[dokumenty-12] Úlohy mezinárodních matematických olympiád

Úlohy

In: Karel Horák (editor); Vladimír Müller (editor); Antonín Vrba (editor): [dokumenty-12] Úlohy mezinárodních matematických olympiád. Sbírka řešených úloh 1.-25. MMO. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1986. pp. 11–41.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405402

ÚLOHY

1. MMO 1959

1. Dokažte, že zlomek

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}$$

nelze zkrátit pro žádné přirozené číslo n.

2. Zjistěte, pro která reálná čísla x platí

a) $\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = \sqrt{2}$,

b) $\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = 1$,

c) $\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = 2$.

3. Předpokládejme, že číslo $\cos x$ vyhovuje rovnici

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0,$$

kde a, b, c jsou daná reálná čísla. Napište kvadratickou rovnici, kterou splňuje číslo $\cos 2x$. Výsledek užijte na případ $a = 4$, $b = 2$, $c = -1$.

4. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC, je-li dána přepona $c = AB$, přičemž velikost těžnice příslušné k přeponě je rovna geometrickému průměru obou odvěsen.

5. V rovině je dána úsečka AB a uvnitř ní bod M. Nad úsečkami AM, BM sestrojme dva čtverce $AMCD$, $BMEF$ tak, aby ležely v téže polorovině určené přímkou AB. Těmto čtvercům opišme kružnice; ty se kromě bodu M protínají ještě v dalším bodě N.

a) Dokažte, že přímky AE, BC procházejí bodem N.

b) Dokažte, že přímka MN prochází určitým bodem nezávislým na volbě bodu M.

c) Určete množinu všech středů úseček, které spojují středy obou uvažovaných čtverců, probíhá-li bod M vnitřek úsečky AB.

6. Jsou dány dvě různoběžné roviny π, ϱ o průsečnici p. V rovině π je dán bod A a v rovině ϱ bod C, přičemž žádný z bodů A, C neleží na přímce p. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, kde $AB \parallel CD$, $B \in \pi$, $D \in \varrho$, jemuž lze vepsat kružnici.

2. MMO 1960

7. Najděte všechna trojciferná čísla, jejichž jedenáctina je rovna součtu druhých mocnin jejich číslic.

8. Určete všechna reálná čísla x, pro která platí nerovnost

$$\frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2} < 2x + 9.$$

9. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož přepona BC je rozdělena na n shodných úseček, kde n je liché číslo. Označme α úhel, pod kterým je z bodu A vidět tu z úseček, která obsahuje střed přepony daného trojúhelníku; dále označme a velikost přepony a h velikost příslušné výšky daného trojúhelníku. Dokažte, že

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4nh}{(n^2 - 1)a}.$$

10. Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány velikosti v_a, v_b výšek příslušných vrcholům A, B a velikost t_a těžnice příslušné vrcholu A.

11. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$.

a) Určete množinu všech středů úseček XY, kde X je bod úsečky AC a Y je bod úsečky $B'D'$.

b) Určete množinu všech bodů Z, které leží uvnitř úseček XY z úlohy a) a pro něž platí $|ZY| = 2|XZ|$.

12. Je dán rotační kužel, jemuž je vepsána kulová plocha tak, že se dotýká podstavy kužele. Této kulové ploše je opsán rotační válec, jehož jedna

podstava leží v rovině podstavy daného kužele. Označme V_1 objem kužele, V_2 objem válce.

a) Dokažte, že neplatí rovnost $V_1 = V_2$.

b) Určete nejmenší číslo k, pro které může nastat rovnost $V_1 = k V_2$; pro tento případ sestrojte úhel, pod kterým je z vrcholu kužele vidět průměr podstavy kužele.

13. Je dán rovnoramenný lichoběžník se základnami a, c a výškou v. Na ose souměrnosti tohoto lichoběžníku sestrojte bod P tak, aby z něho byla vidět obě ramena lichoběžníku pod pravými úhly. Dále vypočtěte vzdálenost bodu P od základen lichoběžníku. Rozhodněte, za jakých podmínek bod P existuje.

3. MMO 1961

14. Řešte soustavu rovnic

$$x + y + z = a,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2,$$
$$xy = z^2,$$

kde a, b jsou daná čísla. Udejte podmínky, které musí čísla a, b splňovat, aby řešení x, y, z byla kladná a navzájem různá.

15. Označme a, b, c délky stran trojúhelníku a S jeho obsah. Dokažte, že

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq 4\sqrt{3}\, S.$$

V kterém případě nastane rovnost?

16. Řešte rovnici

$$\cos^n x - \sin^n x = 1,$$

kde n je dané přirozené číslo.

17. Je dán trojúhelník $P_1P_2P_3$ a uvnitř něho bod P. Přímky P_1P, P_2P, P_3P protínají protější strany trojúhelníku v bodech Q_1, Q_2, Q_3. Dokažte, že z čísel

$$\frac{|P_1P|}{|PQ_1|}, \frac{|P_2P|}{|PQ_2|}, \frac{|P_3P|}{|PQ_3|}$$

alespoň jedno není větší než 2 a alespoň jedno není menší než 2.

18. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $|AC| = b$, $|AB| = c$ a úhel $|\sphericalangle AMB| = \omega$, kde M je střed úsečky BC. Dokažte, že pro $\omega < 90°$ má úloha řešení, právě když platí

$$b \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \leqq c < b.$$

V kterém případě nastane rovnost?

19. Je dána rovina ε a v jednom z poloprostorů jí určených tři body A, B, C, které neleží v přímce. Přitom rovina ABC není rovnoběžná s rovinou ε. V rovině ε zvolme tři libovolné body A', B', C'. Označme L, M, N středy úseček AA', BB', CC'; dále označme G těžiště trojúhelníku LMN (nebudeme uvažovat takové polohy bodů A', B', C', pro které příslušné body L, M, N netvoří vrcholy trojúhelníku). Určete množinu všech bodů G, probíhají-li body A', B', C' rovinu ε.

