle o hraně délky a obarvíme právě jednou ze tří barev. Dokažte, že pak mezi těmito body existují dva téže barvy, jejichž vzdálenost je větší než $\frac{7}{5}a$.

(*P. Leischner*)

Řešení. Označme vrcholy dané krychle obvyklým způsobem A, B, C, D, E, F, G, H. Je-li vrchol A obarven jednou ze tří barev a některý z vrcholů C, F, H má tutéž barvu, jsme hotovi, neboť $|AC| = |AF| = |AH| = a\sqrt{2} > 1{,}41a > \frac{7}{5}a$. V opačném případě musí být uvedené tři vrcholy rovnostranného trojúhelníku CFH obarveny nejvýše dvěma různými barvami, takže aspoň dva z bodů C, F, H mají tutéž barvu. Jejich vzdálenost je větší než $\frac{7}{5}a$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

43 – Z5 – I – 4

V jednom městě mají tři kina. V kině Slunce prodávají vstupenky za 7 korun. V kině Mars za 8 korun, ale každý desátý návštěvník má vstup zdarma. V kině Venuše prodávají vstupenky za 9 korun, také každý desátý návštěvník má vstup zdarma, ale navíc každý stý návštěvník vyhrává 100 korun. V kině Mars vybrali na posledním představení 2 776 korun. Kolik by vybrali v kině Venuše a Slunce, kdyby je navštívil stejný počet diváků? (Pod vybranými penězi rozumíme ty, které zůstanou po zakoupení lístků v pokladně. Výhry se platí z vybraných peněz, tedy ve Venuši vyberou o to méně.) (*M. Koman*)

Řešení. Od každé desítky diváků vyberou v kinu Mars $9 \cdot 8 = 72$ korun. Kino Mars navštívilo $2\,776 : 72 = 38$ (zbytek 40) celých desítek diváků. Zbývajících 40 korun vybrali od 5 diváků. Do kina Mars přišlo 385 diváků.

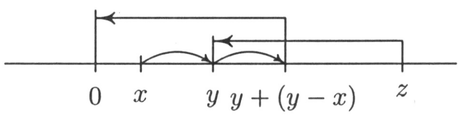
Od stejného počtu diváků by v kinu Slunce vybrali $7 \cdot 385 = 2\,695$ korun.

V kinu Venuše od 38 desítek diváků vyberou $38 \cdot (9 \cdot 9) = 3\,078$ korun a od posledních pěti diváků $5 \cdot 9 = 45$ korun. Na výhrách přitom vyplatili 300 korun. V pokladně kina Venuše zůstalo $3\,078 + 45 - 300 = 2\,833$ korun.

43 – Z8 – I – 3

Na číselné ose jsou znázorněna tři čísla x, y, z. Narýsuj na této číselné ose obraz nuly, jestliže víš, že $3y = x + z$. Najdi řešení pro všechny polohy čísel x, y, z, pro které $x < y < z$. (*P. Černek*)

Řešení. Danou rovnost $3y = x + z$ můžeme upravit takto: $y + (y - x) + (y - z) = 0$. Proto dostaneme obraz počátku tak, že k obrazu bodu y „přičteme" $y - x$ a $y - z$. Obě tyto hodnoty vyčteme z číselné osy (obr. 3).



Obr. 3

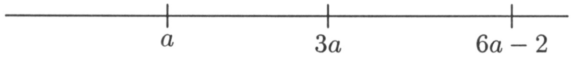
Jiné řešení. Rovnost $3y = x + z$ dělíme číslem 2. Dostaneme

$$1{,}5 \cdot y = \frac{x + z}{2}.$$

Obrazem aritmetického průměru x a z je střed úsečky určené body x a z, což je zároveň obraz bodu $1{,}5 \cdot y$. Známe-li obrazy čísel y a $1{,}5 \cdot y$ snadno najdeme počátek.

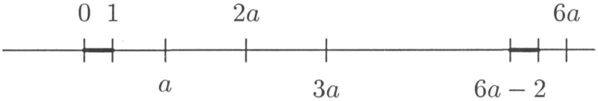
43 – Z8 – II – 2

Na číselné ose jsou vyznačeny obrazy čísel a, $3a$, $6a - 2$. Sestrojte obrazy čísel 0 a 1.



Řešení. Nejprve najdeme obraz čísla $2a$ jako střed úsečky s krajními body a a $3a$ a pak obraz 0 (a je střed úsečky určené obrazy čísel 0 a $2a$, obr. 4) a čísla $6a$ ($3a$ je střed dvojice bodů 0 a $6a$). Orientovaná úsečka s počátečním bodem $6a-2$ a koncovým bodem $6a$ znázorňuje číslo 2, takže její polovina odpovídá jednotkové úsečce. Jejím posunutím do bodu 0 dostaneme obraz čísla 1.

Při konstrukci je třeba rozlišit případy, kdy obraz $6a-2$ leží vlevo nebo vpravo od obrazu $6a$. Pokud by tyto obrazy splynuly, nemá úloha řešení.



Obr. 4

44 – A – I – 1

Pro daná kladná čísla $x \neq y$ uvažujme průměry

$$a = \frac{x+y}{2}, \; g = \sqrt{xy}, \; h = \frac{2xy}{x+y}, \; k = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

(Jde o aritmetický, geometrický, harmonický a kvadratický průměr čísel x a y.) Ze všech rozdělení čtveřice a, g, h, k na dvě dvojice r, s a t, u vyberte to rozdělení, při kterém má výraz $V = r + s - t - u$ nejmenší kladnou hodnotu. (*J. Šimša*)

Řešení. Uvedené kladné průměry splňují známé nerovnosti $h < g < a < k$. Ty plynou např. z vyjádření

$$k^2 - a^2 = \frac{(x-y)^2}{4}, \quad a^2 - g^2 = \frac{(x-y)^2}{4}, \quad g^2 - h^2 = \frac{xy(x-y)^2}{(x+y)^2}$$

a z podmínky $x \neq y$. (Je to poněkud vyumělkované zdůvodnění, řešitele vyzveme dokazovat každou ze tří nerovností metodou ekvivalentních úprav.)

Označme $V_1 = k + a - g - h$, $V_2 = k + g - a - h$ a $V_3 = k + h - a - g$. Ostatní tři hodnoty výrazu V jsou $-V_1$, $-V_2$ a $-V_3$. Protože

$$V_1 - V_2 = 2(a-g) > 0 \quad \text{a} \quad V_2 - V_3 = 2(g-h) > 0,$$

platí $V_1 > V_2 > V_3$. Dokážeme-li, že $V_3 > 0$, bude V_3 hledaná nejmenší kladná hodnota výrazu V. Nerovnost $V_3 > 0$ je ekvivalentní s nerovností $k - g > a - h$, jejíž obě strany jsou kladné. Můžeme ji proto ekvivalentně umocnit na druhou a pak přepsat do tvaru

$$2kg < k^2 + g^2 - a^2 + 2ah - h^2.$$

Před dalším umocněním vyjádříme pravou stranu této nerovnosti pomocí čísel x a y (a tak zjistíme, že je skutečně kladná). Vyjde nám

$$k^2 + g^2 - a^2 = \frac{(x+y)^2}{4} \quad \text{a} \quad 2ah - h^2 = \frac{2xy(x^2+y^2)}{(x+y)^2}.$$

Proto můžeme poslední nerovnost ekvivalentně umocnit na druhou:

$$4k^2g^2 = 2xy(x^2+y^2) < \frac{(x+y)^4}{16} + xy(x^2+y^2) + \frac{4x^2y^2(x^2+y^2)^2}{(x+y)^4}.$$

Tuto nerovnost lze ekvivalentně upravit na tvar

$$0 < \left\{ \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{2xy(x^2+y^2)}{(x+y)^2} \right\}^2.$$

Výraz v složené závorce je kladný, neboť je roven

$$\frac{(x+y)^4 - 8xy(x^2+y^2)}{4(x+y)^2} = \frac{(x-y)^4}{4(x+y)^2}$$

a $x \neq y$. Tím je důkaz hotov. Odpověď: Hledané rozdělení je $\{r,s\} = \{k,h\}$ a $\{t,u\} = \{a,g\}$, neboť nejmenší kladná hodnota výrazu V je rovna $k+h-a-g$.

44 – A – S – 3

Určete kladná reálná čísla $x \neq y$ taková, že jejich průměry

$$a = \frac{x+y}{2}, \quad g = \sqrt{xy}, \quad h = \frac{2xy}{x+y}, \quad k = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

leží všechny v množině $\mathsf{M} = \left\{\frac{45}{2}, 18\sqrt{2}, 30, 25\sqrt{2}, 40, 10\sqrt{23}\right\}$. (*J. Šimša*)

Řešení. Víme, že $h < g < a < k$. Protože prvky M jsou vypsány v pořadí od nejmenšího po největší, musí nastat některý z těchto případů:

(i) $g = 18\sqrt{2}$, (ii) $a = 40$, (iii) $g = 30$ a $a = 25\sqrt{2}$.

V každém z nich je už další postup snadný:

(i) Z $g = 18\sqrt{2}$ plyne $h = \frac{45}{2}$. Protože $xy = g^2 = 2 \cdot 18^2$, dostáváme

$$\frac{x+y}{2} = \frac{g^2}{h} = \frac{16 \cdot 9^2}{45} = \frac{144}{5}.$$

Poslední číslo nepatří do M, takže případ (i) nemůže nastat.

(ii) Z $a = 40$ plyne $k = 10\sqrt{23}$, takže

$$x + y = 2a = 80$$

a

$$x^2 + y^2 = 2k^2 = 4\,600.$$

Odtud $2xy = 80^2 - 4\,600 = 1\,800$, čili $xy = 900$ a $g = \sqrt{900} = 30 \in \mathsf{M}$. Konečně $h = \frac{2\cdot 900}{80} = \frac{45}{2} \in \mathsf{M}$. Čísla x a y jsou kořeny rovnice $t^2 - 80t + 900 = 0$, tedy $\{x, y\} = \{40 \pm 10\sqrt{7}\}$.

(iii) Platí

$$xy = g^2 = 900$$

a

$$x + y = 2a = 50\sqrt{2},$$

odkud $h = \frac{2\cdot 900}{50\sqrt{2}} = 18\sqrt{2} \in \mathsf{M}$. Dále

$$x^2 + y^2 = \left(50\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot 900 = 3\,200,$$

takže $k = \sqrt{1\,600} = 40 \in \mathsf{M}$. Čísla x a y jsou kořeny rovnice $t^2 - 50\sqrt{2}\,t + 900 = 0$, tedy $\{x, y\} = \{25\sqrt{2} \pm 5\sqrt{14}\}$.

Odpověď: $\{x, y\} = \{40 \pm 10\sqrt{7}\}$, $\{x, y\} = \{25\sqrt{2} \pm 5\sqrt{14}\}$.

44 – A – III – 2

Určete kladná reálná čísla x a y, víte-li, že průměry

$$a = \frac{x + y}{2}, \quad g = \sqrt{xy}, \quad h = \frac{2xy}{x + y}, \quad k = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

jsou přirozená čísla, jejichž součet se rovná 66. *(J. Šimša)*

Řešení. Protože číslo 66 není dělitelné čtyřmi, nemůže platit $a = g = h = k$, takže jak dobře víme, platí $h < g < a < k$. Označme c největší společný dělitel čísel a, g. Pak $a = ca_1$ a $g = cg_1$, přičemž $g_1 < a_1$ jsou nesoudělná přirozená čísla. Protože $h = \dfrac{g^2}{a} = \dfrac{cg_1^2}{a_1}$, je číslo c dělitelné číslem a_1, tedy $c = da_1$ pro vhodné přirozené číslo d. Dostáváme tak vyjádření průměrů pomocí čísel d, a_1, g_1:

$$h = dg_1^2, \ g = da_1g_1, \ a = da_1^2, \ k = \sqrt{2a^2 - g^2} = da_1\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}.$$

Protože druhá odmocnina z přirozeného čísla je buď přirozené, nebo iracionální číslo, musí být číslo $\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}$ přirozené (a to větší než a_1, neboť $g_1 < a_1$). Proto je levá strana rovnosti

$$dg_1^2 + da_1g_1 + da_1^2 + da_1\sqrt{2a_1^2 - g_1^2} = 66 \tag{$*$}$$

větší než $2a_1^2$ (vzhledem k nerovnosti $d \geqq 1$ stačí uvažovat jen třetí a čtvrtý sčítanec). Odtud plyne $2a_1^2 < 66$, neboli $a_1 \leqq 5$. Snadno se zjistí, která z deseti odmocnin

$$\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}, \qquad \text{kde} \quad 1 \leqq g_1 < a_1 \leqq 5,$$

je rovna přirozenému číslu: taková je jedině odmocnina $\sqrt{2 \cdot 5^2 - 1^2}$ pro $a_1 = 5$ a $g_1 = 1$. Dosazením do $(*)$ zjistíme, že $d = 1$. Průměry $(h, g, a, k) = (1, 5, 25, 35)$ má dvojice kořenů rovnice $t^2 - 50t + 25 = 0$, tedy dvojice čísel $\{x, y\} = \{25 + 10\sqrt{6}, 25 - 10\sqrt{6}\}$.

44 – B – I – 3

Pro daná kladná čísla $x \neq y$ uvažujme průměry

$$a = \frac{x+y}{2}, \; g = \sqrt{xy}, \; h = \frac{2xy}{x+y}, \; k = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

(Jde o aritmetický, geometrický, harmonický a kvadratický průměr čísel x a y.) Ze všech rozdělení čtveřice a, g, h, k na dvě dvojice r, s a t, u vyberte to rozdělení, pro které má výraz $V = rs - tu$ nejmenší kladnou hodnotu. *(J. Šimša)*

Řešení. Jedná se o známé průměry, které (při $x \neq y$) splňují nerovnosti

$$0 < h < g < a < k \tag{2}$$

(viz např. svazek ŠMM č. 39). Výraz V nabývá pouze hodnot

$$V_1 = ka - hg, \; V_2 = kg - ah, \; V_3 = ag - kh \; \text{ a } \; -V_1, \; -V_2, \; -V_3.$$

Dokážeme-li, že

$$V_1 > V_2 > V_3 > 0, \tag{3}$$

bude to znamenat, že V_3 je nejmenší kladná hodnota výrazu V. Levé dvě nerovnosti ve (3) plynou okamžitě z (2), neboť $V_1 - V_2 = (k+h)(a-g)$ a $V_2 - V_3 = (g+h)(k-a)$. Zbývá tedy dokázat, že $V_3 > 0$, neboli $ag > kh$. Důkaz je výhodné provést sporem: Nechť existují taková různá $x, y \in \mathbb{R}_+$, že $ag \leqq kh$, tj.

$$\sqrt{xy} \cdot \frac{1}{2}(x+y) \leqq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot \frac{2xy}{x+y}.$$

Obě strany této nerovnosti jsou kladné. Po umocnění na druhou a snadné úpravě dostaneme $(x+y)^4 \leqq 8(x^2+y^2)xy$; odtud $(x-y)^4 \leqq 0$, a to je spor.

44 – C – I – 3

Každý bod obvodu čtverce o straně 10 cm je obarven jednou ze dvou barev. Dokažte, že při libovolném obarvení můžeme na obvodu čtverce vždy najít body stejné barvy tak, aby trojúhelník s těmito vrcholy měl obsah aspoň $25\,\mathrm{cm}^2$. *(M. Čadek)*

Řešení. Vrcholy čtverce označme A, B, C, D. Mohou nastat dva případy:

1. Dva vrcholy na jedné straně mají stejnou barvu (např. modrou). Nechť jsou to např. vrcholy A, B. Existuje-li na straně CD čtverce bod X, který je obarven toutéž barvou, dostáváme trojúhelník ABX, jehož vrcholy jsou obarveny modrou barvou a jehož obsah je $50\,\mathrm{cm}^2 > 25\,\mathrm{cm}^2$. Mají-li však všechny body strany CD barvu jinou (např. červenou), uvažujme střed S strany BC. Je-li obarven modrou barvou, má trojúhelník ABS všechny vrcholy obarveny modrou barvou a obsah $25\,\mathrm{cm}^2$. Je-li S červený, pak trojúhelník CDS má všechny vrcholy červené a přitom obsah $25\,\mathrm{cm}^2$.

