Řešení úloh

In: Karel Horák (editor); Vladimír Müller (editor); Antonín Vrba (editor): [dokumenty-12] Úlohy mezinárodních matematických olympiád. Sbírka řešených úloh 1.-25. MMO. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1986. pp. 43–301.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405403

ŘEŠENÍ ÚLOH

1. Protože

$$3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 1,$$

každý společný dělitel čísel $14n + 3$, $21n + 4$ dělí číslo 1. Čitatel a jmenovatel jsou tedy nesoudělná čísla.

2. Řešme rovnici

$$\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = a, \qquad (1)$$

kde a je dané kladné číslo. Snadno zjistíme, že všechny odmocniny mají smysl (tj. výrazy pod nimi mají nezápornou hodnotu), právě když $x \geqq \frac{1}{2}$. Za tohoto předpokladu obě strany rovnice umocníme a dostaneme ekvivalentní rovnici

$$2x + 2\sqrt{(x - 1)^2} = a^2,$$

neboli

$$2x + 2|x - 1| = a^2. \qquad (2)$$

Je-li $x \geqq 1$, můžeme rovnici (2) psát ve tvaru

$$2x + 2(x - 1) = a^2$$

a vidíme, že má jediné řešení

$$x = \frac{a^2 + 2}{4},$$

pokud $a \geqq \sqrt{2}$. Je-li $\frac{1}{2} \leqq x < 1$, můžeme rovnici (2) psát ve tvaru

$$2x + 2(1 - x) = a^2,$$

neboli

$$a^2 - 2 = 0.$$

Pro $a = \sqrt{2}$ tedy rovnici (2) vyhovují všechna $x \in \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right)$, pro $a \neq \sqrt{2}$ žádné $x \in \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right)$.

Závěr. Pro $a < \sqrt{2}$ nemá rovnice (1) řešení, pro $a = \sqrt{2}$ jí vyhovují všechna $x \in \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle$ a pro $a > \sqrt{2}$ má jediné řešení $x = \frac{a^2 + 2}{4}$. Rovnice b) tedy nemá řešení, rovnici a) vyhovují všechna $x \in \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle$ a rovnice c) má jediné řešení $x = \frac{3}{2}$.

3. Využijeme známého vztahu

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \tag{1}$$

platného pro všechna reálná x. Číslo x, které vyhovuje dané rovnici, vyhovuje i rovnici

$$(a\cos^2 x + c)^2 = b^2\cos^2 x,$$

neboli

$$a^2\cos^4 x + (2ac - b^2)\cos^2 x + c^2 = 0.$$

Dosadíme-li sem za $\cos^2 x$ ze vztahu (1), dostaneme po úpravě

$$a^2\cos^2 2x + (2a^2 + 4ac - 2b^2)\cos 2x + (a^2 + 4ac - 2b^2 + 4c^2) = 0.$$

Pro $a = 4$, $b = 2$, $c = -1$ vyjde

$$4\,(4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1) = 0,$$

takže v tomto případě vyhovují $\cos x$ i $\cos 2x$ téže kvadratické rovnici.

Poznámka. Všechna řešení goniometrické rovnice

$$4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0 \tag{2}$$

můžeme najít obvyklým způsobem - vyřešíme kvadratickou rovnici

$$4y^2 + 2y - 1 = 0 \tag{3}$$

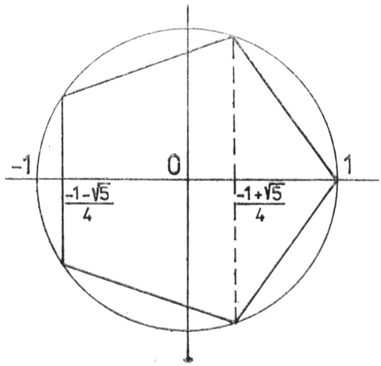
a pak určíme všechna x, pro něž

$$\cos x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{nebo} \quad \cos x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}. \tag{4}$$

Výsledek úlohy nabízí jiný postup. Všimněme si, že vyhovuje-li rovnici (3) číslo $\cos x$, vyhovuje jí také číslo $\cos 2x$, a tedy i čísla $\cos 4x$, $\cos 8x$ atd. Má-li tedy rovnice (3) kořeny $y_1 = \cos x$ a y_2, pak platí buď $y_1 = \cos 2x$, nebo $y_2 = \cos 2x$. V prvním případě snadno zjistíme, že by x bylo násobkem $\frac{2\pi}{3}$, ale žádné takové x není řešením rovnice (2). Je tedy

$$y_1 = \cos x = \cos 4x = \dots,$$
$$y_2 = \cos 2x = \cos 8x = \dots.$$

Odtud pak vyjde, že hledaná x jsou právě všechny násobky $\frac{2\pi}{5}$. (Odvodili jsme tak vlastně způsob, jak sestrojit pravidelný pětiúhelník kružítkem a pravítkem - hodnoty (4) snadno sestrojíme a další postup je zřejmý z obr. 1.)