4. MMO 1962

20. Určete nejmenší přirozené číslo, které končí v desítkové soustavě číslicí 6, a přesuneme-li ji na začátek, dostaneme čtyřnásobek hledaného čísla.

21. Určete všechna reálná čísla x, která splňují nerovnost

$$\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1} > \frac{1}{2}.$$

22. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$. Proměnný bod X probíhá stálou rychlostí obvod čtverce $ABCD$ (v tomto směru), proměnný bod Y probíhá toutéž rychlostí obvod čtverce $B'C'CB$ (v tomto směru). Oba body X, Y se začnou pohybovat současně z výchozích poloh A a B'. Určete množinu všech středů Z úseček XY.

23. Řešte rovnici

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

24. Je dána kružnice k a na ní tři různé body A, B, C. Sestrojte na kružnici k bod D tak, aby vznikl čtyřúhelník $ABCD$, jemuž lze vepsat kružnici.

25. Je dán rovnoramenný trojúhelník. Kružnice jemu opsaná má poloměr R, kružnice vepsaná má poloměr r. Dokažte, že vzdálenost d středů těchto kružnic je

$$d = \sqrt{R(R - 2r)}.$$

26. Ke čtyřstěnu $ABCD$ existuje pět kulových ploch, z nichž každá se dotýká šesti přímek AB, BC, CA, AD, BD, CD, právě když je to pravidelný čtyřstěn. Dokažte.

5. MMO 1963

27. Najděte všechny reálné kořeny rovnice

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x,$$

kde p je reálný parametr.

28. Je dán bod A a úsečka BC. Určete množinu všech bodů v prostoru, které jsou vrcholy pravých úhlů, jejichž jedno rameno prochází bodem A a druhé rameno má s úsečkou BC společný aspoň jeden bod.

29. Předpokládejme, že všechny vnitřní úhly konvexního n-úhelníku jsou shodné a jeho po sobě následující strany mají délky

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n.$$

Pak je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Dokažte.

30. Určete všechna řešení x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_5 + x_2 &= yx_1, \\ x_1 + x_3 &= yx_2, \\ x_2 + x_4 &= yx_3, \\ x_3 + x_5 &= yx_4, \\ x_4 + x_1 &= yx_5, \end{aligned}$$

kde y je parametr.

31. Dokažte, že platí

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

32. Soutěže se zúčastnilo pět žáků A, B, C, D, E. Předpověď, že výsledné umístění bude ABCDE, se nesplnila: žádný soutěžící nebyl na předpovězeném místě a žádná dvojice bezprostředně za sebou následujících soutěžících nebyla předpovězena správně. Předpověď DAECB byla správnější: právě dva soutěžící byli na předpovězených místech a právě dvě dvojice bezprostředně za sebou následujících soutěžících byly předpovězeny správně. Určete výsledné umístění.

6. MMO 1964

33. a) Určete všechna přirozená čísla n, pro která je číslo $2^n - 1$ dělitelné sedmi.

b) Dokažte, že neexistuje žádné přirozené číslo n, pro které je číslo $2^n + 1$ dělitelné sedmi.

34. Jsou-li a, b, c délky stran trojúhelníku, potom platí

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leqq 3abc.$$

Dokažte.

35. Do trojúhelníku ABC se stranami a, b, c vepišme kružnici a sestrojme k ní další tři tečny rovnoběžné se stranami daného trojúhelníku. Každá z těchto tečen utíná z trojúhelníku ABC po jednom trojúhelníku. Do každého z těchto tří trojúhelníků vepišme kružnici. Vypočtěte součet obsahů všech čtyř vepsaných kruhů.

36. Sedmnáct osob si navzájem dopisuje, každá z nich se všemi ostatními. V celé korespondenci se vyskytují jen tři různá témata. Každá dvojice osob si dopisuje jen o jednom z těchto témat. Dokažte, že existují alespoň tři osoby, které si dopisují na totéž téma.

37. V rovině je dáno pět bodů. Mezi přímkami, které spojují vždy dva z těchto bodů, nejsou žádné dvě navzájem rovnoběžné nebo kolmé. Každým z daných bodů veďme kolmice ke všem spojnicím zbývajících čtyř bodů. Dokažte, že tyto kolmice se protínají nanejvýš v 315 bodech.

38. V daném čtyřstěnu $ABCD$ spojme vrchol D s těžištěm D_1 trojúhelníku ABC. Rovnoběžky s přímkou DD_1 vedené body A, B, C protínají roviny BCD, CAD, ABD v bodech A_1, B_1, C_1.

a) Dokažte, že objem čtyřstěnu $ABCD$ je roven třetině objemu čtyřstěnu $A_1B_1C_1D_1$.

b) Platí tento výsledek i v případě, kdy D_1 je libovolný bod uvnitř trojúhelníku ABC?

7. MMO 1965

39. Určete všechna čísla x z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$, která vyhovují nerovnicím

$$2 \cos x \leqq \left| \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} \right| \leqq \sqrt{2}.$$

40. Je dána soustava rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

s neznámými x_1, x_2, x_3. Její koeficienty a_{11}, a_{22}, a_{33} jsou kladné, všechny ostatní koeficienty jsou záporné a v každé z daných rovnic je součet všech tří koeficientů kladný. Dokažte, že soustava má jediné řešení $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

41. Je dán čtyřstěn $ABCD$, jehož hrany AB, CD mají délky a, b. Vzdálenost mimoběžek AB, CD je d, jejich odchylka je ω. Čtyřstěn $ABCD$ je rozdělen rovinou ε rovnoběžnou s přímkami AB, CD; poměr vzdáleností roviny ε od přímky AB a od přímky CD je roven k. Vypočtěte poměr objemů vzniklých těles.

42. Najděte všechny čtveřice reálných čísel x_1, x_2, x_3, x_4, pro něž platí, že součet každého z těchto čísel se součinem tří zbývajících je roven dvěma.