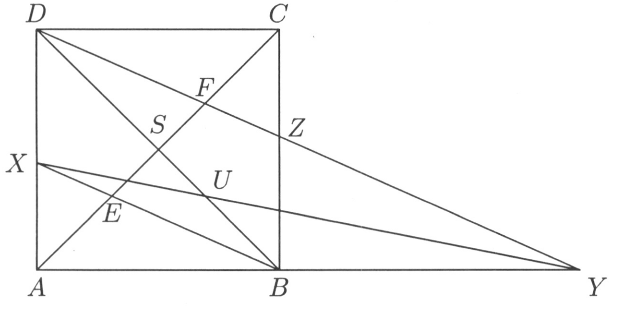
2. Žádné dva sousední vrcholy čtverce $ABCD$ nejsou obarveny stejnou barvou. (Např. A, C jsou modré a B, D jsou červené.) Uvažujme opět bod S, který je středem strany BC. Je-li obarven modrou barvou, pak trojúhelník ACS má obsah $25\,\mathrm{cm}^2$, a přitom jeho vrcholy jsou obarveny modrou barvou. Je-li bod S obarven červenou barvou, má trojúhelník BDS obsah $25\,\mathrm{cm}^2$, a přitom všechny jeho vrcholy mají červenou barvu.

Tím je důkaz ukončen.

44 – C – S – 2

V rovině je dán čtverec $ABCD$ se středem S. Uvnitř úseček SA a SC jsou zvoleny po řadě body E a F tak, že $|SE| = |SF|$. Sestrojme průsečík X polopřímky BE se stranou AD a průsečík Y polopřímky DF s prodloužením strany AB. Dokažte, že obsah trojúhelníka AXY nezávisí na poloze bodů E a F. *(J. Šimša)*

Řešení. Označme Z průsečík úseček BC a DY a U průsečík úseček BD a XY (obr. 5).



Obr. 5

1. způsob: Z dvojic podobných trojúhelníků $AYF \sim CDF$ a $AFD \sim CFZ$ plyne

$$\frac{|AY|}{|CD|} = \frac{|AF|}{|CF|} = \frac{|AD|}{|CZ|}.$$

Odtud dostáváme $|AY| \cdot |CZ| = |AD| \cdot |CD| = a^2$, kde a je délka strany daného čtverce $ABCD$. Díky své konstrukci jsou body X a Z středově souměrné podle středu S, proto je $|CZ| = |AX|$, takže pro obsah P trojúhelníka AXY platí $P = \frac{1}{2}|AY|\,|AX| = \frac{1}{2}|AY|\,|CZ| = \frac{1}{2}a^2$, tj. obsah nezávisí na volbě bodů E a F.

2. způsob: Protože body X a Z jsou středově souměrné podle středu S, je $YDXB$ lichoběžník (obr. 5), přičemž bod U je průsečíkem jeho úhlopříček BD a XY. Obsah trojúhelníka DXU je proto roven obsahu trojúhelníka BYU. Vzhledem k tomu, že obsah trojúhelníka AXY je součtem obsahů čtyřúhelníka $AXUB$ a trojúhelníka BYU, je obsah trojúhelníka AXY roven obsahu trojúhelníka ABD, což je $\frac{1}{2}a^2$.

44 – Z8 – III – 1

Pro dvě různá přirozená čísla a, b platí $a + \dfrac{a}{b} = 81$. Určete číslo $b + \dfrac{a}{b}$. Uveďte všechny možnosti.

Řešení. Číslo $\dfrac{a}{b}$ musí být přirozené, proto $a = k \cdot b$, kde k je přirozené, a platí $k(b+1) = 81$. Protože čísla a a b mají být různá, nemůže být $k = 1$, a protože $b \neq 0$, nemůže být $k = 81$. Musí tedy nastat jedna z těchto možností:

1. $k = 3$, $b = 26$, $a = 78$, pak je $b + \dfrac{a}{b} = 29$,
2. $k = 9$, $b = 8$, $a = 72$, pak je $b + \dfrac{a}{b} = 17$,
3. $k = 27$, $b = 2$, $a = 54$, pak je $b + \dfrac{a}{b} = 29$.

44 – Z9 – II – 2

Pro která celá čísla x, y platí $x^2 = 3xy + 10$? Najděte všechna řešení.

Řešení. Zadaný vztah můžeme upravit na tvar $x(x - 3y) = 10$. Odtud vidíme, že x i $x - 3y$ dělí číslo 10. Mohou tedy nastat pouze možnosti uvedené v prvních dvou řádcích tabulky:

x	1	−1	2	−2	5	−5	10	−10
$x - 3y$	10	−10	5	−5	2	−2	1	−1
y	−3	3	−1	1	1	−1	3	−3

Pro každou z možností vypočítáme y. Řešením úlohy budou ty dvojice, pro které bude získané číslo y celé. Výsledek je uveden v třetím řádku tabulky. Protože ve všech případech vyšlo y celé, má úloha 8 řešení. Jsou jimi tyto dvojice čísel (x, y):

$$(1,-3),\ (-1,3),\ (2,-1),\ (-2,1),\ (5,1),\ (-5,-1),\ (10,3),\ (-10,-3).$$

45 – A – I – 4

Dokažte, že pokud pro přirozená čísla a, b je i číslo

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$$

přirozené, pak pro největší společný dělitel D čísel a, b platí nerovnost $D \leqq \sqrt{a+b}$. Může nastat rovnost v případě, že $D < a < b$?

Řešení. Po jednoduché úpravě dostaneme, že

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{a^2+b^2+a+b}{ab}. \tag{1}$$

Protože D je největší společný dělitel čísel a, b, můžeme psát $a = Da_1$ a $b = Db_1$, kde a_1, b_1 jsou nesoudělná přirozená čísla. Výraz (1) má po vykrácení tvar

$$\frac{Da_1^2+Db_1^2+a_1+b_1}{Da_1b_1}. \tag{2}$$

Aby výraz (2) byl přirozené číslo, musí být čitatel dělitelný jmenovatelem, a tedy i všemi jeho děliteli. Proto musí být čitatel dělitelný D,

$$D \mid Da_1^2+Db_1^2+a_1+b_1.$$

Číslo D zřejmě dělí čísla Da_1^2 a Db_1^2, proto musí platit

$$D \mid a_1+b_1. \tag{3}$$

Protože čísla a_1, b_1, D jsou přirozená a platí (3), musí zároveň být

$$D \leqq a_1+b_1, \tag{4}$$

což po přenásobení D ($D > 0$) dává

$$D^2 \leqq a+b.$$

Po odmocnění (obě strany jsou kladné) vychází, že

$$D \leqq \sqrt{a+b}. \tag{5}$$

Ještě musíme zjistit, zda někdy nastane v (5) rovnost. Ta zřejmě nastane, právě když nastane rovnost v nerovnosti (4). Proto musí být $D = a_1 + b_1$. Aby byla zároveň splněna podmínka $D < a < b$, musí platit $1 < a_1 < b_1$. Volme proto $a_1 = 2$ a $b_1 = 5$. Potom musí být $D = 2 + 5 = 7$, neboli $a = Da_1 = 14$ a $b = Db_1 = 35$. Snadno se přesvědčíme, že v tomto případě rovnost (5) skutečně nastane.

Poznámka. Můžeme postupovat také tak, že na začátku zavedeme substituci $a = a_1 D$, $b = b_1 D$ a po obdobných úvahách dojdeme k tvrzení $D^2 \mid a + b$, což po odmocnění dává (5).

45 – A – I – 5

Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ splňující pro každá $x, y \in \mathbb{N}$ rovnost

$$f(xy) = f(x) + f(y) - f\bigl(D(x,y)\bigr),$$

kde $D(x,y)$ značí největší společný dělitel čísel x, y, víte-li, že platí $f(p) = p$ pro každé prvočíslo p. (*P. Hliněný*)

Řešení. Především si všimněme, že pro nesoudělná čísla x, y platí

$$f(xy) = f(x) + f(y) - f(1).$$

Proto pro prvočíselný rozklad $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m}$ čísla n ($p_1, p_2, \ldots, p_m$ jsou různá prvočísla a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ jsou přirozená čísla) dostáváme, že $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2}) + \ldots + f(p_m^{\alpha_m}) - (m-1)f(1)$. Dále opakovaným použitím dané rovnosti zjistíme, že $f(p^\alpha) = f(p^{\alpha-1}) = \ldots = f(p) = p$ pro prvočíslo p a libovolné přirozené číslo α. Odtud vyplývá, že platí

$$f(n) = p_1 + p_2 + \ldots + p_m - (m-1)f(1), \qquad n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m}.$$

Dokažme ještě uvedené tvrzení podrobněji:

Nejdříve dokážeme matematickou indukcí podle α, že pro prvočíslo p platí $f(p^\alpha) = f(p) = p$.

První krok. Pro $\alpha = 1$ plyne tvrzení přímo ze zadání.

Druhý krok. Nechť tvrzení platí pro $\alpha \geqq 1$, potom

$$f(p^{\alpha+1}) = f(p^\alpha) + f(p) - f\bigl(D(p^\alpha, p)\bigr) = f(p^\alpha).$$

Odtud podle indukčního předpokladu plyne, že je také

$$f(p^{\alpha+1}) = f(p^\alpha) = f(p) = p.$$

Dále dokážeme, že pokud $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$ je prvočíselný rozklad čísla $n \geqq 2$, je

$$f(n) = f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}) = p_1 + p_2 + \dots + p_m - (m-1)f(1).$$

Tvrzení dokážeme opět indukcí, tentokrát podle počtu m prvočíselných dělitelů čísla n.

První krok. Pro $m = 1$ dostáváme předchozí tvrzení, které jsme právě dokázali.

Druhý krok. Nechť tvrzení platí pro $m \geqq 1$. Potom platí

$$\begin{aligned} f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}) &= f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}) + f(p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}) - \\ &\quad - f\left(D(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}, p_{m+1}^{\alpha_{m+1}})\right). \end{aligned}$$

Protože ale $D(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}, p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}) = 1$, má dle indukčního předpokladu předcházející rovnost tvar

$$\begin{aligned} f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}) &= p_1 + p_2 + \dots + p_m - \\ &\quad - (m-1)f(1) + p_{m+1} - f(1) = \\ &= p_1 + \dots + p_{m+1} - mf(1). \end{aligned} \tag{1}$$

Ještě zbývá ukázat, že takto definovaná funkce f vyhovuje dané podmínce pro libovolnou hodnotu $f(1)$. Nechť a a b jsou přirozená čísla. Označme $c = D(a,b)$ a nechť $c = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$ je jeho prvočíselný rozklad. Prvočíselný rozklad čísla a má pak zřejmě tvar

$$a = p_1^{\beta_1} \dots p_m^{\beta_m} q_1^{\beta_{m+1}} \dots q_s^{\beta_{m+s}}$$

a podobně číslo b bude mít prvočíselný rozklad

$$b = p_1^{\gamma_1} \dots p_m^{\gamma_m} r_1^{\gamma_{m+1}} \dots r_s^{\gamma_{m+t}}.$$

Zároveň víme, že prvočísla $p_1, \dots, p_m$, $q_1, \dots, q_s$ a $r_1, \dots, r_t$ jsou navzájem různá. Proto rozklad čísla $a \cdot b$ na prvočinitele je

$$a \cdot b = p_1^{\beta_1+\gamma_1} \dots p_m^{\beta_m+\gamma_m} q_1^{\beta_{m+1}} \dots q_s^{\beta_{m+s}} r_1^{\gamma_{m+1}} \dots r_s^{\gamma_{m+t}}.$$

Podmínka ze zadání říká, že

$$f(a \cdot b) = f(a) + f(b) - f\bigl(D(a,b)\bigr). \tag{2}$$

Spočítejme tyto hodnoty pro funkci definovanou pomocí (1):

$$\begin{aligned} f(a) &= p_1 + \dots + p_m + q_1 + \dots + q_s - (m+s-1)f(1), \\ f(b) &= p_1 + \dots + p_m + r_1 + \dots + r_t - (m+t-1)f(1), \\ f(a \cdot b) &= p_1 + \dots + p_m + q_1 + \dots + q_s + r_1 + \dots + r_t - \\ &\quad - (m+s+t-1)f(1), \\ f(c) &= p_1 + \dots + p_m - (m-1)f(1). \end{aligned}$$

Snadno nahlédneme, že po dosazení těchto hodnot do (2) dostaneme identitu (ještě je potřeba si uvědomit, že všechny tyto úvahy jsou korektní i v případě $m = 0$, $s = 0$, $t = 0$). Funkce f definovaná pomocí (1) je tedy jediným řešením dané úlohy pro libovolnou hodnotu $f(1)$.

45 – A – III – 5

Pro která celá čísla k existuje funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ splňující

(i) $f(1\,995) = 1\,996$,

(ii) $f(xy) = f(x) + f(y) + k \cdot f\big(D(x,y)\big)$ pro všechna přirozená čísla x, y?

$D(x,y)$ označuje největší společný dělitel čísel x, y. *(P. Hliněný)*

Řešení. Ze vztahu (ii) pro $x = y$ vyplývá $f(x^2) = f(x \cdot x) = (k+2)f(x)$. Dvojnásobnou aplikací předchozího vztahu dostaneme

$$f(x^4) = f(x^2 \cdot x^2) = (k+2)f(x^2) = (k+2)^2 f(x).$$

Jiným postupem ale dostaneme

$$\begin{aligned} f(x^4) = f(x \cdot x^3) &= f(x) + f(x^3) + kf(x) = \\ &= (k+1)f(x) + f(x \cdot x^2) = \\ &= (k+1)f(x) + f(x) + f(x^2) + kf(x) = \\ &= (2k+2)f(x) + f(x^2) = (3k+4)f(x). \end{aligned}$$

Nyní stačí najít libovolné x, pro které je $f(x) \neq 0$, tedy například podle (i) $x = 1\,995$. Porovnáním předchozích dvou vztahů dostaneme podmínku

$$\begin{gathered} (k+2)^2 f(1\,995) = f(1\,995^4) = (3k+4)f(1\,995), \\ (k+2)^2 = 3k+4, \\ k \in \{0, -1\}. \end{gathered}$$

Pro $k = -1$ dostáváme funkcionální rovnici z domácího kola. Víme, že jejím obecným řešením je pro $x = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ funkce

$$f(x) = f(p_1) + \ldots + f(p_n) - (n-1)f(1).$$

Podmínku (i) úlohy můžeme splnit například volbou $f(5) = 1\,996$, $f(p) = 0$ pro všechna prvočísla $p \neq 5$ a $f(1) = 0$.

Pro $k = 0$ dostáváme funkcionální rovnici

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Odtud především pro $x = y = 1$ plyne $f(1) = 0$. Obecným řešením této rovnice pak je pro $x = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ funkce

$$f(x) = \alpha_1 f(p_1) + \ldots + \alpha_n f(p_n),$$

kde $f(p_i)$ jsou libovolná celá čísla. Opět stačí zvolit $f(5) = 1\,996$ a $f(p) = 0$ pro všechna prvočísla $p \neq 5$ jako výše.

45 – B – I – 4

Číslo $2n^4 + n^3 + 50$ je dělitelné šesti právě pro ta přirozená čísla n, pro která je číslo $2 \cdot 4^n + 3^n + 50$ dělitelné třinácti. Dokažte. *(J. Šimša)*

Řešení. Sestavíme tabulku zbytků při dělení čísel $A = 2n^4 + n^3 + 50$ šesti v závislosti na zbytku čísla n (zbytek při dělení čísla A šesti totiž závisí jen na zbytku při dělení čísla n šesti):

n	n^2	n^3	n^4	$2n^4$	$2n^4 + n^3$	$A = 2n^4 + n^3 + 50$
0	0	0	0	0	0	2
1	1	1	1	2	3	5
2	4	2	4	2	4	0
3	3	3	3	0	3	5
4	4	4	4	2	0	2
5	1	5	1	2	1	3

Z tabulky vidíme, že číslo A je násobkem šesti, právě když číslo n dává při dělení šesti zbytek rovný 2, tj. je rovno jednomu z čísel 2, 8, 14, 20, ...

Nyní sestavíme tabulku zbytků při dělení několika prvních čísel $B = 2 \cdot 4^n + 3^n + 50$ třinácti. (Na rozdíl od výrazu A, který je mnohočlenem, se ve výrazu B vyskytuje proměnná n i v exponentu. Nelze proto říci, že zbytek při dělení čísla B třinácti závisí na zbytku při dělení čísla n třinácti. Až při sestavování tabulky se ukáže, s jakou periodou se zbytky opakují.)

n	3^n	4^n	$2 \cdot 4^n$	$2 \cdot 4^n + 3^n$	$B = 2 \cdot 4^n + 3^n + 50$
0	1	1	2	3	1
1	3	4	8	11	9
2	9	3	6	2	0
3	1	12	11	12	10
4	3	9	5	8	6
5	9	10	7	3	1
6	1	1	2	3	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Další výpočty už nemusíme provádět. Vidíme totiž, že zbytky mocnin 3^n a 4^n se vzhledem k číslu n opakují se společnou periodou rovnou šesti (u mocnin 3^n existuje dokonce menší perioda rovna třem). Proto i posloupnost zbytků čísel B má periodu 6. Navíc je z tabulky patrno, že B je násobkem třinácti, právě když číslo n dává při dělení šesti zbytek 2, tj. je rovno jednomu z čísel 2, 8, 14, 20, ...