43. Je dán trojúhelník OAB s ostrým úhlem při vrcholu O. Bodem $M \neq O$ trojúhelníku OAB veďme kolmice k přímkám OA, OB a jejich paty označme P, Q; průsečík výšek trojúhelníku OPQ označme H. Určete množinu všech bodů H, probíhá-li bod M

a) stranu AB,

b) vnitřek trojúhelníku OAB.

44. V rovině je dána množina n bodů ($n \geqq 3$), přičemž každé dva jsou spojeny úsečkou. Označme d délku nejdelší z těchto úseček. Průměrem dané množiny nazveme každou z uvažovaných úseček, která má délku d. Dokažte, že daná množina má nejvýše n průměrů.

8. MMO 1966

45. V matematické soutěži byly dány tři úlohy A, B, C. Mezi účastníky bylo 25 žáků, z nichž každý vyřešil aspoň jednu úlohu. Ze všech účastníků, kteří nevyřešili úlohu A, byl počet těch, kteří vyřešili úlohu B, dvojnásobkem počtu těch, kteří vyřešili úlohu C. Počet žáků, kteří vyřešili jen úlohu A, byl o 1 větší než počet ostatních žáků, kteří vyřešili úlohu A. Ze všech žáků, kteří vyřešili jedinou úlohu, právě polovina nevyřešila úlohu A. Kolik žáků vyřešilo jen úlohu B?

46. Označme a, b, c délky stran trojúhelníku a α, β, γ velikosti protějších úhlů. Platí-li

$$a + b = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} (a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta),$$

pak je trojúhelník rovnoramenný. Dokažte.

47. Součet vzdáleností vrcholů pravidelného čtyřstěnu od středu kulové plochy jemu opsané je menší než součet vzdáleností těchto vrcholů od kteréhokoli jiného bodu prostoru. Dokažte.

48. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n a pro každé reálné číslo $x \neq \lambda \frac{\pi}{2^k}$, kde $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ a λ je celé, platí

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} 2^n x.$$

49. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{lllll}
 & |a_1 - a_2|x_2 + & |a_1 - a_3|x_3 + & |a_1 - a_4|x_4 & = 1, \\
|a_1 - a_2|x_1 & & + |a_2 - a_3|x_3 + & |a_2 - a_4|x_4 & = 1, \\
|a_1 - a_3|x_1 + & |a_2 - a_3|x_2 & & + |a_3 - a_4|x_4 & = 1, \\
|a_1 - a_4|x_1 + & |a_2 - a_4|x_2 + & |a_3 - a_4|x_3 & & = 1,
\end{array}$$

kde a_1, a_2, a_3, a_4 jsou čtyři daná navzájem různá reálná čísla.

50. Uvnitř stran AB, BC, CA trojúhelníku ABC zvolme body K, L, M. Dokažte, že obsah aspoň jednoho z trojúhelníků MAK, KBL, LCM je menší nebo rovný čtvrtině obsahu trojúhelníku ABC.

9. MMO 1967

51. Předpokládejme, že strany rovnoběžníku $ABCD$ mají velikosti $|AB| = a$, $|AD| = 1$, úhel DAB má velikost α a trojúhelník ABD je ostroúhlý. Pak jednotkové kruhy se středy A, B, C, D pokrývají rovnoběžník $ABCD$, právě když

$$a \leqq \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha.$$

Dokažte.

52. Má-li jediná hrana čtyřstěnu délku větší než 1, pak je jeho objem nejvýše roven $\frac{1}{8}$. Dokažte.

53. Buďte k, m, n přirozená čísla taková, že $m + k + 1$ je prvočíslo větší než $n + 1$. Označme $c_s = s(s + 1)$. Pak součin

$$(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k) \ldots (c_{m+n} - c_k)$$

je dělitelný součinem $c_1 c_2 \ldots c_n$. Dokažte.

54. Jsou dány dva ostroúhlé trojúhelníky $A_0B_0C_0$ a $A_1B_1C_1$. Uvažujme trojúhelníky ABC podobné trojúhelníku $A_1B_1C_1$ a opsané trojúhelníku $A_0B_0C_0$ tak, že body C_0, A_0, B_0 leží na stranách AB, BC, CA. Sestrojte trojúhelník, který má ze všech takovýchto trojúhelníků ABC největší obsah.

55. Je dána posloupnost

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + a_2 + \ldots + a_8, \\ c_2 &= a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_8^2, \\ &\ldots \\ c_n &= a_1^n + a_2^n + \ldots + a_8^n, \\ &\ldots \end{aligned}$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_8$ jsou reálná čísla ne všechna rovná nule. Předpokládejme, že nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{c_n\}$ je rovno nule. Určete všechna přirozená čísla n, pro která je $c_n = 0$.

56. Při sportovní soutěži bylo rozděleno v n po sobě jdoucích dnech ($n > 1$) celkem m medailí. Prvního dne byla udělena 1 medaile a sedmina ze zbývajících $m - 1$ medailí. Druhého dne byly uděleny 2 medaile a sedmina ze zbývajících, atd. Posledního dne bylo uděleno posledních n medailí. Kolik dní trvala soutěž a kolik medailí bylo celkem rozděleno?

10. MMO 1968

57. Dokažte, že existuje jediný trojúhelník, jehož strany jsou tři po sobě jdoucí přirozená čísla a jehož jeden úhel je dvojnásobkem druhého.

58. Najděte všechna přirozená čísla x taková, že součin číslic v jejich dekadickém zápisu je roven $x^2 - 10x - 22$.

59. Je dána soustava rovnic s neznámými $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{aligned}
ax_1^2 + bx_1 + c &= x_2,\\
ax_2^2 + bx_2 + c &= x_3,\\
&\ldots\\
ax_{n-1}^2 + bx_{n-1} + c &= x_n,\\
ax_n^2 + bx_n + c &= x_1,
\end{aligned}$$

kde a, b, c jsou reálná čísla, $a \neq 0$. Dokažte, že tato soustava

a) nemá žádné reálné řešení, jestliže $(b - 1)^2 - 4ac < 0$;

b) má právě jedno reálné řešení, jestliže $(b - 1)^2 - 4ac = 0$;

c) má více než jedno reálné řešení, jestliže $(b - 1)^2 - 4ac > 0$.

60. Dokažte, že v každém čtyřstěnu existuje takový vrchol, že z úseček shodných s hranami, které z něho vycházejí, lze sestrojit trojúhelník.

61. Je dáno kladné číslo a a reálná funkce f definovaná pro všechna reálná čísla. Předpokládejme, že pro každé x platí

$$f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2}.$$

a) Dokažte, že funkce f je periodická (tj. existuje kladné číslo b takové, že $f(x + b) = f(x)$ pro všechna x).

b) Udejte pro $a = 1$ příklad nekonstantní funkce f s uvedenými vlastnostmi.

62. Pro každé přirozené číslo n vypočtěte součet

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right],$$

kde $[x]$ značí celou část čísla x.

11. MMO 1969

63. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel a takových, že číslo $n^4 + a$ je složené pro každé přirozené n.

64. Jsou dána reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Uvažujme funkci

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2}\cos(a_2 + x) + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n + x).$$

Je-li $f(x_1) = f(x_2) = 0$, pak je $\dfrac{x_2 - x_1}{\pi}$ celé číslo. Dokažte.

65. Pro každé číslo $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ řešte úlohu: Určete nutné a postačující podmínky pro kladné číslo a, aby existoval čtyřstěn, jehož k hran má délku a a ostatních $6 - k$ hran má délku 1.

66. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB a opsanou kružnicí k. Označme D patu výšky vedené z vrcholu C na přeponu, k_1 kružnici vepsanou trojúhelníku ABC, k_2, k_3 dvě navzájem různé kružnice, z nichž každá se dotýká přímek AB, CD, leží v polorovině ABC a dotýká se zevnitř kružnice k. Dokažte, že kružnice k_1, k_2, k_3 mají kromě přímky AB ještě další společnou tečnu.

67. V rovině je dáno n bodů ($n > 4$), z nichž žádné tři neleží v přímce. Potom existuje aspoň $\frac{1}{2}(n - 3)(n - 4)$ různých konvexních čtyřúhelníků se všemi vrcholy v daných bodech. Dokažte.

68. Jsou-li $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ reálná čísla, pro něž platí $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1y_1 - z_1^2 > 0$, $x_2y_2 - z_2^2 > 0$, potom je

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leqq \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost.

12. MMO 1970

69. Uvnitř strany AB trojúhelníku ABC je dán bod M. Označme r_1, r_2, r poloměry kružnic vepsaných trojúhelníkům ACM, BCM, ABC. Označme dále ϱ_1, ϱ_2, ϱ poloměry kružnic, které jsou připsány týmž trojúhelníkům a leží v úhlu ACB. Dokažte, že platí

$$\frac{r_1r_2}{\varrho_1\varrho_2} = \frac{r}{\varrho}.$$

70. Buďte a, b, n přirozená čísla větší než 1 a nechť čísla A_n, B_n mají totéž vyjádření $x_nx_{n-1}\ldots x_1x_0$ v číselných soustavách o základech a, b, přičemž $x_{n-1} \neq 0$, $x_n \neq 0$. Čísla, která dostaneme z A_n, B_n vynecháním číslice x_n, označme A_{n-1}, B_{n-1}. Dokažte, že je $a > b$, právě když

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

71. Každé posloupnosti $\{a_n\}_0^\infty$, kde

$$1 = a_0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots, \tag{1}$$

přiřaďme posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$ definovanou vzorcem

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}.$$

Dokažte:

a) Pro všechna přirozená čísla n platí

$$0 \leqq b_n < 2.$$

b) Pro každé číslo $c \in \langle 0,2)$ existuje taková posloupnost $\{a_n\}$ splňující (1), že v odpovídající posloupnosti $\{b_n\}$ je $b_n > c$ pro nekonečně mnoho indexů n.

72. Určete všechna přirozená čísla n s touto vlastností: Množinu $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ lze rozdělit na dvě disjunktní podmnožiny tak, že součin všech prvků jedné podmnožiny je roven součinu všech prvků druhé podmnožiny.

73. Předpokládejme, že pata E výšky DE čtyřstěnu $ABCD$ je zároveň průsečíkem výšek trojúhelníku ABC a že $BD \perp CD$. Dokažte, že potom platí

$$(|AB| + |BC| + |CA|)^2 \leqq 6\,(|AD|^2 + |BD|^2 + |CD|^2).$$

Určete, pro které z uvažovaných čtyřstěnů zde nastane rovnost.

74. V rovině je dáno 100 bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Uvažujme všechny trojúhelníky, jejichž každý vrchol je některý z daných bodů. Dokažte, že nejvýše 70 % těchto trojúhelníků jsou trojúhelníky ostroúhlé.

13. MMO 1971

75. Dokažte, že následující tvrzení platí pro $n = 3$ a $n = 5$ a neplatí pro žádné jiné přirozené číslo $n > 2$:

Jsou-li $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reálná čísla, pak

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \ldots (a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \ldots (a_2 - a_n) + \\ + \ldots + (a_n - a_1)(a_n - a_2) \ldots (a_n - a_{n-1}) \geqq 0.$$

76. Je dán konvexní mnohostěn P_1, který má právě devět vrcholů $A_1, A_2, \ldots, A_9$. Pro $i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ označme P_i mnohostěn, který vznikne z P_1 rovnoběžným posunutím, při němž bod A_1 přejde do bodu A_i. Dokažte, že aspoň dva z mnohostěnů $P_1, P_2, \ldots, P_9$ mají společný vnitřní bod.