Poznámka. Periodicitu v posloupnosti zbytků při dělení mocnin a^k číslem d přesněji postihují Fermatova a Eulerova věta. Podle Fermatovy věty je v případě, kdy d je prvočíslo, délka periody rovna některému děliteli čísla $d-1$.

45 – B – I – 1

Zjistěte, pro která reálná čísla p má rovnice

$$x^3 + px^2 + 2px = 3p + 1$$

tři různé reálné kořeny x_1, x_2 a x_3 takové, že $x_1x_2 = x_3^2$. (*J. Šimša*)

Řešení. Využijeme vztahů mezi kořeny a koeficienty mnohočlenu, tzv. Viètových vzorců. Podle nich je

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -p, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= 2p, \\ x_1x_2x_3 &= 3p + 1. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do druhého vztahu za $x_1x_2 = x_3^2$, dostaneme

$$2p = x_3^2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_3(x_1 + x_2 + x_3) = -px_3,$$

a protože $p = 0$ zřejmě nevyhovuje, je $x_3 = -2$.

Dále platí

$$4 = x_3^2 = x_1x_2 = \frac{x_1x_2x_3}{x_3} = \frac{3p+1}{-2},$$

odkud $p = -3$. Jen pro toto p tedy může daná rovnice vyhovovat daným podmínkám. Dosadíme-li do Viètových vzorců za x_3 a za p, dopočteme zbývající řešení $x_1 = 4$, $x_2 = 1$ a přesvědčíme se, že je tomu opravdu tak.

45 – B – II – 3

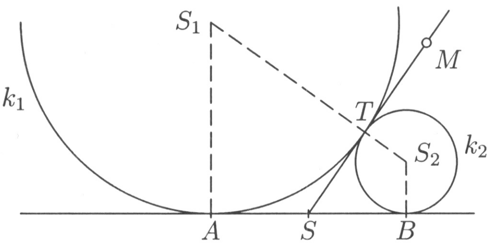
Dokažte, že rovnice $x^3 - 1\,996x^2 + rx - 1\,995 = 0$ má pro každý reálný koeficient r nanejvýš jeden celočíselný kořen. (*A. Vrba*)

Řešení. Připusťme, že pro některé číslo r má daná rovnice dva celočíselné kořeny a, b. Dělení levé strany rovnice mnohočlenem $(x-a)(x-b)$ vyjde beze zbytku a výsledný podíl bude tvaru $x - c$ pro vhodné reálné číslo c. Číslo c musí být ovšem celé, neboť $a + b + c = 1\,996$. Všechna tři čísla a, b, c nemohou být lichá, když je jejich součet sudý. Jejich součin je však liché číslo $1\,995$, což není možné. Rovnice může mít tedy nanejvýš jeden celočíselný kořen.

45 – C – II – 4

V polorovině ABM sestrojte kružnice k_1 a k_2, které se dotýkají přímky AB po řadě v daných bodech A a B, dotýkají se vně v nějakém bodě T a jejich společná tečna v tomto bodě prochází daným bodem M. (*J. Švrček*)

Řešení. Označme S průsečík uvažované tečny obou hledaných kružnic s přímkou AB. Z vlastností tečen ke kružnici plyne, že je $|SA| = |ST| = |SB|$ (obr. 6), takže bod S je středem úsečky AB. Odtud již snadno plyne *konstrukce.*



Obr. 6

Nejprve sestrojíme střed S úsečky AB, pak najdeme bod T na polopřímce SM takový, že $|ST| = |SA|$. Střed S_1 hledané kružnice k_1 najdeme jako průsečík kolmice k přímce AB v bodě A a kolmice k přímce SM v bodě T. Podobně sestrojíme i střed S_2 kružnice k_2. Sestrojené kružnice k_1 a k_2 zřejmě mají všechny požadované vlastnosti.

Úloha má vždy jedno řešení.

46 – B – I – 2

Najděte všechny kvadratické funkce, které zobrazí interval $\langle 2, 5\rangle$ na interval $\langle 15, 27\rangle$ a jejichž graf prochází počátkem soustavy souřadnic. (*P. Černek*)

Řešení. Funkci budeme hledat ve tvaru $f(x) = ax^2 + bx + c$. Protože její graf prochází počátkem souřadnic, je $c = 0$. Proto $f(x) = ax^2 + bx$ pro vhodné konstanty a, b.

Prozkoumáme nejprve možnosti, kdy je f na intervalu $\langle 2, 5\rangle$ monotónní, a tedy buď

a) $f(2) = 15$, $f(5) = 27$, je-li tam rostoucí, anebo
b) $f(2) = 27$, $f(5) = 15$, je-li tam klesající.

Řešme nejprve případ a). Dostaneme dvě lineární rovnice $4a+2b=15$ a $25a+$ $+5b=27$. Řešením této soustavy je $a=-\frac{7}{10}$ a $b=\frac{89}{10}$. Ještě musíme ověřit, zda je skutečně f na intervalu $\langle 2,5\rangle$ monotónní. Stačí zřejmě zjistit, zda nenabývá svůj extrém (maximum) na tomto intervalu. V našem případě se extrém nachází v bodě $\frac{89}{14}$, který je mimo uvažovaný interval.

Případ b). Obdobně jako v a) dostaneme funkci $-\frac{7}{2}x^2+\frac{41}{2}x$, která nabývá maximum v bodě $\frac{41}{14}$, který však tentokrát je v intervalu $\langle 2,5\rangle$, a hodnota funkce v něm je větší než 27, tedy tato funkce nevyhovuje zadaným podmínkám.

Nechť teď f není na intervalu $\langle 2,5\rangle$ monotónní. Z tvaru kvadratické funkce vyplývá, že f mění svoji monotónnost jen v bodě extrému, tedy v našem případě bude bod $-\dfrac{b}{2a}$ ležet v intervalu $\langle 2,5\rangle$. Protože y-ová souřadnice vrcholu paraboly je $-\dfrac{b^2}{4a}$, je buď

$$-\frac{b^2}{4a}=27, \quad a<0, \tag{1}$$

anebo $-\dfrac{b^2}{4a}=15$ pro $a>0$, což však zřejmě nemůže nastat.

Minimum se zřejmě nabývá na kraji intervalu, tedy buď

$$f(2)=4a+2b=15, \tag{2}$$

anebo

$$f(5)=25a+5b=15. \tag{3}$$

V prvním případě vyjádříme z (2) výraz $4a$ a dosadíme do (1). Dostaneme kvadratickou rovnici $b^2-54b+405=0$, která má dva kořeny $b=9$, $b=45$. V jednotlivých případech dostáváme kvadratické funkce:

$$f(x)=-\frac{75}{4}x^2+45x \qquad \text{a} \qquad f(x)=-\frac{3}{4}x^2+9x.$$

Ještě zřejmě musíme ověřit, že $f(5)\geqq 15$. Z této podmínky vyplývá, že jen druhá funkce může vyhovovat zadaným podmínkám, ale její extrém není v intervalu $\langle 2,5\rangle$.

V druhém případě dostáváme obdobně kvadratickou rovnici $5b^2-108b+324=$ $=0$, která má dva kořeny $b=18$, $b=\frac{18}{5}$. V jednotlivých případech tentokrát dostáváme kvadratické funkce

$$f(x)=-3x^2+18x \qquad \text{a} \qquad f(x)=-\frac{3}{25}x^2+\frac{18}{5}x.$$

Nyní musíme ověřit, že $f(2)\geqq 15$. Tentokrát vyhovuje jen první funkce.

Takto jsme dostali všechna možná řešení, a to kvadratické funkce

$$f(x)=-\frac{7}{10}x^2+\frac{89}{10}x; \qquad f(x)=-3x^2+18x.$$

46 – B – S – 2

Rovnice $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, kde a, b a c jsou celá čísla, má kořen $x = 1 - \sqrt{2}$. Dokažte, že pak platí $a - 2b + 5c = 0$. *(P. Černek)*

Řešení. Po dosazení čísla $x = 1 - \sqrt{2}$ do dané rovnice a jednoduché úpravě dostáváme

$$(5 + 2a + b) \cdot \sqrt{2} = 7 + 3a + b + c.$$

Protože na pravé straně je celé číslo, musí platit

$$5 + 2a + b = 0 \qquad \text{a} \qquad 7 + 3a + b + c = 0$$

(jinak bychom mohli vyjádřit $\sqrt{2}$ jako podíl dvou celých čísel, což vzhledem k iracionalitě nejde). Vyjádříme-li b a c z těchto dvou rovnic pomocí a, dostaneme $b = -5 - 2a$ a $c = -2 - a$, takže

$$a - 2b + 5c = a - 2 \cdot (-5 - 2a) + 5 \cdot (-2 - a) = 0.$$

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

46 – B – II – 2

Určete, pro která reálná čísla p má funkce $f(x) = x^3 - px^2 + 1\,997$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ minimum v bodě $x = 1$.

Řešení. Zřejmě stačí zkoumat funkci $g(x) = x^3 - px^2$, protože v každém intervalu nabývá minima ve stejných bodech jako daná funkce f. Funkce g má v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ minimum v bodě 1, právě když pro všechna x z tohoto intervalu platí $g(x) \geqq g(1)$, neboli $x^3 - px^2 \geqq 1 - p$. Po úpravě dostáváme ekvivalentní nerovnost

$$x^3 - 1 \geqq p(x^2 - 1), \tag{1}$$

kterou můžeme upravit na tvar

$$(1 - x)\bigl(x^2 + x + 1 - p(x + 1)\bigr) \leqq 0.$$

Vzhledem k tomu, že pro číslo $x = 1$ je nerovnost (1) splněná triviálně, můžeme pro $x \in \langle 0, 1)$ vydělit poslední nerovnost dvojčlenem $1 - x$ a dostaneme ekvivalentní podmínku

$$q(x) = x^2 + (1 - p)x + 1 - p \leqq 0.$$

Protože q je kvadratická funkce s kladným koeficientem u x^2 (jejím grafem je parabola „obrácená vzhůru"), platí nerovnost $q(x) \leqq 0$ pro všechna $x \in \langle 0, 1)$, právě když je současně $q(0) \leqq 0$ a $q(1) \leqq 0$, tj. právě když $1 - p \leqq 0$ a $3 - 2p \leqq 0$. Dohromady tak vychází jediná (nutná i postačující) podmínka $p \geqq \frac{3}{2}$.

Jiné řešení. Po odvození nerovnosti (1) můžeme postupovat také následovně. Pro číslo $x = 1$ je nerovnost triviálně splněná, pro $x \in \langle 0, 1)$ můžeme nerovnost vydělit záporným dvojčlenem $x^2 - 1$, takže vyjde

$$p \geqq \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = x + \frac{1}{x + 1} \tag{2}$$

pro všechna $x \in \langle 0, 1)$. Ukážeme, že funkce $h(x) = x + \dfrac{1}{x + 1}$ je v tomto intervalu rostoucí.

Pokud je totiž $x \geqq 0$ a $\varepsilon > 0$, je $h(x + \varepsilon) > h(x)$, neboť

$$x + \varepsilon + \frac{1}{x + \varepsilon + 1} > x + \frac{1}{x + 1}, \quad \text{po úpravě dává} \quad 1 < (x + \varepsilon + 1)(x + 1).$$

Tato nerovnost však vzhledem k volbě x a ε platí, a protože všechny úpravy byly ekvivalentní, dokázali jsme, že funkce h je rostoucí dokonce v intervalu $\langle 0, \infty)$. Nerovnost (2) je splněna pro všechna $x \in \langle 0, 1)$, právě když platí pro $x = 1$, tj. právě když $p \geqq \frac{3}{2}$. Řešením jsou všechna reálná čísla p z intervalu $\left\langle \frac{3}{2}, \infty \right)$.

Poznámka. Je možno postupovat i pomocí diferenciálního počtu. Z první a druhé derivace funkce f snadno zjistíme, že v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ nabývá funkce f jen dva extrémy: v bodě $x = 0$ a v bodě $x = \frac{2}{3}p$. Z toho pak lze snadno odvodit, že úloze vyhovují právě čísla $p \geqq \frac{3}{2}$.

46 – C – II – 1

V čtyřciferném čísle jsou stejné první dvě číslice a také poslední dvě číslice. Určete toto číslo, víte-li, že je druhou mocninou přirozeného čísla.

Řešení. Číslo $1\,000a + 100a + 10b + b = 11(100a + b)$ má být druhou mocninou, proto musí být číslo $100a+b$ dělitelné číslem 11 a podíl $\frac{1}{11}(100a+b) = 9a+\frac{1}{11}(a+b)$ musí být druhou mocninou přirozeného čísla. Vzhledem k tomu, že a a b ($a \neq 0$) jsou číslice, musí být $a + b = 11$, a protože $9a + 1$ má být druhou mocninou, vyjde $a = 7$. Hledané číslo je $7\,744 = 88^2$.

46 – Z5 – I – 2

Lukáš sečítal dvě pěticiferná čísla. V obou číslech se každá z číslic 5, 6, 7, 8 a 9 vyskytovala právě jednou. Vyšel mu výsledek 164 528. Markéta jeho výsledek kontrolovala a prohlásila, že Lukáš udělal chybu. Měla Markéta pravdu? (*Macura*)

Řešení. Sčítání zapíšeme ve tvaru

$$\begin{array}{r} * * * * * \\ + * * * * * \\ \hline 1\,6\,4\,5\,2\,8 \end{array}$$

a zkusíme nahrazovat hvězdičky v obou sčítancích číslicemi. Hvězdičky nahrazujeme zprava doleva a vzhledem k tomu, že každá z číslic 5, 6, 7, 8 a 9 se v každém sčítanci vyskytuje právě jednou, máme pro jejich nahrazení pouze (až na pořadí sčítanců) tyto dvě možnosti:

$$\begin{array}{r} *\,5\,8\,6\,9 \\ +\,*\,8\,6\,5\,9 \\ \hline 1\,6\,4\,5\,2\,8 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} *\,5\,7\,6\,9 \\ +\,*\,8\,7\,5\,9 \\ \hline 1\,6\,4\,5\,2\,8 \end{array}$$

Zbývající hvězdičky však v obou případech nelze zbývajícími číslicemi doplnit na správný zápis sčítání.

Markéta měla pravdu.

47 – A – I – 1

Číslo $1\,997^{2^n} - 1$ je dělitelné číslem 2^{n+2} pro každé přirozené číslo n. Dokažte.

(*P. Kaňovský*)

Řešení. Označme $k = 1\,997$ a všimněme si, že pro každé n platí

$$k^{2^{n+1}} - 1 = \left(k^{2^n}\right)^2 - 1^2 = \left(k^{2^n} - 1\right)\left(k^{2^n} + 1\right). \tag{1}$$

To nám umožní dokazovat uvedené tvrzení indukcí. Můžeme začít s hodnotou $n = 0$, neboť číslo $k - 1$ je dělitelné číslem 2^2. Protože číslo $k^{2^n} + 1$ je pro každé n sudé, plyne z rozkladu (1), že pokud číslo $k^{2^n} - 1$ je dělitelné číslem 2^{n+2}, je číslo $k^{2^{n+1}} - 1$ dělitelné číslem $2^{n+2} \cdot 2$, tedy číslem 2^{n+3}. Tím je důkaz indukcí ukončen. Dodejme, že místo (1) je možné obdobně využít rovností

$$\left(k^{2^n} - 1\right)^2 = k^{2^{n+1}} - 2 \cdot k^{2^n} + 1 = \left(k^{2^{n+1}} - 1\right) - 2\left(k^{2^n} - 1\right).$$

Jiné řešení. Místo matematické indukce můžeme využít binomickou větu a dokázat, že pro každé celé číslo k je rozdíl $(4k + 1)^{2^n} - 1$ dělitelný číslem 2^{n+2}. (Odtud volbou $k = 499$ dostaneme tvrzení úlohy.) Z binomické věty pro exponent 2^n vyplývá rozklad

$$(4k+1)^{2^n} - 1 = (4k)^{2^n} + \binom{2^n}{1}(4k)^{2^n-1} + \ldots + \\ + \binom{2^n}{j}(4k)^{2^n-j} + \ldots + \binom{2^n}{2^n-1}4k.$$

První sčítanec napravo je dělitelný mocninou $2^{2^{n+1}}$, a tedy i mocninou 2^{n+2}, neboť $n + 2 \leqq 2^{n+1}$ pro každé celé $n \geqq 0$ (snadná indukce). Nyní pro každé

$j \in \{1, 2, \dots, 2^n - 1\}$ zjistíme, jakou mocninou čísla 2 je dělitelné kombinační číslo $\binom{2^n}{j}$. K tomu využijeme vyjádření

$$\binom{2^n}{j} = \frac{2^n}{j} \cdot \frac{2^n - 1}{1} \cdot \frac{2^n - 2}{2} \cdot \frac{2^n - 3}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{2^n - j + 1}{j - 1}, \tag{2}$$

které je výhodné proto, že čísla i a $2^n - i$ mají ve svých rozkladech na prvočinitele tutéž mocninu čísla 2, $1 \leqq i \leqq 2^n - 1$. Je-li proto $j = 2^\alpha l$, kde $0 \leqq \alpha \leqq n - 1$ a l je liché, je podle (2) uvažované číslo $\binom{2^n}{j}$ lichým násobkem mocniny $2^{n-\alpha}$. Odtud plyne, že číslem 2^{n+2} je dělitelný každý sčítanec na pravé straně (1), právě když pro každý uvažovaný index j platí nerovnost $n + 2 \leqq (n - \alpha) + 2(2^n - j)$, neboli $\alpha + 2 \leqq 2(2^n - j)$. Protože $\alpha + 2 \leqq 2^{\alpha+1}$ (snadná indukce), stačí nám dokázat silnější nerovnosti $2^\alpha \leqq 2^n - j$. Ty ale plynou z definice čísel $\alpha = \alpha(j)$: jelikož mocnina 2^α dělí číslo j, dělí i číslo $2^n - j$, takže ho nepřevyšuje.