77. Dokažte, že posloupnost $\{2^n - 3\}$ obsahuje nekonečně mnoho čísel, z nichž každá dvě jsou nesoudělná.

78. Předpokládejme, že všechny stěny čtyřstěnu $ABCD$ jsou ostroúhlé trojúhelníky. Uvažujme všechny uzavřené lomené čáry $XYZTX$, kde X, Y, Z, T jsou vnitřní body hran AB, BC, CD, DA. Dokažte:

a) Je-li $|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle BCD| \neq |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA|$,
potom mezi těmito lomenými čarami neexistuje nejkratší.

b) Jeli $|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA|$,
potom existuje nekonečně mnoho lomených čar minimální délky a tato délka je rovna $2|AC| \sin \frac{\alpha}{2}$, kde $\alpha = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle DAB|$.

79. Dokažte, že pro každé přirozené číslo m existuje neprázdná konečná množina S bodů v rovině taková, že ke každému bodu $A \in$ S existuje v S právě m bodů, jejichž vzdálenost od A se rovná jedné.

80. Uvažujme čtvercovou tabulku

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots\ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}$$

sestavenou z nezáporných celých čísel a vyhovující následující podmínce: jestliže $a_{ij} = 0$, potom platí nerovnost

$$a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in} + a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{nj} \geqq n.$$

Dokažte, že pro součet s všech čísel tabulky platí $s \geqq \frac{1}{2} n^2$.

14. MMO 1972

81. Dokažte, že libovolná množina deseti dvojciferných přirozených čísel má dvě neprázdné disjunktní podmnožiny takové, že součty jejich prvků jsou stejné.

82. Dokažte, že pro $n \geqq 4$ lze každý tětivový čtyřúhelník rozdělit na n tětivových čtyřúhelníků.

83. Pro každá dvě celá nezáporná čísla m, n je

$$\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!}$$

celé číslo. Dokažte.

84. Najděte všechny pětice x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 kladných reálných čísel, pro něž platí

$$\begin{aligned}
(x_1^2 - x_3x_5)\,(x_2^2 - x_3x_5) &\leqq 0,\\
(x_2^2 - x_4x_1)\,(x_3^2 - x_4x_1) &\leqq 0,\\
(x_3^2 - x_5x_2)\,(x_4^2 - x_5x_2) &\leqq 0,\\
(x_4^2 - x_1x_3)\,(x_5^2 - x_1x_3) &\leqq 0,\\
(x_5^2 - x_2x_4)\,(x_1^2 - x_2x_4) &\leqq 0.
\end{aligned}$$

85. Nechť f a g jsou reálné funkce takové, že pro všechna reálná x a y platí

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)g(y).$$

Dokažte: Jestliže f není identicky rovna nule a jestliže $|f(x)| \leqq 1$ pro všechna x, potom také $|g(x)| \leqq 1$ pro všechna x.

86. Jsou dány čtyři navzájem různé rovnoběžné roviny. Dokažte, že existuje pravidelný čtyřstěn, který má v každé z daných rovin jeden vrchol.

15. MMO 1973

87. Na přímce p je dán bod O. Všechny koncové body $P_1, P_2, \ldots, P_n$ jednotkových vektorů $OP_1, OP_2, \ldots, OP_n$ leží v téže polorovině ohraničené přímkou p. Dokažte, že pak pro lichá n platí

$$|OP_1 + OP_2 + \ldots + OP_n| \geqq 1.$$

88. Rozhodněte, existuje-li v trojrozměrném prostoru konečná množina M bodů neležících v jedné rovině, která má následující vlastnost: Ke každým dvěma bodům $A, B \in \mathsf{M}$ existují body $C, D \in \mathsf{M}$ tak, že přímky AB a CD jsou rovnoběžné a nesplývají.

89. Najděte nejmenší hodnotu součtu $a^2 + b^2$, jsou-li a, b reálná čísla, pro něž má rovnice

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

aspoň jeden reálný kořen.

90. Ženista má prověřit, vyskytují-li se miny na pozemku tvaru rovnostranného trojúhelníku (včetně jeho hranice). K dispozici má detektor, jehož poloměr účinnosti se rovná poloviční výšce trojúhelníku. Na průzkum vychází z některého vrcholu trojúhelníku. Jakou cestu má zvolit, aby prošel co nejkratší vzdálenost a prozkoumal přitom celý pozemek?

91. Uvažujme neprázdnou množinu G nekonstantních funkcí f reálné proměnné x tvaru $f(x) = ax + b$, kde $a \neq 0$, b jsou reálná čísla, s následujícími vlastnostmi:

a) je-li f, $g \in G$, pak $g \circ f \in G$, kde $(g \circ f)(x) = g(f(x))$,

b) je-li $f \in G$, $f(x) = ax + b$, potom též inverzní funkce $f^{-1} \in G$; přitom $f^{-1}(x) = \dfrac{x - b}{a}$,

c) ke každé funkci $f \in G$ existuje x_f tak, že $f(x_f) = x_f$.

Dokažte, že existuje takové y, že $f(y) = y$ pro všechny $f \in G$.

92. Je dáno n kladných reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a reálné číslo $q \in (0, 1)$. Najděte n reálných čísel $b_1, b_2, \ldots, b_n$ s těmito třemi vlastnostmi:

a) $a_k < b_k$ pro všechna $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

b) $q < \dfrac{b_{k+1}}{b_k} < \dfrac{1}{q}$ pro všechna $k \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}$,

c) $b_1 + b_2 + \ldots + b_n < \dfrac{1 + q}{1 - q}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$.

16. MMO 1974

93. Tři hráči A, B, C hrají hru se třemi kartami. Na každé z karet je celé číslo: na prvé p, na druhé q, na třetí r, přičemž platí $0 < p < q < r$. Při každém kole hry se karty zamíchají a každý hráč dostane jednu. Potom kartu vrátí a dostane za ni tolik kuliček, kolik udává na ní napsané číslo. Hra trvala N kol, $N \geqq 2$. Na konci hry měl hráč A celkem 20 kuliček, hráč B 10 a hráč C 9 kuliček. V posledním kole hráč B dostal r kuliček. Určete, který z hráčů dostal v prvém kole q kuliček.

94. Označme velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC obvyklým způsobem α, β, γ. Na úsečce AB existuje bod D tak, že $|CD| = \sqrt{|AD| \cdot |BD|}$, právě když

$$\sin\alpha \sin\beta \leqq \sin^2 \frac{\gamma}{2}\,.$$

Dokažte.