47 – A – II – 1

Číslo $1\,997^{3^n} + 1$ je dělitelné číslem 3^{n+3} pro každé přirozené číslo n. Dokažte.

(J. Šimša)

Řešení. Tvrzení dokážeme indukcí podle čísla n. Můžeme začít od hodnoty $n = 0$: číslo $1\,997^{3^0} + 1$ je skutečně násobkem čísla 3^3 $(1\,998 = 27 \cdot 74)$. Platí-li podle indukčního předpokladu rovnost $1\,997^{3^n} + 1 = 3^{n+3} k_n$ pro vhodné přirozené číslo k_n, dostaneme ze vzorce $A^3 + B^3 = (A + B)^3 - 3AB(A + B)$ pro hodnoty $A = 1\,997^{3^n}$ a $B = 1$ následující vyjádření:

$$\begin{aligned} 1\,997^{3^{n+1}} + 1 &= \left(3^{n+3} k_n\right)^3 - 3 \cdot 1\,997^{3^n} \cdot \left(3^{n+3} k_n\right) = \\ &= 3^{n+4} \left(3^{2n+5} k_n^3 - 1\,997^{3^n} k_n\right). \end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov.

Dodejme, že při druhém indukčním kroku bylo rovněž možné využít rozklad

$$x^{3^{n+1}} + 1 = \left(x^{3^n}\right)^3 + 1^3 = \left(x^{3^n} + 1\right)\left(x^{2 \cdot 3^n} - x^{3^n} + 1\right)$$

a vysvětlit, proč pro $x = 1\,997$ je druhý činitel dělitelný třemi: čísla $1\,997^{2 \cdot 3^n}$ a $1\,997^{3^n}$ totiž při dělení třemi dávají po řadě zbytky 1 a 2.

47 – A – S – 1

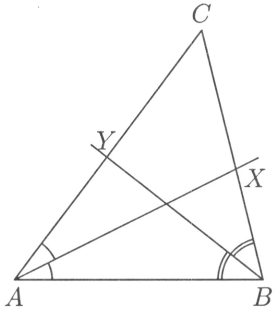
Najděte všechny trojúhelníky ABC, pro které platí rovnost

$$|BC| \cdot |AX| = |AC| \cdot |BY|,$$

kde bod X je průsečíkem osy úhlu BAC se stranou BC a bod Y průsečíkem osy úhlu ABC se stranou AC.

(P. Černek)

Řešení. Zkoumanou rovnost přepíšeme do tvaru $|BC| : |BY| = |AC| : |AX|$ a oba poměry vyjádříme pomocí sinových vět pro trojúhelníky BCY a ACX (ve kterých při obvyklém označení vnitřních úhlů trojúhelníku ABC zřejmě platí $|\sphericalangle BYC| = \alpha + \frac{1}{2}\beta$ a $|\sphericalangle AXC| = \beta + \frac{1}{2}\alpha$, obr. 7):



Obr. 7

$$\frac{|BC|}{|BY|} = \frac{\sin(\alpha + \frac{1}{2}\beta)}{\sin\gamma} \quad \text{a} \quad \frac{|AC|}{|AX|} = \frac{\sin(\beta + \frac{1}{2}\alpha)}{\sin\gamma}.$$

Hledáme proto právě ty trojúhelníky, pro které

$$\sin(\alpha + \tfrac{1}{2}\beta) = \sin(\beta + \tfrac{1}{2}\alpha).$$

Protože oba argumenty leží mezi 0° a 180°, rovnost jejich sinů nastane, jen pokud $\alpha + \frac{1}{2}\beta = \beta + \frac{1}{2}\alpha$, nebo $(\alpha + \frac{1}{2}\beta) + (\beta + \frac{1}{2}\alpha) = 180°$. První podmínka znamená $\alpha = \beta$, druhá $\alpha + \beta = 120°$, neboli $\gamma = 60°$.

Malá obměna první části: Srovnáme-li zkoumanou rovnost s obecně platnou rovností $|BC| \cdot |AP| = |AC| \cdot |BQ|$, kde AP a BQ jsou výšky daného trojúhelníku, dostaneme ekvivalentní podmínku ve tvaru $|AP| : |AX| = |BQ| : |BY|$. Z pravoúhlých trojúhelníků APX a BQY tak opět vyjde rovnost $\sin(\alpha + \frac{1}{2}\beta) = \sin(\beta + \frac{1}{2}\alpha)$.

Odpověď: Hledanými jsou právě ty trojúhelníky, pro které platí $|AC| = |BC|$ nebo $|\sphericalangle ACB| = 60°$.

47 – B – I – 1

Magický čtverec je čtvercová tabulka přirozených čísel, v níž je součet všech čísel v každém řádku, v každém sloupci i na obou úhlopříčkách stejný. Najděte všechny magické čtverce 3×3, pro které je součin čtyř čísel v rohových polích roven 3 465.

(*P. Černek*)

Řešení. Označme přirozená čísla v magickém čtverci písmeny a, b, c, d, e, f, g, h, i jako na obr. 8 a písmenem S označme součet tří čísel v každém řádku, sloupci i úhlopříčce. Ukážeme, že je $S = 3e$: Sečteme-li totiž čísla v prvním a třetím řádku a od výsledku odečteme čísla v prostředním sloupci, dostaneme rovnost

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Obr. 8

$$S + S - S = a + c + g + i - e.$$

Odtud vzhledem k rovnostem $a + i = c + g = S - e$ plyne

$$S = (S - e) + (S - e) - e, \quad \text{neboli} \quad S = 3e.$$

Důsledkem jsou rovnosti

$$a + i = c + g = 2e.$$

Hledejme tedy čtyři přirozená čísla a, i, c, g, jejichž součin je roven číslu 3 465, a přitom $a + i = c + g$. Probrat konečnou množinu řešení rovnice $aicg = 3\,465$ můžeme tak, že nejprve vypíšeme všechny možné rozklady čísla $3\,465 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ na součin dvou činitelů M a N (jež by měly odpovídat součinům ai a cg):

$$\begin{aligned} 3\,465 &= 1 \cdot 3\,465 = 3 \cdot 1\,155 = 5 \cdot 693 = 7 \cdot 495 = 9 \cdot 385 = \\ &= 11 \cdot 315 = 15 \cdot 231 = 21 \cdot 165 = 33 \cdot 105 = 35 \cdot 99 = \\ &= 45 \cdot 77 = 55 \cdot 63. \end{aligned}$$

Nyní pro jednotlivé dvojice M, N snadno vyhledáme rozklady $M = ai$ a $N = cg$ s vlastností $a+i = c+g$ (pro prvních osm dvojic takové rozklady zřejmě neexistují). Jediné dva vyhovující rozklady jsou

$$3\,465 = (5 \cdot 11) \cdot (7 \cdot 9) = (3 \cdot 15) \cdot (7 \cdot 11).$$

V prvním případě $2e = 16$, tedy $e = 8$; v druhém $2e = 18$, tedy $e = 9$. Snadno dopočteme i ostatní čísla magického čtverce (obr. 9).

5	12	7
10	8	6
9	4	11

3	17	7
13	9	5
11	1	15

Obr. 9

Protože čtyři rohová čísla můžeme do tabulky umístit osmi způsoby, je každá tabulka na obr. 9 zástupcem osmi tabulek, jež z ní vzniknou „překlopením“ podle os souměrnosti čtverce. Jiná řešení úlohy neexistují.

47 – B – S – 3

Najděte všechny čtvercové tabulky 3×3 přirozených čísel, v nichž je součin všech čísel v každém řádku, v každém sloupci i na obou úhlopříčkách stejný a pro něž platí, že součet čtyř čísel v jejich rohových polích je jednociferné číslo.

(J. Aragorn Těšínský)

Řešení. Označme a, b, c, d jednomístná čísla v rohových polích hledané tabulky (obr. 10) a e číslo v jejím středovém poli. Vzhledem k souměrnosti (překlopením podle jedné z úhlopříček nebo středního sloupce či řádku se uvažované vlastnosti tabulky nezmění) můžeme předpokládat, že je $a \leqq d$, $b \leqq c$ a $a+d \leqq b+c$, a protože má být $a+b+c+d \leqq 9$, bude za uvedených předpokladů $a+d \leqq 4$ a $b+c \leqq 5$. Z rovnosti $aed = bec$ plyne $ad = bc$, takže stačí prozkoumat následujících pět možností:

a		b
	e	
c		d

Obr. 10

$$\begin{array}{c|ccccc} a & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ d & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ b & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ c & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}$$

V každém z těchto pěti případů můžeme pomocí „prostředního“ čísla e stejnou metodou vyjádřit ostatní čísla tabulky, a to tak, že využijeme rovnosti součinů čísel v obou úhlopříčkách, obou krajních řádcích a obou krajních sloupcích. Tabulky pak vypadají takto:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & e & 1 \\ \hline e & e & e \\ \hline 1 & e & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2e & 1 \\ \hline e & e & e \\ \hline 2 & \frac{1}{2}e & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3e & 1 \\ \hline e & e & e \\ \hline 3 & \frac{1}{3}e & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2e & 1 \\ \hline \frac{1}{2}e & e & 2e \\ \hline 4 & \frac{1}{2}e & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & e & 2 \\ \hline e & e & e \\ \hline 2 & e & 2 \\ \hline \end{array}$$

Porovnáme-li nyní zmíněné součiny se součinem čísel v druhém řádku (či v druhém sloupci), dostaneme v každém z uvedených případů jedinou rovnici

$$e^3 = (ad)e, \quad \text{kde postupně } ad = 1, 2, 3, 4, 4.$$

Tato rovnice má v přirozených číslech řešení pouze pro $ad \in \{1, 4\}$ a tomu odpovídají tři tabulky na obr. 11. Z poslední tabulky dostaneme zmíněnými souměrnostmi ještě tři další, ale jak snadno zjistíme, vznikne každá z nich otáčením uvedené tabulky o $90°$.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 4 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Obr. 11

47 – B – II – 3

Je dána čtvercová tabulka 3×3 přirozených čísel, v níž je součin všech čísel v každém řádku, v každém sloupci i na obou úhlopříčkách roven číslu s.

a) Dokažte, že číslo s je třetí mocninou přirozeného čísla.

b) Pokud je jedno z rohových čísel tabulky rovno 1, je součet všech čtyř rohových čísel druhou mocninou přirozeného čísla. Dokažte. *(J. Aragorn Těšínský)*

Řešení. Uvažujme čtvercovou tabulku 3×3 (obr. 12) splňující podmínky úlohy.

a) Z tabulky je patrné, že pro uvažovaný součin s platí

$$s = \frac{(aei)(def)(gec)}{(adg)(cfi)} = e^3.$$

Číslo s je tedy třetí mocninou přirozeného čísla e, které je umístěno uprostřed tabulky.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Obr. 12

1	e^2	e
e^2	e	1
e	1	e^2

Obr. 13

b) Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a = 1$ (otočením tabulky o $90°$ nebo o $180°$ se uvažované vlastnosti tabulky nezmění). Vzhledem k výsledku části a) ze součinu čísel na obou úhlopříčkách zjistíme, že musí být $i = e^2$ a $c = \dfrac{e^2}{g}$.

Ze součinu čísel v třetím řádku pak dostaneme, že $h = \dfrac{e}{g}$, a ze součinu čísel v třetím sloupci $f = \dfrac{g}{e}$. Protože h i f jsou přirozená čísla, musí být $e = g$, a proto také $h = f = 1$. Uvažovaná čtvercová tabulka je tedy typově shodná s tabulkou na obr. 13. Odtud plyne, že součet všech čtyř čísel v jejích rohových polích je

$$a + c + g + i = 1 + e + e + e^2 = (1 + e)^2,$$

což je druhá mocnina přirozeného čísla. Tím je důkaz hotov.

47 – C – I – 1

Pro libovolné trojciferné číslo určíme jeho zbytky při dělení čísly 2, 3, 4, …, 10 a získaných devět čísel pak sečteme. Zjistěte nejmenší možnou hodnotu takového součtu. *(J. Šimša)*

Řešení. Označme $S(n)$ součet uvedených zbytků trojciferného čísla n. Vysvětlíme, proč $S(n) \geqq 3$.

- Pro liché n je $S(n) \geqq 5$ (uvažte zbytky při dělení sudými čísly 2, 4, 6, 8, 10). Dále tedy nechť n je sudé.
- Pokud $4 \nmid n$, tak $S(n) \geqq 4$ (n dává při dělení čísly 4 a 8 zbytek aspoň 2). Nechť n je dále dělitelné čtyřmi.
- Pokud $8 \nmid n$, tak $S(n) \geqq 4$ (zbytek 4 při dělení číslem 8). Proto nechť je dále n dělitelné osmi.
- Pokud $3 \nmid n$, tak $S(n) \geqq 3$ (n dává při dělení čísly 3, 6, 9 zbytek aspoň 1). Nechť je dále n dělitelné osmi a třemi.
- Pokud $9 \nmid n$, tak $S(n) \geqq 3$ (zbytek aspoň 3 při dělení číslem 9). Nechť dále $8 \mid n$ a $9 \mid n$.
- Pokud $5 \nmid n$, tak $S(n) \geqq 3$ (zbytek aspoň 1 při dělení číslem 5 a zbytek aspoň 2 při dělení číslem 10).

Předpokládejme proto, že $5|n$, $8|n$ a $9|n$. Pak přicházejí do úvahy už jen čísla 360 a 720, pro něž $S(360) = 3$ a $S(720) = 9$. Tím je nerovnost $S(n) \geqq 3$ dokázaná. Zároveň jsme zjistili, že $S(n) = 3$ např. pro $n = 360$. (Je také $S(840) = 3$.)

Jiné řešení. Uvažujme jen ten případ, kdy číslo n není dělitelné nejvýše dvěma z čísel $2, 3, \ldots, 10$ (jinak $S(n) \geqq 3$). Pokud je tento „nedělitel“ jediný, je to nutně číslo 7 (musí to být prvočíslo, jehož dvojnásobek je větší než 10), takže $360 \mid n$. Pokud jsou takoví „nedělitelé“ dva, musí to být některá z dvojic 5 a 10, 8 a 9, 7 a 8, 7 a 9, 4 a 8. V každém případě $6 \mid n$, takže snadno ukážeme, že jeden z obou kladných zbytků je větší než 1, tedy $S(n) \geqq 3$.

47 – C – S – 2

Zjistěte nejmenší trojciferné číslo, které je dělitelné právě polovinou z čísel

$$2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 12,\ 16,\ 18,\ 24,\ 27,\ 36.$$

(P. Černek)

Řešení. Hledané číslo A má být dělitelné právě šesti z vypsaných čísel. Každé z těchto 12 čísel je dělitelné pouze prvočísly 2 a 3. Jelikož mezi těmito čísly jsou jen čtyři mocniny dvou (2, 4, 8, 16) a jen tři mocniny tří (3, 9, 27), musí být číslo A dělitelné jak dvěma, tak třemi (a tedy i šesti).

Protože kromě čísel 2, 3 a 6 má číslo A ještě další tři dělitele mezi vypsanými čísly, musí být A dělitelné čtyřmi nebo devíti, ne však oběma čísly zároveň (pak by mělo osm dělitelů 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 a 36). Rozlišme proto dva případy.

• $4 \mid A$ a $9 \nmid A$. Pak je číslo A dělitelné 2, 3, 4, 6 a 12, šestý vypsaný dělitel je nutně (jediné) z čísel 8, 16, 24. Proto $8 \mid A$, takže také (ve sporu s předchozí větou) $24 \mid A$. Musí tedy nastat druhý případ.

• $9 \mid A$ a $4 \nmid A$. Pak je číslo A dělitelné 2, 3, 6, 9 a 18, šestý vybraný dělitel je nutně číslo 27. Proto $54 \mid A$, tedy $A = 54l$, kde l je liché číslo (neboť $4 \nmid A$).