95. Dokažte, že pro žádné přirozené číslo n není číslo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$$

dělitelné pěti.

96. Uvažujme dělení šachovnice s 8×8 poli na nepřekrývající se obdélníky, které se skládají ze stejného počtu černých a bílých polí. Najděte největší číslo p, pro které lze šachovnici rozdělit na p takovýchto obdélníků, z nichž žádné dva neobsahují stejný počet polí. Pro toto maximální p určete všechny možnosti pro počty polí v obdélnících příslušného dělení.

97. Určete množinu všech hodnot, jichž nabývá součet

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d},$$

jsou-li a, b, c, d libovolná kladná reálná čísla.

98. Nechť P je nekonstantní mnohočlen s celočíselnými koeficienty. Označme $\deg(P)$ jeho stupeň a $n(P)$ počet všech celých čísel k, pro něž platí $(P(k))^2 = 1$. Dokažte, že

$$n(P) - \deg(P) \leqq 2.$$

17. MMO 1975

99. Jsou dána reálná čísla

$$x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_n,$$
$$y_1 \geqq y_2 \geqq \ldots \geqq y_n.$$

Dokažte, že pro libovolné pořadí $z_1, z_2, \ldots, z_n$ čísel $y_1, y_2, \ldots, y_n$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2.$$

100. Nechť $\{a_n\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Dokažte, že nekonečně mnoho členů a_m této posloupnosti lze vyjádřit ve tvaru

$$a_m = xa_p + ya_q,$$

kde x, y jsou přirozená čísla a $p \neq q$.

101. Je dán trojúhelník ABC. Vně tohoto trojúhelníku sestrojme (v téže rovině) trojúhelníky ARB, BPC, CQA takové, že

$$\begin{aligned} |\sphericalangle PBC| &= |\sphericalangle CAQ| = 45^\circ, \\ |\sphericalangle BCP| &= |\sphericalangle QCA| = 30^\circ, \\ |\sphericalangle ABR| &= |\sphericalangle BAR| = 15^\circ. \end{aligned}$$

Dokažte, že $|PR| = |QR|$ a $|\sphericalangle PRQ| = 90^\circ$.

102. Jako A označme součet číslic čísla 4444^{4444} a jako B součet číslic čísla A. Určete součet číslic čísla B (všechna čísla jsou zapsána v desítkové soustavě).

103. Zjistěte, zda na kružnici s poloměrem 1 existuje 1975 bodů takových, že délky všech jimi určených tětiv jsou racionální čísla.

104. Je dáno přirozené číslo n. Najděte všechny mnohočleny P dvou proměnných s těmito třemi vlastnostmi:

a) P je homogenní mnohočlen stupně n, tzn. že pro všechna reálná čísla t, x, y platí

$$P(tx, ty) = t^n P(x, y),$$

b) pro všechna reálná čísla a, b, c platí

$$P(a + b, c) + P(a + c, b) + P(b + c, a) = 0,$$

c) $P(1, 0) = 1$.

18. MMO 1976

105. V konvexním rovinném čtyřúhelníku o obsahu 32 cm^2 je součet délek dvou protilehlých stran a jedné úhlopříčky roven 16 cm. Určete všechny možné délky druhé úhlopříčky.

106. Nechť
$$P_1(x) = x^2 - 2$$
a pro $j \in \{2, 3, 4, \ldots\}$ je
$$P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x)).$$
Dokažte, že pro každé přirozené n jsou všechny kořeny rovnice
$$P_n(x) = x$$
reálné a různé.

107. Krabici ve tvaru kvádru lze zcela vyplnit krychlemi o objemu 1. Vložíme-li do ní co nejvíce krychlí o objemu 2 tak, aby hrany krychlí byly rovnoběžné s hranami krabice, vyplníme právě 40 % prostoru krabice. Určete vnitřní rozměry všech krabic s touto vlastností.

108. Určete největší hodnotu, kterou může nabýt součin několika přirozených čísel, jejichž součet je 1 976.

109. Je dána soustava p rovnic o $q = 2p$ neznámých
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1q}x_q &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2q}x_q &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pq}x_q &= 0 \end{aligned}$$
s koeficienty $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, p\}, j \in \{1, 2, \ldots, q\}$. Dokažte, že tato soustava má řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ s těmito třemi vlastnostmi:

a) všechna čísla $x_1, x_2, \ldots, x_q$ jsou celá,

b) $x_j \neq 0$ pro alespoň jedno $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$,

c) $|x_j| \leqq q$ pro všechna $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$.

110. Posloupnost $\{u_n\}$ je definována vztahy

$$u_0 = 2,\ u_1 = \frac{5}{2},$$
$$u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1 \text{ pro } n \geqq 1.$$

Dokažte, že pro všechna $n \geqq 1$ platí

$$[u_n] = 2^{(2^n - (-1)^n)/3}.$$

19. MMO 1977

111. Uvnitř daného čtverce $ABCD$ sestrojme rovnostranné trojúhelníky ABK, BCL, CDM, DAN. Dokažte, že středy čtyř úseček KL, LM, MN, NK spolu se středy osmi úseček AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN jsou vrcholy pravidelného dvanáctiúhelníku.

112. V konečné posloupnosti reálných čísel je součet každých sedmi za sebou následujících členů záporný a součet každých jedenácti za sebou následujících členů kladný. Určete, kolik může mít taková posloupnost nejvýše členů.

113. Je dáno přirozené číslo $n > 2$. Označme V_n množinu $\{1 + n, 1 + 2n, 1 + 3n, \ldots\}$. Číslo $c \in V_n$ nazveme nerozložitelným ve V_n, neexistují-li čísla p, $q \in V_n$ taková, že $c = pq$. Dokažte, že existuje číslo $r \in V_n$, které lze vyjádřit jako součin čísel nerozložitelných ve V_n více než jedním způsobem (rozklady lišící se jen pořadím faktorů se považují za stejné).