Na druhé straně, *každé* takové číslo $54l$ má zřejmě mezi vypsanými čísly právě 6 dělitelů (2, 3, 6, 9, 18, 27). Takové nejmenší trojciferné číslo je $54 \cdot 3 = 162$.

Jiné řešení. Hledané trojciferné číslo A nemůže být dělitelné ani číslem 36 (pak by mělo osm dělitelů 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36), ani číslem 24 (pak by mělo sedm dělitelů 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24). Probírejme zbylých 10 vypsaných čísel (sestupně od největšího) a zjišťujme, zda mohou dělit číslo A.

- $27 \mid A$. Protože číslo A je nutně sudé (jinak by mělo jen dělitele 3, 9, 27), platí $54 \mid A$. Číslo $54 \cdot 2 = 108$ podmínce úlohy nevyhovuje, zato číslo $3 \cdot 54 = 162$ ano. Dále už předpokládejme, že $27 \nmid A$.
- $18 \mid A$. Číslo A má pět dělitelů 2, 3, 6, 9 a 18. Šestý vypsaný dělitel je (jediné) z čísel 4, 8, 12, 16. Proto $4 \mid A$, takže také $12 \mid A$, což je spor s předchozí větou.
- $16 \mid A$. Číslo A má čtyři dělitele 2, 4, 8 a 16, poslední dva vypsaní dělitelé musí být z čísel 3, 6, 9, 12. Proto $3 \mid A$, takže také $24 \mid A$, a to jsme úvodem vyloučili.
- $12 \mid A$. Číslo A má pět dělitelů 2, 3, 4, 6 a 12, šestým vypsaným dělitelem musí být číslo 8 nebo číslo 9. Z $8 \mid A$ pak ale plyne $24 \mid A$ (spor), z $9 \mid A$ zase $18 \mid A$, a tím jsme se už zabývali.

Kdyby číslo A nebylo dělitelné žádným z čísel 36, 24, 27, 18, 16 a 12, muselo by být dělitelné všemi šesti čísly 2, 3, 4, 6, 8 a 9, a tedy přece jen i číslem 18. Tím je naše diskuse uzavřena. Hledané číslo je 162.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešení vysvětlíme, že hledané číslo je dělitelné šesti. Budeme proto postupně probírat trojciferná čísla dělitelná šesti (od nejmenšího z nich, čísla 102), dokud nenajdeme takové, které má mezi vypsanými čísly právě šest dělitelů (počet těchto dělitelů dále uvádíme vždy v závorce za číslem): 102 (3), 108 (9), 114 (3), 120 (7), 126 (5), 132 (5), 138 (3), 144 (11), 150 (3), 156 (5), 162 (6). Hledané číslo je 162.

48 – A – I – 2

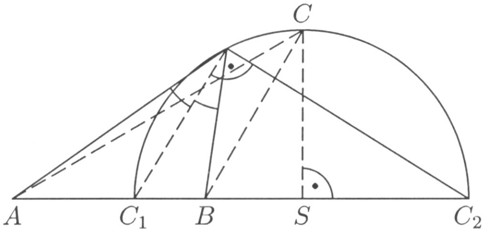
Najděte všechna kladná čísla k, pro něž platí: Ze všech trojúhelníků ABC, v nichž $|AB| = 5\,\mathrm{cm}$ a $|AC| : |BC| = k$, má největší obsah trojúhelník rovnoramenný.

(*P. Černek*)

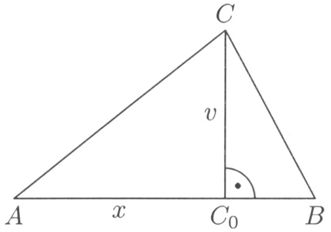
Řešení. Pro $k = 1$ uvedené charakterizaci vyhovuje libovolný rovnoramenný trojúhelník s danou základnou AB a libovolně velkou výškou z vrcholu C. Mezi nimi zřejmě neexistuje trojúhelník s největším obsahem.

Zřejmě $k \neq 1$ (pro $k = 1$ maximum neexistuje). Obě čísla k a $\dfrac{1}{k}$ zkoumanou vlastnost zároveň buď mají, nebo ne. Předpokládejme tedy (bez újmy na obecnosti), že $k > 1$. Na přímce AB existují dva různé body C_1, C_2, pro které platí $\dfrac{|AC_1|}{|BC_1|} = \dfrac{|AC_2|}{|BC_2|} = k$. Všechny body C v rovině, pro které $|AC| : |BC| = k$, leží na

Apolloniově kružnici o středu S sestrojené nad průměrem C_1C_2 (obr. 14). Odtud je zřejmé, že trojúhelník ABC bude mít největší obsah pro vrchol C ve středu oblouku C_1C_2 (v libovolné z polorovin určených přímkou AB). Za předpokladu $k > 1$ pro takto zvolený bod C platí $|AC| > |BC|$ a také $|AC| > |AS| > |AB|$, takže trojúhelník ABC bude rovnoramenný, právě když bude $|AB| = |BC|$. Odtud sestavíme rovnici pro odpovídající hodnotu k.



Obr. 14



Obr. 15

Pro bod C_1 především platí

$$|BC_1| = \frac{1}{k+1}|AB|, \qquad |BC_2| = \frac{1}{k-1}|AB|,$$

takže z rovnosti $|C_1C_2| = |BC_1| + |BC_2|$ vychází

$$|SC_1| = \frac{1}{2}|C_1C_2| = \frac{k}{k^2-1}|AB|.$$

Ještě spočteme

$$|BS| = |SC_1| - |BC_1| = \left(\frac{k}{k^2-1} - \frac{1}{k+1}\right)|AB| = \frac{1}{k^2-1}|AB|$$

a

$$|BC|^2 = |BS|^2 + |SC|^2 = |BS|^2 + |SC_1|^2 = \frac{1+k^2}{\left(k^2-1\right)^2}|AB|^2.$$

Proto z podmínky $|AB| = |BC|$ vychází rovnice

$$1 + k^2 = k^4 - 2k^2 + 1, \quad \text{neboli} \quad k^2\left(k^2-3\right) = 0,$$

která má jediné kladné řešení $k = \sqrt{3}$.

Úloze vyhovují dvě kladná čísla k, $k = \sqrt{3}$ a $k = 1/\sqrt{3}$.

Jiné řešení (bez Apolloniovy kružnice). Předpokládejme opět (bez újmy na obecnosti), že $k > 1$ je pevné. Označme C_0 patu výšky z vrcholu C a $x = |AC_0|$ (obr. 15). Pro dané x spočítáme závislost $v = v(x)$, najdeme maximum této funkce a nakonec se podíváme, pro které $k > 1$ tomuto extrému odpovídá rovnoramenný trojúhelník.

Zřejmě je

$$|AC|^2 = x^2 + v^2, \quad |BC|^2 = (x - c)^2 + v^2, \tag{1}$$

kde $c = |AB|$ a $v = |CC_0|$, takže podmínka $|AC| = k|BC|$ je ekvivalentní rovnosti

$$x^2 + v^2 = k^2\big((x - c)^2 + v^2\big),$$

neboli

$$v^2 = -x^2 + \frac{2k^2c}{k^2 - 1}x - \frac{k^2c^2}{k^2 - 1}.$$

Jak víme, nabývá nalezená kvadratická funkce maxima pro

$$x = \frac{k^2c}{k^2 - 1} > c$$

a té odpovídá maximální hodnota

$$v_{\max} = \frac{kc}{k^2 - 1}.$$

Protože vyšlo $x > c$, znamená to, že $|AC| > c$, takže trojúhelník ABC může být rovnoramenný, jedině když $|BC| = |BA| = c$. Dosazením do druhé rovnosti v (1) dostaneme podmínku

$$c^2 = \left(\frac{k^2c}{k^2 - 1} - c\right)^2 + \frac{k^2c^2}{(k^2 - 1)^2} = \frac{c^2\big(k^2 + 1\big)}{(k^2 - 1)^2},$$

odkud pro $t = k^2$ vychází kvadratická rovnice

$$t + 1 = (t - 1)^2,$$

která má jediný kladný kořen $t = 3$, takže $k = \sqrt{3}$. Závěr je stejný jako v předchozím řešení.

48 – A – S – 2

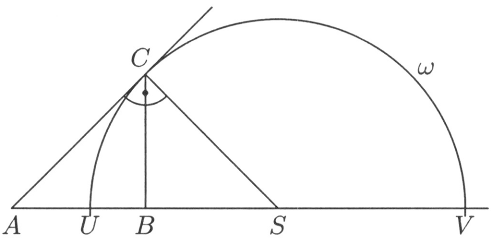
V rovině jsou dány dva různé body A a B. Najděte všechna reálná čísla $k > 1$, pro něž platí: Ze všech trojúhelníků ABC, v nichž $|AC| : |BC| = k$, největší možný vnitřní úhel při vrcholu A má trojúhelník rovnoramenný. (*J. Šimša, L. Boček*)

Řešení. Ze sinové věty $\sin\alpha : \sin\beta = a : b$ za podmínky $b = ka$, $k > 1$, plyne odhad

$$\sin\alpha = \frac{\sin\beta}{k} \leqq \frac{1}{k},$$

přitom rovnost nastane, právě když $\sin\beta = 1$, tedy $\beta = 90°$. Proto největší úhel α má ten z uvažovaných trojúhelníků ABC, který má pravý úhel u vrcholu B a jeho (ostrý) úhel při vrcholu A je určen rovností $\sin\alpha = \frac{1}{k}$. Tento pravoúhlý trojúhelník je zřejmě rovnoramenný, právě když $\alpha = 45°$, tedy když $\frac{1}{k} = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, což nastane pouze pro hodnotu $k = \sqrt{2}$.

Jiné řešení. Předpokládejme, že číslo $k > 1$ je pevné. Zvolíme-li v rovině úsečku AB, vrcholy C všech uvažovaných trojúhelníků ABC zaplní Apolloniovu kružnici ω všech bodů X s vlastností $|AX| : |BX| = k$. Úhel BAC bude maximální, právě když přímka AC bude tečnou této kružnice ω (a bod C bude její bod dotyku, obr. 16).



Obr. 16

Popišme polohu krajních bodů U, V toho průměru kružnice ω, který leží na přímce AB: bod U je vnitřním bodem úsečky AB, bod V vnitřním bodem polopřímky opačné k polopřímce BA, přičemž pochopitelně platí

$$|AU| : |BU| = |AV| : |BV| = k.$$

Odtud snadno pomocí délky $c = |AB|$ určíme, že

$$|AU| = \frac{kc}{k+1} \quad \text{a} \quad |AV| = \frac{kc}{k-1}.$$

Bod C na kružnici ω je bodem dotyku tečny vedené bodem A k této kružnici, právě když platí (mocnost bodu ke kružnici) rovnost $|AC|^2 = |AU| \cdot |AV|$, z níž po dosazení za $|AU|$ a $|AV|$ dostaneme

$$|AC| = \frac{kc}{\sqrt{k^2-1}}, \quad \text{takže} \quad |BC| = \frac{|AC|}{k} = \frac{c}{\sqrt{k^2-1}}.$$

Snadno se zjistí, že trojúhelník o stranách

$$\frac{c}{\sqrt{k^2-1}}, \ \frac{kc}{\sqrt{k^2-1}}, \ c$$

(jenž je pravoúhlý pro každé $k > 1$) je rovnoramenný jedině pro $k = \sqrt{2}$.

Jiné řešení. Do kosinové věty $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ dosadíme $b = ka$ a vyjádříme z ní $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{(k^2-1)a^2 + c^2}{2kac} = \frac{(k^2-1)a}{2kc} + \frac{c}{2ka}.$$

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvou čísel platí

$$\frac{(k^2-1)a}{2kc} + \frac{c}{2ka} \geqq 2\sqrt{\frac{(k^2-1)a}{2kc}\cdot\frac{c}{2ka}} = \frac{\sqrt{k^2-1}}{k},$$

takže $\cos\alpha \geqq \cos\alpha_0$, neboli $\alpha \leqq \alpha_0$, kde α_0 je ostrý úhel určený rovností

$$\cos\alpha_0 = \frac{\sqrt{k^2-1}}{k}.$$

Maximální hodnota $\alpha = \alpha_0$ se dosáhne, když se obě průměrovaná čísla rovnají, tedy když

$$\frac{(k^2-1)a}{2kc} = \frac{c}{2ka}, \quad \text{čili} \quad c = a\sqrt{k^2-1}.$$

Protože navíc $b = ka > a$, zjišťujeme, že největší možný úhel α má trojúhelník rovnoramenný jedině v případě $c = a$; z rovnosti $a\sqrt{k^2-1} = a$ tak nacházíme (jedinou) hledanou hodnotu $k = \sqrt{2}$.

48 – A – I – 3

Pro která celá čísla a je maximum i minimum funkce

$$y = \frac{12x^2 - 12ax}{x^2 + 36}$$

celé číslo? *(P. Černek)*

Řešení. Budeme nejprve zjišťovat obor hodnot uvedené funkce, tj. pro která reálná s existuje aspoň jedno reálné x takové, že

$$y = \frac{12x^2 - 12ax}{x^2 + 36} = s.$$

Jednoduchou úpravou dostaneme rovnici

$$(s-12)x^2 + 12ax + 36s = 0, \tag{1}$$

která je kvadratická, pokud $s \neq 12$. Z rovnice plyne, že $s = 12$ patří do oboru hodnot, jen když $ax = -36$, tedy jen když $a \neq 0$. Pro $a = 0$ dostaneme pro x

rovnici $x^2 = \dfrac{-36s}{s-12}$, z níž vychází pro s nerovnost $0 \leqq s < 12$, takže obor hodnot uvažované funkce nemá pro $a = 0$ maximum.

Předpokládejme proto, že $a \neq 0$ a $s \neq 12$. V tomto případě je rovnice (1) kvadratická a bude mít v reálném oboru řešení, právě když její diskriminant

$$D = 12^2a^2 - 4 \cdot 36s(s-12) = 12^2(a^2 - s^2 + 12s)$$

bude nezáporný, tj. právě když

$$6 - \sqrt{36+a^2} \leqq s \leqq 6 + \sqrt{36+a^2}.$$

Krajní body nalezeného intervalu (který zřejmě obsahuje i dříve nalezený prvek oboru hodnot $s = 12$) jsou minimum a maximum dané funkce. Pokud to mají být celá čísla, musí pro vhodné přirozené číslo b platit $36+a^2 = b^2$, tedy $(b-a)(b+a) = 36$. Z každého rozkladu čísla 36 na součin dvou přirozených činitelů $36 = mn$ dostaneme $a = \frac{1}{2}(m-n)$, $b = \frac{1}{2}(m+n)$, což jsou celá čísla, jen když m a n mají stejnou paritu ($m \equiv n \pmod 2$), a protože $a \neq 0$, vyhovuje jedině rozklad $36 = 2 \cdot 18$, odkud $b = 10$, $a = \pm 8$.

Odpověď: Požadovanou vlastnost mají právě dvě celá čísla a, a to $a = 8$ a $a = -8$.

48 – A – III – 6

Najděte všechny dvojice reálných čísel a a b, pro které má soustava rovnic

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} = a, \qquad \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = b$$

s neznámými x a y řešení v oboru reálných čísel. (*J. Šimša*)

Řešení. Má-li daná soustava řešení (x, y) pro čísla $a = A$, $b = B$, má zřejmě i řešení (kx, ky) pro libovolné $k \neq 0$ a pro čísla $a = \dfrac{1}{k}A$, $b = kB$. Odtud vidíme, že existence řešení dané soustavy závisí jen na hodnotě součinu ab.

Budeme tedy nejdříve zkoumat hodnoty výrazu

$$P(u,v) = \frac{(u+v)(u^3+v^3)}{(u^2+v^2)^2},$$

kde čísla u a v splňují normalizační podmínku $u^2 + v^2 = 1$. Podle ní platí

$$\begin{aligned} P(u,v) &= (u+v)(u^3+v^3) = (u+v)^2(u^2 - uv + v^2) = \\ &= (u^2 + 2uv + v^2)(1 - uv) = (1 + 2uv)(1 - uv). \end{aligned}$$

Za podmínky $u^2+v^2=1$ nabývá součin uv všech hodnot z intervalu $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ (je-li $u=\cos\alpha$ a $v=\sin\alpha$, je $uv=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$). Proto stačí zjistit množinu hodnot funkce $f(t)=(1+2t)(1-t)$ na intervalu $t\in\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$. Z vyjádření

$$f(t)=-2t^2+t+1=-2\Big(t-\frac{1}{4}\Big)^2+\frac{9}{8}$$

plyne, že hledanou množinou hodnot je uzavřený interval s krajními body $f(-\frac{1}{2})=$ $=0$ a $f(\frac{1}{4})=\frac{9}{8}$.

To tedy znamená, že pokud má daná soustava řešení, musí pro její parametry a a b platit $0\leqq ab\leqq\frac{9}{8}$, přitom rovnost $ab=0$ je možná, jen když $x+y=0$, tehdy však $a=b=0$.

Splňují-li naopak některá čísla a a b nerovnosti $0<ab\leqq\frac{9}{8}$, existují dle dokázaného čísla u a v taková, že $u^2+v^2=1$ a $(u+v)(u^3+v^3)=ab$. Označíme-li $a'=u+v$ a $b'=u^3+v^3$, pak z rovnosti $a'b'=ab\neq 0$ plyne, že oba poměry $a:a'$ a $b':b$ mají tutéž hodnotu $k\neq 0$. Pak ale dvojice $x=ku$ a $y=kv$ je zřejmě řešením soustavy rovnic ze zadání úlohy pro uvažované hodnoty a a b.

48 – C – I – 6

Pro libovolnou dvojici reálných čísel a, b splňující vztah $a+b=1$ platí

$$\sqrt{a^2+a+1}+\sqrt{b^2+b+1}>2. \tag{1}$$

Jsou-li navíc čísla a, b nezáporná, platí také

$$\sqrt{a^2+a+1}+\sqrt{b^2+b+1}<3. \tag{2}$$

Obě tvrzení dokažte. (*P. Leischner, J. Švrček*)

Řešení. Nejprve je nutné ověřit, zda jsou dané výrazy definovány pro všechna reálná čísla a, b. Stačí dokázat, že pro každé reálné u je výraz $U=u^2+u+1$ nezáporný.

1. způsob:

$$U=u^2+2\cdot\frac{1}{2}u+\Big(\frac{1}{2}\Big)^2-\Big(\frac{1}{2}\Big)^2+1=\Big(u+\frac{1}{2}\Big)^2+\frac{3}{4}.$$

Odtud vidíme, že je dokonce

$$U=u^2+u+1\geqq\frac{3}{4}, \tag{3}$$

protože druhá mocnina reálného výrazu je vždy nezáporná.

2. způsob: Pro $u\geqq 0$ je zřejmě výraz U kladný. Je-li $u<0$, je

$$U>u^2+u+1+u=(u+1)^2\geqq 0.$$

3. způsob: Představme si rovnost $U = u^2 + u + 1$ jako kvadratickou rovnici $u^2 + u + (1 - U) = 0$ s parametrem U. Tento vztah je splněn pro nějaké reálné u, jen když je příslušný diskriminant nezáporný, tj. $1 - 4(1 - U) \geqq 0$, a odtud $U \geqq \frac{3}{4}$.

4. způsob: Úpravou na tvar $U = u(u + 1) + 1$ a substitucí $u = s - \frac{1}{2}$ (viz též první pomocnou úlohu) máme $U = (s - \frac{1}{2})(s + \frac{1}{2}) + 1 = s^2 + \frac{3}{4}$, což vede na odhad (3).

Dále asi řešitelé budou zkoušet výraz

$$V = \sqrt{a^2 + a + 1} + \sqrt{b^2 + b + 1} \tag{4}$$

upravovat, aby jej mohli odhadnout. Jak asi budou postupovat? Uvedeme některé možnosti:

I. Dosazením $b = 1 - a$ do (3) dostaneme

$$V = \sqrt{a^2 + a + 1} + \sqrt{a^2 - 3a + 3}. \tag{5}$$

Tím jsme se ovšem k cíli moc nepřiblížili. Zkusme ještě obě strany rovnosti (5) umocnit:

$$\begin{aligned} V^2 &= a^2 + a^2 - 2a + 1 + 3 + 2\sqrt{a^2 + a + 1}\sqrt{a^2 - 3a + 3} = \\ &= a^2 + (a - 1)^2 + 3 + 2\sqrt{a^4 - 2a^3 + a^2 + 3}. \end{aligned}$$

Výraz pod odmocninou se dá ještě po vytknutí a z prvních tří členů upravit, takže dostaneme

$$V^2 = 3 + a^2 + (a - 1)^2 + 2\sqrt{3 + a^2(a - 1)^2} \tag{6}$$

II. Rovnost (4) umocníme přímo a při dalších úpravách opakovaně nahrazujeme součty $a + b$ jedničkami:

$$\begin{aligned} V^2 &= a^2 + b^2 + 3 + 2\sqrt{a^2b^2 + ab(a + b + 1) + a^2 + b^2 + a + b + 1} = \\ &= 3 + a^2 + 2\sqrt{3 + a^2b^2} + b^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Důkaz nerovnosti (1).

1. řešení (bez umocňování výrazu V): Jsou-li a, b nezáporná, je $V > \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$. Jestliže je $b < 0$, pak musí být $a > 1$. Položme tedy na pravé straně vztahu (4) $a = 1$ a druhou odmocninu odhadněme pomocí (3). Dostaneme tak silnější odhad, než se požaduje: $V > \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{3} > \frac{5}{2}$.

2. řešení: Když uvážíme, že druhá mocnina každého reálného čísla je nezáporná, odhadneme z (6), že $V^2 \geqq 3 + 2\sqrt{3} > 4$, a po odmocnění vyjde, že $V > 2$.

3. řešení: Ze vztahu (7) vidíme, že

$$\begin{aligned} V^2 &> 3 + \left(a^2 + 2\sqrt{a^2}\sqrt{b^2} + b^2\right) = \\ &= 3 + \left(\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}\right)^2 = 3 + (|a| + |b|)^2 \geqq 4, \end{aligned}$$

a tedy $V > 2$.

Důkaz nerovnosti (2).

1. řešení: Protože a, b jsou nezáporná a nemůže být $a = b = 0$, platí

$$V < \sqrt{a^2 + 2a + 1} + \sqrt{b^2 + 2b + 1} = (a + 1) + (b + 1) = 3.$$

2. řešení: Z podmínky $a + b = 1$ pro nezáporná čísla a, b máme $0 \leqq a \leqq 1$, $0 \leqq b \leqq 1$ a hodnotu výrazu V můžeme odhadnout dosazením $a = b = 1$ do (7): $V^2 < 3 + 1 + 2\sqrt{4} + 1 = 9$, takže $V < 3$.

3. řešení: Při odhadu můžeme různým způsobem uplatnit užitečné nerovnosti ze čtvrté pomocné úlohy. Zvolíme-li například $m = a^2 + a + 1$ a $n = b^2 + b + 1$, dostáváme

$$m + n = (a^2 + b^2) + (a + b) + 2 = 1 - 2ab + 3 = 4 - 2ab \leqq 4,$$

kde vztah

$$a^2 + b^2 = 1 - 2ab$$

použitý při úpravě jsme získali umocněním podmínky $a+b = 1$. Podle nerovnosti b) ze 4. pomocné úlohy pak je

$$V = \sqrt{m} + \sqrt{n} \leqq \sqrt{2(m + n)} \leqq \sqrt{8} < 3.$$

48 – C – S – 1

Najděte všechny dvojice a, b nezáporných reálných čísel, pro které platí

$$\sqrt{a^2 + b} + \sqrt{b^2 + a} = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a + b}.$$

(*J. Šimša*)

Řešení. Umocněním rovnice s nezápornými stranami a dalšími ekvivalentními úpravami postupně dostaneme

$$\begin{gathered}
a^2 + b + 2\sqrt{(a^2 + b)(b^2 + a)} + b^2 + a = a^2 + b^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(a + b)} + a + b,\\
\sqrt{(a^2 + b)(b^2 + a)} = \sqrt{(a^2 + b^2)(a + b)},\\
(a^2 + b)(b^2 + a) = (a^2 + b^2)(a + b),\\
a^2b^2 + a^3 + b^3 + ab = a^3 + ab^2 + ba^2 + b^3,\\
ab(ab + 1 - a - b) = 0,\\
ab(a - 1)(b - 1) = 0.
\end{gathered}$$

Hledanými jsou proto právě ty dvojice nezáporných čísel a, b, které splňují aspoň jednu z podmínek $a = 0$, $b = 0$, $a = 1$ nebo $b = 1$.

48 – Z5 – I – 4

V šestici čísel 7, _, _, _, _, 66 doplňte chybějící čísla tak, aby každé číslo bylo součtem předcházejících dvou.

Řešení. Označme x první z neznámých čísel. Následující čísla jsou $7 + x$, $x + (7 + x) = 2x + 7$, $(7 + x) + (2x + 7) = 3x + 14$ a poslední číslo šestice je $(2x + 7) + (3x + 14) = 5x + 21 = 66$. Odtud máme $x = 9$.

Hledaná šestice čísel je 7, 9, 16, 25, 41 a 66.

48 – Z6 – I – 2

Rodné číslo má deset číslic. První dvojčíslí rodného čísla je posledním dvojčíslím roku narození. Druhé dvojčíslí je u chlapců určeno měsícem narození, u děvčat je to měsíc narození zvětšený o 50. Třetí dvojčíslí je dáno dnem narození. Poslední nenulová čtveřice čísel je zvolena tak, aby rodné číslo bylo dělitelné 11. Kolik nejvíce dětí se mohlo narodit 23. 11. 1998, jestliže každé z nich musí mít jiné rodné číslo?

Řešení. Rodné čísla chlapců narozených 23. 11. 1998 jsou čísla tvaru

$$9\,811\,230\,000 + x = 891\,930\,000 \cdot 11 + x.$$

Číslo x je tedy libovolné přirozené nejvýše čtyřciferné číslo, které je násobkem 11, tj. libovolné z čísel $1 \cdot 11, 2 \cdot 11, \ldots, 909 \cdot 11 = 9\,999$. Počet možných rodných čísel pro chlapce je 909.

Rodná čísla dívek narozených 23. 11. 1998 jsou čísla tvaru

$$9\,861\,230\,000 + x = 896\,475\,454 \cdot 11 + 6 + x.$$

Aby byla tato rodná čísla dělitelná 11, musí být x přirozené nejvýše čtyřciferné číslo, které při dělení 11 dává zbytek 5, tj. některé z čísel $5, 5+1\cdot 11, 5+2\cdot 11, \ldots, 5 + 908 \cdot 11 = 9\,993$. Takových čísel je $1 + 908 = 909$.

Pro den 23. 11. 1998 lze přiřadit nejvýše 1 818 různých rodných čísel.

48 – Z9 – II – 3

Najděte prvočísla p, r, která splňují rovnost

$$p + p^2 + p^3 + r + r^2 + r^3 = 2\,393.$$

(*Mészáros*)

Řešení. Levou stranu zadané rovnosti rozdělíme na dva součty: $(p+p^2+p^3)+(r + r^2 + r^3) = 2\,393$. Hledaná prvočísla p, r musí být různá, protože pravá strana je liché číslo. Zároveň je jasné, že jeden ze součtů na levé straně musí být sudý a druhý lichý. Součet prvočísla s jeho druhou a třetí mocninou je však sudý jen pro sudé prvočíslo 2. Položme $p = 2$, čili $p + p^2 + p^3 = 2 + 4 + 8 = 14$, takže $r + r^2 + r^3 = 2\,393 - 14 = 2\,379$. Mezi prvočísly, jejichž třetí mocnina je menší než $2\,379$, je největší číslo 13 ($13^3 = 2\,197$). Dosazením ověříme, že $r = 13$ splňuje rovnost $r + r^2 + r^3 = 2\,379$.

Hledanými prvočísly jsou čísla 2 a 13.

49 – A – I – 1

Nechť $P(x)$, $Q(x)$ jsou kvadratické trojčleny takové, že tři z kořenů rovnice $P(Q(x)) = 0$ jsou čísla -22, 7, 13. Určete čtvrtý kořen této rovnice.

Řešení. Vzhledem k tomu, že rovnice $P\big(Q(x)\big) = 0$ má reálný kořen, má kvadratická rovnice $P(x) = 0$ dva reálné kořeny r_1, r_2 (nevylučujeme, že $r_1 = r_2$). Mnohočlen $P\big(Q(x)\big)$ lze proto zapsat ve tvaru

$$P\big(Q(x)\big) = a\big(Q(x) - r_1\big)\big(Q(x) - r_2\big),$$

kde a je reálné číslo $a \neq 0$. Rovnice $P\big(Q(x)\big) = 0$ má podle zadání čtyři reálné kořeny, proto každá z kvadratických rovnic $Q(x) - r_1 = 0$, $Q(x) - r_2 = 0$ musí mít dva reálné kořeny. Z Viètových vzorců plyne, že součet kořenů v obou kvadratických rovnicích je týž, neboť obě rovnice mají stejný koeficient u lineárního členu. Přitom tři ze čtyř reálných kořenů obou kvadratických rovnic $Q(x) - r_1 = 0$, $Q(x) - r_2 = 0$ jsou dle zadání čísla -22, 7, 13, čtvrtý kořen označme q. Dále mohou nastat tři možnosti:

(i) Jedna z kvadratických rovnic má kořeny -22, 7, druhá má kořeny 13 a q. Pak platí $-22 + 7 = 13 + q$, tedy $q = -28$.

(ii) Jedna z kvadratických rovnic má kořeny -22, 13, druhá má kořeny 7 a q. Pak platí $-22 + 13 = 7 + q$, tedy $q = -16$.

(iii) Jedna z kvadratických rovnic má kořeny 13, 7, druhá má kořeny -22 a q. Potom však platí $13 + 7 = -22 + q$, tedy $q = 42$.

Je zřejmé, že v každém z případů (i), (ii), (iii) existují příslušné kvadratické trojčleny $P(x)$ a $Q(x)$. Má-li mít jedna z kvadratických rovnic $Q(x) - r_1 = 0$, $Q(x) - r_2 = 0$ kořeny -22, 7 a druhá 13, -28, položíme $Q(x) = x^2 + 15x$, $r_1 = (-22) \cdot 7 = -154$, $r_2 = 13 \cdot (-28) = -364$, $P(x) = (x + 154)(x + 364) = x^2 + 518x + 56056$. Obdobně lze postupovat ve zbývajících případech.

Čtvrtým kořenem rovnice $P\big(Q(x)\big) = 0$ může být kterékoliv z čísel -28, -16, 42.

Jiné řešení. Úvahy o koeficientu u lineárního členu s využitím Viètových vztahů lze nahradit následující úvahou o grafech kvadratických funkcí.

Protože grafy kvadratických funkcí $f_1: y = Q(x) - r_1$ a $f_2: y = Q(x) - r_2$ mají tutéž osu souměrnosti a přitom existují čtyři reálné kořeny rovnice $P(Q(x)) = 0$, jsou tyto kořeny na ose x po dvou středově souměrné podle průsečíku os souměrnosti grafů obou funkcí f_1 a f_2 s osou x. Vzhledem k poloze daných tří kořenů na ose x lze dále uvažovat tři možnosti stejně jako v předcházejícím řešení. Např.

(i) Střed souměrnosti je $-7{,}5 = \frac{-22+7}{2}$, čtvrtý kořen leží na ose x a je symetrický s obrazem čísla 13 dle středu souměrnosti v bodě $-7{,}5$. Čtvrtým hledaným kořenem je tudíž číslo -28.

Podobně lze postupovat ve zbylých dvou případech a dospějeme tak ke stejnému výsledku.

49 – B – I – 1

Pro která reálná čísla t má funkce $f(x) = 5x + 44 + t|x-2| - 3|x-t|$ maximum rovné 0? *(P. Černek)*

Řešení. Daná funkce je lineární lomená, protože obsahuje dva výrazy s absolutní hodnotou, které způsobují, že jejím grafem není přímka, nýbrž lomená čára. Její definiční obor, množinu $\mathbb{R}$ všech reálných čísel, můžeme v tomto případě rozdělit na tři disjunktní části podle toho, jak se příslušná absolutní hodnota chová (zda je výraz v absolutní hodnotě kladný, či záporný). Protože jedna z absolutních hodnot závisí na parametru t, rozlišíme, zda je $t < 2$ (případ A), či $t \geqq 2$ (případ B).

Rozlišíme dva případy, podle toho, zda je $t < 2$ (případ A), či $t \geqq 2$ (případ B).

A. Nechť $t < 2$. Množina $\mathbb{R}$ se nám rozpadne na tři disjunktní intervaly, $\mathbb{R} = (-\infty, t\rangle \cup (t, 2\rangle \cup (2, \infty)$.

(a) V intervalu $(-\infty, t\rangle$ je, jak snadno spočteme, $f(x) = (8-t)x + 44 - t$. Protože za uvedeného předpokladu je $8 - t > 0$, je funkce f v tomto intervalu rostoucí a nabyde maxima v bodě $x = t$.

(b) V intervalu $(t, 2\rangle$ je $f(x) = (2-t)x + 44 + 5t$. Protože za uvedeného předpokladu je $2-t > 0$, je funkce f i v tomto intervalu rostoucí a nabyde maxima v bodě $x = 2$. Přitom zřejmě platí $f(t) < f(2) = 2(2-t) + 44 + 5t$.