114. Uvažujme funkci

$$f(x) = 1 - a \cos x - b \sin x - A \cos 2x - B \sin 2x,$$

kde a, b, A, B jsou daná reálná čísla. Je-li $f(x) \geqq 0$ pro každé reálné x, potom

$$a^2 + b^2 \leqq 2 \quad \text{a} \quad A^2 + B^2 \leqq 1.$$

Dokažte.

115. Jsou-li dána přirozená čísla a, b, označme q podíl a r zbytek při dělení čísla $a^2 + b^2$ číslem $a + b$. Najděte všechny dvojice a, b, pro které je $q^2 + r = 1977$.

116. Nechť f je funkce zobrazující množinu všech přirozených čísel do sebe. Jestliže pro každé přirozené číslo n platí

$$f(n + 1) > f(f(n)),$$

potom $f(n) = n$ pro každé přirozené číslo n. Dokažte.

20. MMO 1978

117. Najděte přirozená čísla m, n tak, aby dekadické zápisy čísel 1978^m a 1978^n končily stejným trojčíslím a součet $m + n$ byl přitom nejmenší.

118. Je dána kulová plocha a uvnitř pevný bod P. Nechť A, B, C jsou libovolné body ležící na dané kulové ploše takové, že úsečky PA, PB, PC jsou navzájem kolmé. Určete množinu všech bodů Q, kde PQ je tělesová úhlopříčka kvádru s hranami PA, PB, PC.

119. Množina všech přirozených čísel nechť je sjednocením dvou disjunktních podmnožin

$$\{f(1), f(2), f(3), \ldots\} \text{ a } \{g(1), g(2), g(3), \ldots\},$$

přičemž

$$f(1) < f(2) < f(3) < \ldots,$$
$$g(1) < g(2) < g(3) < \ldots$$

a

$$g(n) = f(f(n)) + 1$$

pro všechna n. Určete $f(240)$.

120. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC. Uvažujme kružnici, která se dotýká zevnitř kružnice opsané trojúhelníku ABC a ramen AB, AC v bodech P, Q. Dokažte, že střed úsečky PQ je středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

121. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost navzájem různých přirozených čísel. Potom pro každé přirozené n platí

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Dokažte.

122. Členové mezinárodní společnosti jsou občané šesti zemí. Seznam členů této společnosti obsahuje 1978 jmen očíslovaných 1, 2, ..., 1978. Dokažte, že existuje alespoň jeden člen společnosti, jehož pořadové číslo v tomto seznamu se rovná buď součtu pořadových čísel dvou členů z jeho země, nebo dvojnásobku pořadového čísla jednoho člena z jeho země.

21. MMO 1979

123. Nechť p a q jsou přirozená čísla taková, že

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Dokažte, že p je dělitelné číslem 1979.

124. Je dán pětiboký hranol se základnami $A_1A_2A_3A_4A_5$ a $B_1B_2B_3B_4B_5$. Všechny hrany obou základen a všechny úsečky A_jB_k, $j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, obarvíme červenou nebo zelenou barvou tak, aby žádný trojúhelník, jehož vrcholy jsou vrcholy hranolu a jehož všechny strany byly obarveny, nebyl jednobarevný. Dokažte, že všech deset hran obou základen má stejnou barvu.

125. V rovině jsou dány dvě protínající se kružnice k_1, k_2. Označme A jeden z jejich průsečíků. Po kružnici k_1, resp. k_2, se pohybují body B_1, resp. B_2, ve stejném smyslu konstantními rychlostmi tak, že se při každém oběhu setkávají v bodě A. Dokažte, že v rovině existuje pevný bod P, pro který v každém okamžiku platí $|PB_1| = |PB_2|$.

126. Je dána rovina π, bod $P \in \pi$ a bod $Q \notin \pi$. Najděte všechny body $R \in \pi$, pro něž je podíl $\dfrac{|PQ| + |PR|}{|QR|}$ největší.

127. Najděte všechna reálná čísla b, pro něž existují nezáporná reálná čísla x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 taková, že platí

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = b, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = b^2, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = b^3.$$

128. Po vrcholech pravidelného osmiúhelníku $ABCDEFGH$ skáče klokan. Každým skokem se přemisťuje z jednoho vrcholu do některého ze dvou sousedních; začíná v A a zastaví se, jakmile se poprvé dostane do E. Označme a_n počet všech cest z A do E složených z právě n skoků. Dokažte, že pro všechna přirozená k platí

$$a_{2k-1} = 0, \qquad a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(2 + \sqrt{2})^{k-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,(2 - \sqrt{2})^{k-1}.$$

22. MMO 1981

129. Je-li P vnitřní bod daného trojúhelníku ABC, označme D, E, F paty kolmic vedených z P na přímky BC, CA, AB. Najděte všechny body P, pro které je součet $\dfrac{|BC|}{|PD|} + \dfrac{|CA|}{|PE|} + \dfrac{|AB|}{|PF|}$ nejmenší.

130. Nechť $r \leqq n$ jsou přirozená čísla. Utvořme všechny r-prvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Z každé z nich vezměme její nejmenší prvek a označme $F(n, r)$ aritmetický průměr všech takto získaných čísel. Dokažte, že

$$F(n, r) = \frac{n + 1}{r + 1}.$$

131. Určete největší hodnotu výrazu $m^2 + n^2$, kde m a n jsou přirozená čísla taková, že

$$(n^2 - mn - m^2)^2 = 1, \ m \leqq 1981, \ n \leqq 1981.$$

132. a) Pro která přirozená čísla $n > 2$ existuje n po sobě jdoucích přirozených čísel tak, že největší z nich je dělitelem nejmenšího společného násobku ostatních $n - 1$ čísel?

b) Pro které n existuje právě jedna taková n-tice?

133. Uvažujme tři shodné kružnice, které mají společný bod O, leží uvnitř daného trojúhelníku ABC a každá z nich se dotýká dvou stran tohoto trojúhelníku. Dokažte, že bod O, střed kružnice vepsané a střed kružnice opsané trojúhelníku ABC leží na jedné přímce.