(c) V intervalu $(2, \infty)$ je $f(x) = (2+t)x + 44 + t$. Tato funkce je pro $2 + t > 0$ na tomto intervalu rostoucí a shora neomezená, takže nemůže mít maximum. Musí tedy nutně být $2 + t \leqq 0$, tj. $t \leqq -2$, funkce f bude v intervalu $(2, \infty)$ nerostoucí a její hodnota nebude větší než $f(2)$, kterou jsme spočítali v (b).

Zjistili jsme tedy, že za předpokladu $t < 2$ nabývá funkce f maxima jedině pro $t \leqq -2$, přičemž její maximum je $f(2) = 2(2-t) + 44 + 5t$. Toto maximum se rovná 0, právě když $2(2-t) + 44 + 5t = 0$, neboli $t = -16$, což je naštěstí číslo, které splňuje podmínku $t \leqq -2$.

B. Nechť $t \geqq 2$. Množina $\mathbb{R}$ se nám rozpadne na tři disjunktní intervaly, $\mathbb{R} = (-\infty, 2\rangle \cup (2, t\rangle \cup (t, \infty)$, přičemž prostřední „interval" bude prázdný pro $t = 2$

(to však není pro další úvahy podstatné, jinak bychom mohli tento případ snadno rozebrat samostatně).

V intervalu $(-\infty, 2\rangle$ je $f(x) = (8-t)x + 44 - t$. Kdyby teď bylo $8 - t < 0$, byla by funkce f v tomto intervalu klesající a shora neomezená, takže by nemohla mít maximum. Proto je $8 - t \geqq 0$, tj. $t \leqq 8$. Pak ale je $f(2) = 2(8-t) + 44 - t = 60 - 3t > 0$. Odtud hned vidíme, že za uvedeného předpokladu nemůže funkce f nikdy mít maximum rovné 0.

Z uvedeného rozboru vyplývá, že uvažovaná funkce má maximum rovné 0 jedině pro $t = -16$.

Jiné řešení. Víme, že grafem dané funkce f je lomená čára, která se v našem případě skládá ze dvou polopřímek (pro $t = 2$), resp. ze dvou polopřímek a jedné úsečky (návodná úloha 1).

Dále bychom si měli uvědomit, že pokud má takováto funkce maximum, nabývá ho určitě v některém ze „zlomových" bodů (tam, kde je příslušný výraz v absolutní hodnotě nulový). To samozřejmě neznamená, že funkce nemůže maximum nabýt i v jiných bodech (je-li konstantní na některém intervalu, návodná úloha 2).

V našem případě jsou těmito zlomovými body pro $x = 2$ bod $A(2, 54 - 3|t-2|)$, pro $x = t$ bod $B(t, 5t + 44 + t|t-2|)$.

Protože jeden z bodů $x = 2$, $x = t$ má být bodem maxima funkce f rovného 0, zjistíme, pro která t je jedna z y-ových souřadnic bodů A a B nulová (a druhá nekladná).

A:
$$54 - 3|t-2| = 0,$$
$$|t-2| = 18,$$
$$t = 20 \text{ anebo } t = -16.$$

B:
$$5t + 44 + t|t-2| = 0,$$
$$t \geqq 2 \Rightarrow t^2 + 3t + 44 = 0,$$
$$\text{nemá řešení.}$$
$$t < 2 \Rightarrow t^2 - 7t - 44 = 0.$$
$$t = 11 \text{ anebo } t = -4,$$
$$\text{vyhovuje jen } t = -4.$$

Máme tak tři možnosti:

Pro $t = 20$ je $A(2, 0)$, $B(20, 504)$, což nevyhovuje.

Pro $t = -16$ je $A(2, 0)$, $B(-16, -80 + 11 - 16 \cdot 18)$, zatím vyhovuje.

Pro $t = -4$ je $A(2, 36)$, $B(-4, 0)$, což nevyhovuje.

Zjistili jsme, že úloha má řešení nejvýše pro $t = -16$, kterému odpovídá funkce $f(x) = 5x + 44 - 16|x-2| - 3|x+16|$. Pro tuto funkci samozřejmě platí $f(2) = 0$. Ověřit, že tato hodnota je skutečně maximem funkce f, můžeme více způsoby. Například tak, že ověříme, že pro $x < -16$ je uvedená funkce neklesající (pro $x < -16$ je $f(x) = 24x + 60$) a současně pro $x > 2$ nerostoucí (pro $x > 2$ je $f(x) = -14x + 28$).

49 – B – II – 1

Zjistěte všechna reálná čísla c, pro která má rovnice

$$(c^2 + c - 8)(x + 2) - 8|x - c + 2| = c|x + c + 14|$$

nekonečně mnoho řešení v oboru celých čísel. (*J. Šimša*)

Řešení. Označíme-li pro dané reálné c

$$f_c(x) = c|x + c + 14| + 8|x - c + 2| - (c^2 + c - 8)(x + 2)$$

odpovídající po částech lineární funkci, je zřejmé, že rovnice $f_c(x) = 0$ bude mít nekonečně mnoho celočíselných řešení, právě když bude funkce f_c identicky rovna nule na některém z nekonečných intervalů $(-\infty, \min(c-2, -c-14)\rangle$ nebo $\langle\max(c-2, -c-14), \infty)$. Vyšetříme postupně obě možnosti.

a) Nechť $x \leqq \min(c - 2, -c - 14)$, pro taková x platí

$$\begin{aligned} f_c(x) &= -c(x + c + 14) - 8(x - c + 2) - (c^2 + c - 8)(x + 2) = \\ &= -c(2 + c)x - 3c^2 - 8c = -c\big(x(c + 2) + 3c + 8\big). \end{aligned}$$

Na tomto intervalu bude funkce f_c identicky rovna nule, právě když $c = 0$ (soustava $c + 2 = 0$, $3c + 8 = 0$ nemá žádné řešení).

b) Nechť $x \geqq \max(c - 2, -c - 14)$, pro taková x platí

$$\begin{aligned} f_c(x) &= c(x + c + 14) + 8(x - c + 2) - (c^2 + c - 8)(x + 2) = \\ &= (16 - c^2)x - c^2 + 4c + 32. \end{aligned}$$

Na tomto intervalu bude funkce f_c identicky rovna nule, právě když bude současně platit $c^2 = 16$ a $c^2 - 4c - 32 = 0$. Dosazením $c^2 = 16$ do druhé rovnice vychází $c = -4$, což je zřejmě jediné řešení obou rovnic.

Závěr. Daná rovnice má v oboru celých čísel nekonečně mnoho řešení, právě když $c = 0$ nebo $c = -4$ (v prvním případě rovnici vyhovují všechna celá čísla $x \leqq -14$, v druhém pak všechna celá čísla $x \geqq -6$).

49 – C – I – 4

Jirka zhotovil papírový model pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ s podstavou $ABCD$. Když pak model podél čtyř hran rozřízl, bylo ho možno rozvinout (bez překrytí) do roviny. Kolik různých sítí daného jehlanu tak mohl Jirka dostat? Ukázalo se, že síť, kterou Jirka dostal, měla tvar (nekonvexního) sedmiúhelníku. Vypočtěte úhel AVB v boční stěně jehlanu. (*P. Leischner*)

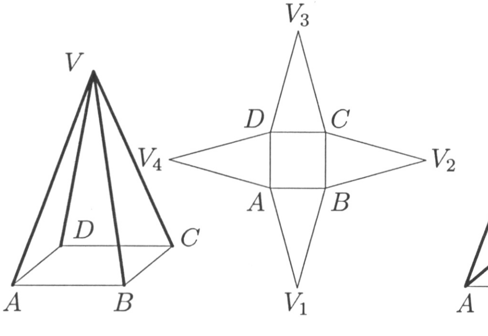
Řešení. Počet různých sítí daného jehlanu určíme tak, že nejprve všechny možné sítě nakreslíme. Abychom některou možnost neopomenuli, měli bychom do výčtu sítí vnést *určitý systém.* Popíšeme dva přístupy, které takový systém vytvářejí (a které budou patrně žákům nejbližší).

Přístup 1 („od sítě k jehlanu"). Každá síť bude složena z jednoho čtverce o straně a a čtyř rovnoramenných trojúhelníků o stranách a, b, b, kde a značí délku podstavné hrany a b délku boční hrany daného jehlanu $ABCDV$. Přemýšlejme tedy o tom, jak takový čtverec a čtyři trojúhelníky „slepit" podél shodných stran do „celku" a zda tento celek skutečně vytvoří síť jehlanu. Je velmi přirozené rozčlenit řešení tohoto úkolu *podle počtu stran čtverce, které budou slepeny* (možné počty jsou 1 až 4).

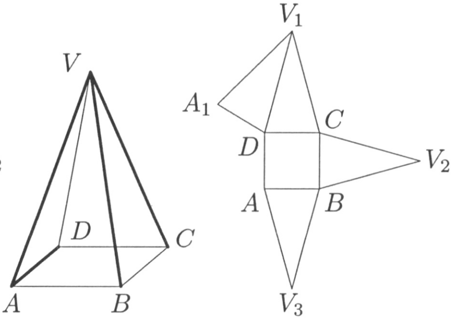
Přístup 2 („od jehlanu k síti"). Přemýšlejme o tom, jak rozříznout daný jehlan $ABCDV$ podél čtyř hran, abychom po rozvinutí dostali jeho síť. (Brzy si při tom uvědomíme jeden obecný poznatek: z každého vrcholu tělesa musí vycházet aspoň jedna hrana řezu.) Protože nám jde o počet různých (tj. po dvou neshodných) sítí, s ohledem na symetrii daného jehlanu není příliš vhodné systematizovat čtveřice hran řezu podle toho, zda obsahují některé konkrétní hrany (jako např. hrany AB, AV apod.). Výhodnější je rozdělení těchto čtveřic do skupin podle toho, *kolik hran řezu je v jehlanu podstavných* (a kolik bočních).

Protože oba popsané přístupy vedou ke shodné systematizaci (je-li právě k hran řezu podstavných, je v příslušné síti právě $4 - k$ stran čtverce slepeno s trojúhelníky), popíšeme výčet všech sítí jen podle Přístupu 2:

1. Neleží-li v podstavě $ABCD$ žádná hrana řezu, je jehlan rozříznut podél všech čtyř bočních hran, příslušná síť je na obr. 17.



Obr. 17

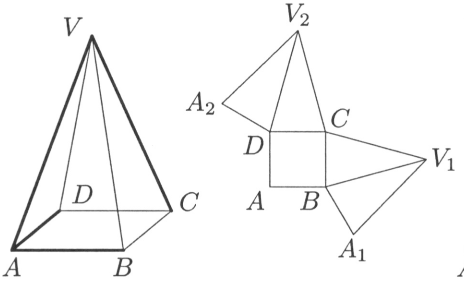


Obr. 18

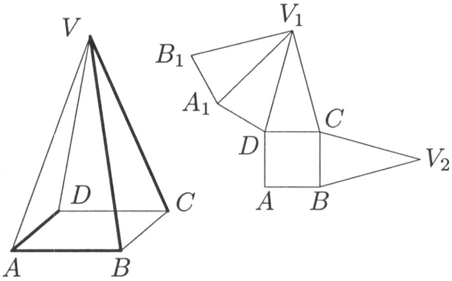
2. Předpokládejme, že v podstavě $ABCD$ leží jediná hrana řezu, například hrana AD. Z vrcholů B a C musí vycházet nějaké hrany řezu, mohou to tedy být jedině hrany BV a CV. Tři hrany řezu jsou tedy AD, BV a CV, s ohledem na symetrii je lhostejno, zda je čtvrtou hranu řezu AV nebo DV, nechť je to tedy hrana AV jako na obr. 18.

3. Předpokládejme, že v podstavě $ABCD$ leží právě dvě hrany řezu. Rozlišme, zda jsou to hrany sousední (např. AB a AD), nebo hrany protější (např. AD a BC); pro větší přehlednost oba případy posuďme v oddělených odstavcích:

(3a) Je-li podstava rozříznuta právě podél hran AB a AD (takže řezem v podstavě je lomená čára BAD), musí být třetí hranou řezu hrana CV, čtvrtá hrana řezu je pak jedna z hran AV, BV, nebo DV. S ohledem na symetrii případů, kdy je čtvrtou hranou řezu BV nebo DV, uvádíme jen obrázky pro hrany řezu AV (obr. 19) a BV (obr. 20).

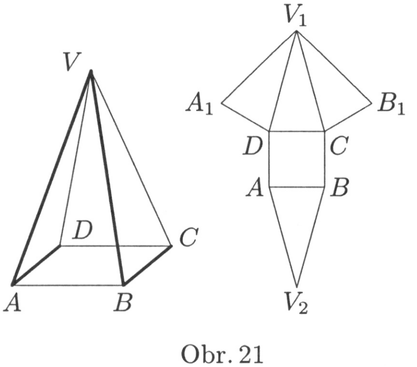


Obr. 19

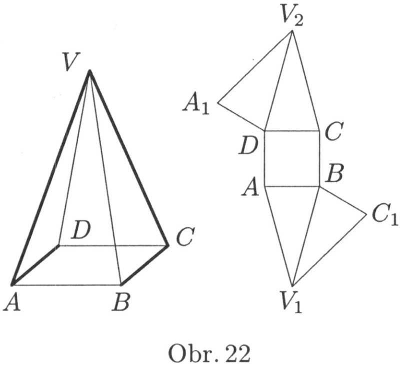


Obr. 20

(3b) Je-li podstava rozříznuta právě podél hran AD a BC, je třetí hranou řezu jedna z bočních hran AV, DV a čtvrtou hranou řezu jedna z bočních hran BV, CV (nemohou to totiž být ani obě hrany AV, DV, ani obě hrany BV, CV). S ohledem na symetrii stačí rozlišit jen dva případy: boční hrany řezu jsou buď AV a BV (obr. 21), nebo AV a CV (obr. 22).

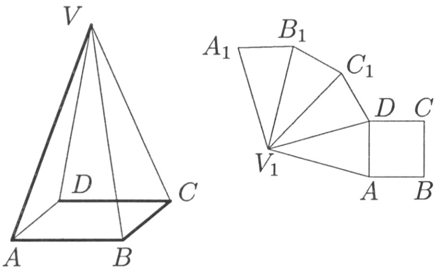


Obr. 21

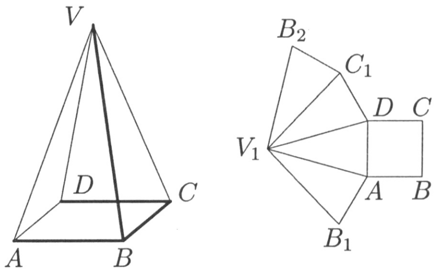


Obr. 22

4. Předpokládejme, že v podstavě $ABCD$ leží právě tři hrany řezu, například hrany AB, BC a CD, takže řezem v podstavě je lomená čára $ABCD$. S ohledem na symetrii nyní stačí rozlišit jen dva případy: čtvrtá hrana řezu vede do vrcholu V buďto z jednoho z obou krajních vrcholů zmíněné lomené čáry



Obr. 23



Obr. 24

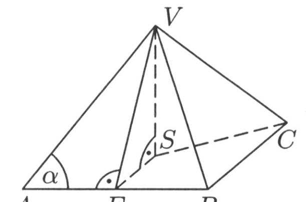
$ABCD$, například bodu A (obr. 23), nebo z jednoho z obou prostředních vrcholů, například bodu B (obr. 24).

Zjistili jsme, že daný jehlan má právě osm různých sítí. (Většina žáků asi správně všech osm sítí do svých řešení nakreslí, aniž pocítí nutnost vysvětlovat, proč jiné sítě neexistují. Diskutujme s nimi o této otázce.)

Přejděme nyní k druhé části úlohy, otázce, kdy některá ze sítí daného jehlanu má tvar nekonvexního sedmiúhelníku. Podle obrázků vidíme, že každá síť má, obecně vzato, osm vrcholů; jejich počet se sníží na sedm, právě když se úhel u jednoho z osmi obecných vrcholů „napřímí", tj. bude mít velikost 180°. Velikosti všech dotyčných úhlů lze snadno vyjádřit pomocí $\omega = |\sphericalangle AVB|$ a $\alpha = |\sphericalangle BAV|$; zjistíme tak, popsaná situace nastane, jen když jeden z úhlů

$$2\alpha,\ \alpha + 90^\circ,\ 2\alpha + 90^\circ,\ 2\omega,\ 3\omega \text{ nebo } 4\omega \qquad (*)$$

bude 180°. Položme si nyní poněkud obecnější otázku: Jaké hodnoty α a ω jsou přípustné, tj. odpovídají nějakému jehlanu $ABCDV$? Označme S střed čtverce $ABCD$ a E střed hrany AB (obr. 25), z pravoúhlého trojúhelníku EVS plyne, že



Obr. 25

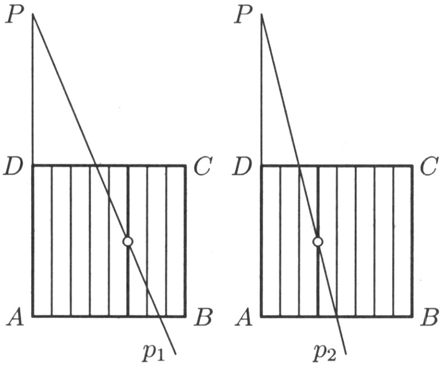
$|EV| > |ES|$ neboli $|EV| > |AE|$, proto pro úhel α v pravoúhlém trojúhelníku AVE platí $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ (pro $\alpha = 45^\circ$ bychom dostali „zdegenerovaný" jehlan s nulovou výškou, pro $\alpha = 90^\circ$ „jehlan" s nekonečnou výškou, tedy hranol). Zároveň je jasné, že pro každé $\alpha \in (45^\circ, 90^\circ)$ odpovídající jehlan existuje. Odtud vzhledem k rovnosti $2\alpha + \omega = 180°$ plyne, že přípustné hodnoty ω zaplní interval $(0°, 90°)$. Proto z úhlů (*) mohou být přímé jedině úhly 3ω a 4ω. Pro $\omega = 60°$ mají tvar sedmiúhelníku sítě z obr. 20 a 21, pro $\omega = 45°$ sítě z obr. 23 a 24.

Odpověď: Jirka mohl dostat právě osm různých sítí. Úhel AVB měl velikost 45° nebo 60°.

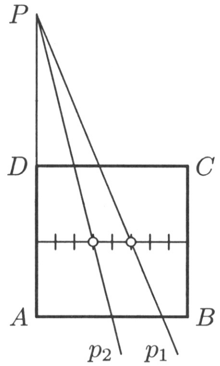
49 – Z8 – I – 3

Je dán čtverec $ABCD$ a bod P tak, že bod D je střed úsečky AP. Bodem P prochází přímka p. Ta dělí čtverec na dva útvary, jejichž obsahy jsou v poměru 5 : 3. Narýsujte takovou přímku. *(D. Hrubý)*

Řešení. Čtverec rozdělíme na osm shodných obdélníků (obr. 26). Z obrázku je zřejmé, že zvýrazněné úsečky dělí čtverec $ABCD$ na dva útvary, jejichž obsahy jsou v poměru 5 : 3 (resp. 3 : 5). Vedeme-li libovolnou přímku protínající stranu AB středem zvýrazněné úsečky, bude jí čtverec rozdělen v daném poměru. Řešením je tedy přímka procházející daným bodem P a středem zvýrazněné úsečky. Úloha má dvě řešení, neboť pořadí útvarů v poměru není určeno.



Obr. 26



Obr. 27

Jiné řešení. Přímka p dělí čtverec na dva pravoúhlé lichoběžníky. Obsah lichoběžníku je roven součinu jeho střední příčky a výšky. Obsahy lichoběžníků jsou v poměru 5 : 3 nebo 3 : 5 a jejich výšky jsou shodné, proto střední příčky lichoběžníků musí být též v poměru 5 : 3 nebo 3 : 5. Hledaná přímka p proto prochází daným bodem P a bodem, který dělí střední příčku čtverce rovnoběžnou se stranou AB v daném poměru (obr. 27).

49 – Z9 – III – 3

Najděte všechna trojciferná čísla x, která po zaokrouhlení na stovky se rovnají číslu $\dfrac{8x + 240}{9}$.

Řešení. Trojciferné číslo x zaokrouhlené na stovky označme $[x]$. Číslo $[x]$ může být některé z čísel 100, 200, 300, …, 1 000. Nejdříve vynásobíme tato čísla číslem 9, potom odečteme 240 a výsledek vydělíme číslem 8 (to plyne z rovnosti $x = \frac{9[x] - 240}{8}$). Řešením jsou ta z nich, jež jsou trojciferná a lze je zaokrouhlit na číslo $[x]$.

$[x]$	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000
$9[x]$	900	1 800	2 700	3 600	4 500	5 400	6 300	7 200	8 100	9 000
$9[x] - 240$	660	1 560	2 460	3 360	4 260	5 160	6 060	6 960	7 860	8 760
$(9[x] - 240) : 8$	82,5	195	307,5	420	532,5	645	757,5	870	982,5	1 095

Úloha má tedy tři řešení: 195, 420 a 645.

50 – A – I – 1

V urně jsou jen bílé a černé kuličky, jejichž počet zaokrouhlen na stovky je 1 000. Pravděpodobnost vytažení dvou černých kuliček je o $\frac{17}{43}$ větší než pravděpodobnost vytažení dvou bílých kuliček. Kolik bílých a kolik černých kuliček je v urně? (Pravděpodobnost vytažení kterékoli kuličky je stejná.) *(P. Černek)*

Řešení. Nechť je v urně n kuliček, z toho b bílých (a $n - b$ černých). Potom pravděpodobnost vytažení dvou bílých kuliček je rovna podílu

$$\frac{\binom{b}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{b(b-1)}{n(n-1)},$$

zatímco pravděpodobnost vytažení dvou černých kuliček podílu

$$\frac{\binom{n-b}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{(n-b)(n-b-1)}{n(n-1)}.$$

Podle zadání úlohy platí rovnost

$$\frac{(n-b)(n-b-1)}{n(n-1)} = \frac{b(b-1)}{n(n-1)} + \frac{17}{43},$$

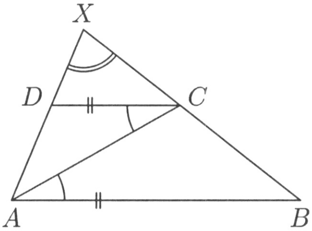
kterou lze algebraickými úpravami zjednodušit do tvaru $43b = 13n$ (pro $n \notin \{0, 1\}$ jde o ekvivalentní rovnice). Odtud vzhledem k nesoudělnosti čísel 13 a 43 plyne, že přirozená čísla n a b jsou tvaru $n = 43k$ a $b = 13k$, kde k je vhodné přirozené číslo. Podle zadání pro číslo n platí odhady $950 \leqq n < 1\,050$, z nichž zjistíme, že $k \in \{23, 24\}$. Pro $k = 23$ vychází $n = 989$ a $b = 299$ (tehdy $n - b = 690$), zatímco hodnotě $k = 24$ odpovídá $n = 1\,032$ a $b = 312$ (tehdy $n - b = 720$).

Odpověď: Úloha má dvě řešení — v urně je buď 299 bílých a 690 černých, nebo 312 bílých a 720 černých kuliček.

50 – A – I – 3

V rovině je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Paty výšek z vrcholů A, B označme po řadě A_1, B_1. Tečny kružnice opsané trojúhelníku CA_1B_1 sestrojené v bodech A_1, B_1 se protínají v bodě M. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AMB_1, BMA_1, CA_1B_1 procházejí jedním bodem. *(J. Švrček)*

Řešení. Označme k kružnici opsanou trojúhelníku CA_1B_1. V první části řešení ukážeme, že bod M z textu úlohy je středem strany AB. Protože trojúhelník ABC je ostroúhlý, leží paty A_1, B_1 příslušných výšek uvnitř odpovídajících stran. S ohledem na symetrii dané situace stačí uvažovat jen tečnu t ke kružnici k sestrojenou v bodě A_1, označit X její průsečík s přímkou AB a dokázat rovnost $|AX| = |BX|$ (obr. 28).



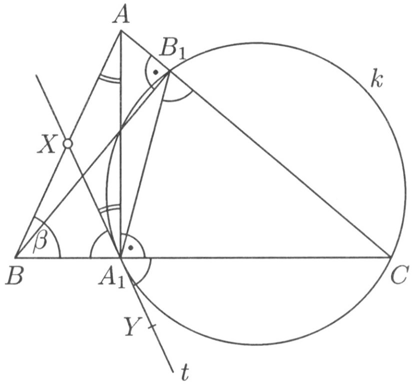
Obr. 28

Označme ještě Y libovolný vnitřní bod polopřímky opačné k polopřímce A_1X. Protože jsou oba úhly AA_1B a BB_1A pravé, je čtyřúhelník ABA_1B_1 tětivový, a tak platí $|\sphericalangle AB_1A_1| = 180° - |\sphericalangle ABA_1| = 180° - \beta$, kde jako obvykle $\beta = |\sphericalangle ABC|$. Proto má obvodový úhel A_1B_1C v kružnici k nad tětivou A_1C velikost $|\sphericalangle A_1B_1C| = 180° - |\sphericalangle AB_1A_1| = 180° - (180° - \beta) = \beta$, stejnou velikost má i příslušný úsekový úhel YA_1C.[1] Protože úhly XA_1B a YA_1C jsou vrcholové, dohromady dostáváme $|\sphericalangle XA_1B| = |\sphericalangle YA_1C| = |\sphericalangle A_1B_1C| = \beta$ (tyto shodné úhly jsou na obr. 28 vyznačeny obloučky). Zároveň platí i $|\sphericalangle XA_1A| = |\sphericalangle XAA_1| = 90° - \beta$. Zjistili jsme, že tečna t protne přímku AB v takovém bodě X, pro který jsou trojúhelníky BA_1X a A_1AX rovnoramenné, tj. $|BX| = |A_1X| = |AX|$.

Dokázali jsme, že bod M (průsečík tečen ke kružnici k s body dotyku A_1 a B_1) splývá se středem strany AB. Označme nyní k_1 a k_2 kružnice opsané po řadě

[1] K pojmu úsekového úhlu a jeho shodnosti s obvodovým úhlem viz S. Horák: *Kružnice*, ŠMM 16, MF, Praha 1966, str. 3–7.

trojúhelníkům AMB_1 a BMA_1 a S_1, S_2 jejich středy (obr. 29). Jedním průsečíkem kružnic k_1 a k_2 je bod M, druhý průsečík označme N. Protože body S_1, S_2 leží



Obr. 29

v polorovině ABC, leží v ní i bod N, neboť je souměrně sdružený s M podle středné S_1S_2. Naší úlohou je dokázat, že bod N leží na jedné kružnici s body A_1, B_1 a C.

Jak už víme, je trojúhelník BA_1M rovnoramenný, a protože je $|\sphericalangle BB_1M| = 90° - \alpha < \beta = |\sphericalangle BA_1M|$ (tato nerovnost je ekvivalentní tomu, že $\gamma < 90°$), leží bod B_1 vně kružnice k_2. To znamená, že kružnice k_2 musí protínat kružnici k_1 v tom jejím oblouku nad tětivou MB_1, který odpovídá obvodovému úhlu $180° - \alpha$. Analogicky zjistíme, že bod A_1 leží vně kružnice k_1, takže průsečík N leží na oblouku kružnice k_2 příslušného tětivě MA_1 a obvodovému úhlu $180° - \beta$. Protože zároveň

$$|\sphericalangle B_1NM| + |\sphericalangle A_1NM| = (180° - \alpha) + (180° - \beta) = 360° - (\alpha + \beta) = \\ = 180° + \gamma > 180°,$$

musí bod N ležet uvnitř trojúhelníku A_1B_1M (přímka A_1B_1 tedy odděluje body C a N). Protože $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (kde $\gamma = |\sphericalangle A_1CB_1|$), plyne odtud, že ve čtyřúhelníku A_1CB_1N je součet vnitřních úhlů u protilehlých vrcholů C a N roven $180°$, a tak je tento čtyřúhelník skutečně tětivový.

50 – B – I – 5

Určete všechny polynomy $P(x)$, které pro každé reálné číslo x splňují rovnost

$$P(2x) = 8P(x) + (x-2)^2.$$

(P. Černek)

Řešení. Stupeň polynomu P je aspoň dva. Nechť nejprve $P(x) = ax^2 + bx + c$. Dosazením tohoto vyjádření do vztahu v zadání dostáváme

$$4ax^2 + 2bx + c = (8a + 1)x^2 + (8b - 4)x + 8c + 4.$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x na levé a pravé straně dostaneme $4a = 8a + 1$, $2b = 8b - 4$ a $c = 8c + 4$. Odtud $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = -\frac{4}{7}$.

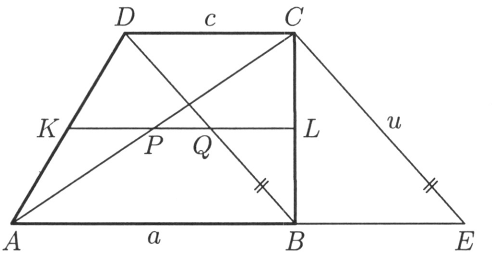
Je-li dále stupeň n polynomu P větší než dva, zjistíme analogicky, že jeho člen $a_n x^n$ s nejvyšší mocninou x splňuje vztah $2^n a_n = 8a_n$, tedy $n = 3$, přičemž $a_n \neq 0$ je libovolné. Koeficienty mnohočlenu P u mocnin x^2, x^1 a x^0 vyjdou stejně jako v předchozí situaci.

Celkový závěr: $P(x) = ax^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{4}{7}$, kde a je libovolné reálné číslo.

50 – C – I – 2

Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány délky 9 cm a 12 cm jeho úhlopříček, délka 8 cm střední příčky a vzdálenost 2 cm středů úhlopříček. (*E. Kováč*)

Řešení. Zvolme označení podle obr. 30, KP je střední příčka v trojúhelníku ACD,



Obr. 30

proto $|KP| = \frac{1}{2}|DC|$, obdobně $|QL| = \frac{1}{2}|DC|$, $|PL| = \frac{1}{2}|AB|$, takže $|PQ| = \frac{1}{2}(a - c) = 2\,\text{cm}$. Protože $|KL| = \frac{1}{2}(a + c) = 8\,\text{cm}$, je $a = 10\,\text{cm}$, $c = 6\,\text{cm}$. Nejdříve sestrojíme trojúhelník AEC podle věty *sss*, na úsečce AE pak bod B, jím vedeme rovnoběžku s CE. Ta protne přímku vedenou bodem C rovnoběžně s AE v bodě D.

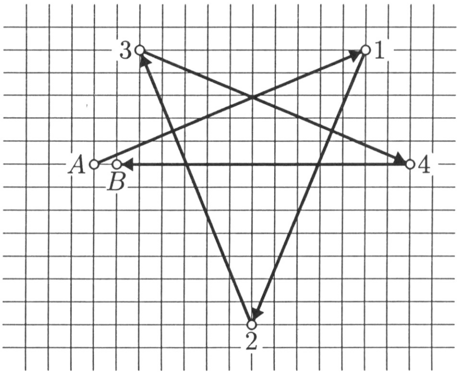
50 – Z8 – I – 5

Blecha se dostala na čtvercovou síť se čtverečky 1 cm × 1 cm. Rozhodla se, že bude skákat jen po uzlových bodech této sítě. Protože její šťastné číslo je 13, udělá vždy skok dlouhý jen 13 cm. Může se takto dostat do libovolného uzlového bodu?

(*P. Černek*)

Řešení. Blecha může skákat buď ve směru mřížových čar, nebo se může přesouvat do protějšího vrcholu obdélníku s rozměry 5 a 12 (podle Pythagorovy věty).

Blecha se může dostat do libovolného uzlového bodu, jestliže se může dostat do sousedního uzlového bodu. Do libovolného dalšího bodu se dostane potom sledem skoků. Do sousedního uzlového bodu se může dostat například podle obr. 31.



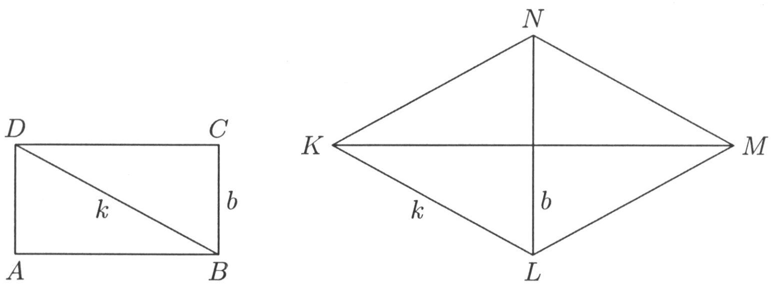
Obr. 31

Odpověď: Blecha se může dostat do libovolného uzlového bodu.

50 – Z7 – I – 5

Jedna ze stran obdélníku $ABCD$ je dvakrát kratší než jedna z úhlopříček kosočtverce $KLMN$. Jedna ze stran kosočtverce $KLMN$ je stejně dlouhá jako jedna z úhlopříček obdélníku $ABCD$. Kosočtverec $KLMN$ má obsah $36\,\mathrm{cm}^2$. Jak velký obsah má obdélník $ABCD$? (*S. Bednářová*)

Řešení. Úhlopříčka obdélníku dělí obdélník na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky, úhlopříčky kosočtverce ho dělí na čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky. Podle zadání je pravoúhlý trojúhelník v obdélníku shodný s pravoúhlým trojúhelníkem v kosočtverci podle věty Ssu (obr. 32). Obsah obdélníku je tak roven polovině obsahu kosočtverce, proto obsah obdélníku je $18\,\mathrm{cm}^2$.



Obr. 32