134. Je dána funkce $f(x, y)$ splňující podmínky

$$f(0, y) = y + 1,$$
$$f(x + 1, 0) = f(x, 1),$$
$$f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$$

pro všechna nezáporná x, y. Určete $f(4, 1\,981)$.

23. MMO 1982

135. Uvažujme funkci f zobrazující množinu všech přirozených čísel do množiny všech celých nezáporných čísel. Předpokládejme, že

$$f(2) = 0, \ f(3) > 0, \ f(9999) = 3333$$

a že rozdíl $f(m + n) - f(m) - f(n)$ nabývá pro libovolná přirozená čísla m, n hodnoty 0 nebo 1. Určete $f(1982)$.

136. Je dán nerovnoramenný trojúhelník $A_1A_2A_3$. Pro $i \in \{1, 2, 3\}$ označme a_i jeho stranu protilehlou vrcholu A_i, M_i střed strany a_i, T_i bod dotyku strany a_i a kružnice vepsané trojúhelníku $A_1A_2A_3$, S_i bod souměrně sdružený s bodem T_i podle osy vnitřního úhlu daného trojúhelníku při vrcholu A_i. Dokažte, že přímky M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 mají společný bod.

137. Uvažujme nerostoucí posloupnosti $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ kladných čísel, pro které platí $x_0 = 1$.

a) Dokažte, že pro každou takovou posloupnost existuje index $n \geqq 1$ tak, že platí

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geqq 3{,}999.$$

b) Najděte mezi uvažovanými posloupnostmi takovou, která pro všechna $n \geqq 1$ splňuje nerovnost

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4.$$

138. Je dáno přirozené číslo n. Má-li rovnice

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$$

celočíselné řešení (x, y), pak má alespoň tři celočíselná řešení. Dokažte. Ukažte, že pro $n = 2\,891$ rovnice nemá celočíselné řešení.

139. Na úhlopříčkách AC, CE pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$ jsou dány body M, N tak, že

$$\frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|CN|}{|CE|} = \lambda.$$

Určete dělicí poměr λ, leží-li body B, M, N v přímce.

140. Ve čtverci Q o straně 100 leží lomená neuzavřená a neprotínající se čára L. Předpokládejme, že ke každému bodu P hranice čtverce Q existuje na čáře L bod, jehož vzdálenost od bodu P není větší než $\frac{1}{2}$. Dokažte, že na čáře L pak existují dva body, jejichž vzdálenost není větší než 1, a přitom délka části čáry jimi omezená není menší než 198.

24. MMO 1983

141. Najděte všechny funkce f, které zobrazují množinu všech kladných čísel do sebe a přitom splňují následující dvě podmínky:

a) $f(xf(y)) = yf(x)$ pro libovolná kladná x, y,

b) $f(x) \to 0$ pro $x \to +\infty$.

142. V rovině jsou dány protínající se kružnice k_1, k_2 se středy O_1, O_2. Označme A jeden z jejich společných bodů. Nechť jedna ze dvou společných tečen se dotýká kružnic k_1, k_2 v bodech P_1, P_2, druhá v bodech Q_1, Q_2. Označme M_1, M_2 středy úseček P_1Q_1, P_2Q_2. Dokažte, že

$$|\sphericalangle O_1AO_2| = |\sphericalangle M_1AM_2|.$$

143. Nechť a, b, c jsou po dvou nesoudělná přirozená čísla. Dokažte, že

$$2abc - ab - bc - ca$$

je největší celé číslo, které se nedá vyjádřit ve tvaru

$$xbc + yca + zab,$$

kde x, y, z jsou nezáporná celá čísla.

144. Označme E množinu všech bodů na obvodu daného rovnostranného trojúhelníku. Rozhodněte, zda pro každý rozklad množiny E na dvě podmnožiny existuje pravoúhlý trojúhelník, jehož všechny tři vrcholy leží v jedné z obou podmnožin.

145. Existuje 1983 různých přirozených čísel nepřevyšujících 10^5 tak, aby žádná tři z nich nebyla bezprostředně po sobě jdoucími členy aritmetické posloupnosti?

146. Jsou-li a, b, c délky stran trojúhelníku, pak

$$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geqq 0.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost.

25. MMO 1984

147. Jsou dána nezáporná reálná čísla x, y, z taková, že $x + y + z = 1$. Dokažte, že

$$0 \leqq xy + yz + zx - 2xyz \leqq \frac{7}{27}.$$

148. Najděte dvě přirozená čísla a, b tak, aby žádné z čísel a, b, $a + b$ nebylo dělitelné sedmi a aby číslo $(a + b)^7 - a^7 - b^7$ bylo dělitelné 7^7.

149. V rovině jsou dány dva body $O \neq A$. Pro každý bod $X \neq O$ v rovině označme $\alpha(X)$ velikost orientovaného úhlu AOX měřeného v radiánech proti směru hodinových ručiček ($0 \leqq \alpha(X) < 2\pi$) a $C(X)$ kružnici se středem O a poloměrem $|OX| + \dfrac{\alpha(X)}{|OX|}$. Předpokládejme, že každý bod roviny je obarven některou z konečného počtu barev. Dokažte, že existuje bod X, pro který je $\alpha(X) > 0$, a přitom jeho barva se vyskytuje na kružnici $C(X)$.

150. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník takový, že kružnice s průměrem AB se dotýká přímky CD. Dokažte, že kružnice s průměrem CD se dotýká přímky AB, právě když strany BC a AD jsou rovnoběžné.

151. Pro $n > 3$ označme d součet délek všech úhlopříček konvexního n-úhelníku a p jeho obvod. Dokažte, že

$$n - 3 < \frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2.$$

152. Nechť $a < b < c < d$ jsou lichá přirozená čísla taková, že $ad = bc$ a $a + d = 2^k$, $b + c = 2^m$ pro nějaká přirozená čísla k, m. Dokažte, že $a = 1$.