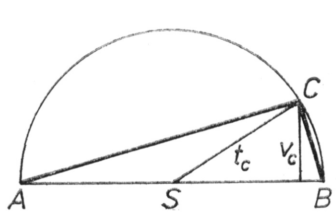
Obr. 1

4. Vyhovuje-li trojúhelník ABC úloze (obr. 2), platí

$$t_c^2 = |AC| \,.\, |BC|.$$

Protože střed S kružnice opsané trojúhelníku ABC je středem přepony AB, je

$$t_c = \frac{c}{2}.$$



Obr. 2

Dvojnásobný obsah trojúhelníku ABC je roven

$$|AC| \, . \, |BC| = cv_c,$$

neboli

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = cv_c.$$

Odtud

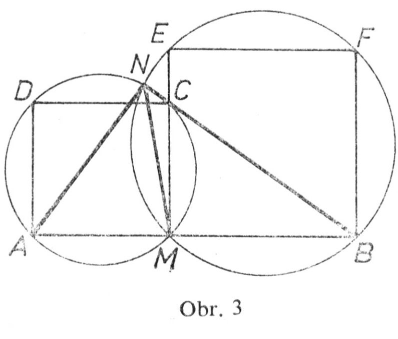
$$v_c = \frac{c}{4}.$$

Bod C je tedy společným bodem kružnice nad průměrem AB a rovnoběžky s přímkou AB ve vzdálenosti $\frac{c}{4}$. Snadno je vidět, že úloha má čtyři navzájem symetrická řešení.

5. a) Z obr. 3 (zde je situace zachycena pro $|AM| < |BM|$; pro $|AM| > |BM|$ využijeme osové souměrnosti a pro $|AM| = |BM|$ je vše triviální) vidíme, že úhly ANC a BNE jsou pravé a úhly ANM a BNM mají velikost 45° (obvodové úhly nad úhlopříčkou, resp. stranou čtverce vepsaného do kružnice). Je tedy také

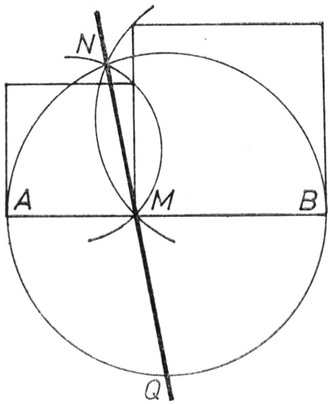
$$|\sphericalangle ANB| = |\sphericalangle ANM| + |\sphericalangle BNM| = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ.$$

Protože úhly ANC, ANB jsou pravé, leží body B, C, N v přímce, a protože úhly BNE, BNA jsou pravé, leží body A, E, N v přímce.



Obr. 3

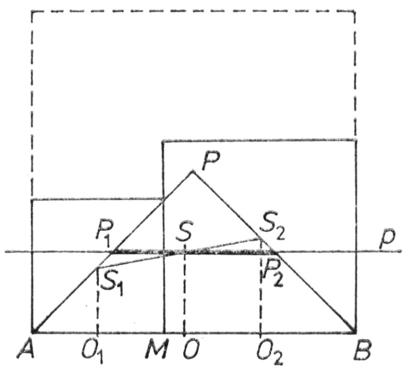
b) Už jsme si všimli, že velikosti úhlů ANM, ANB nezávisí na poloze bodu M a jsou rovny $|\sphericalangle ANM| = 45^\circ$, $|\sphericalangle ANB| = 90^\circ$. Bod N leží tedy na kružnici s průměrem AB a úhel ANM je obvodový úhel příslušný čtvrtině této kružnice vymezené body A, Q (obr. 4). Přímka NM tedy prochází bodem Q, který nezávisí na poloze bodu M.



Obr. 4

c) Označme S_1, S_2 středy daných čtverců, S střed úsečky S_1S_2 a O_1, O_2, O pravoúhlé průměty bodů S_1, S_2, S na přímku AB (obr. 5). Protože OS je střední příčka lichoběžníku $O_2S_2S_1O_1$, je

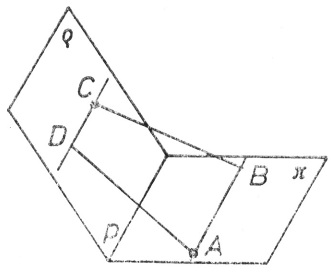
$$|OS| = \frac{|O_1S_1| + |O_2S_2|}{2} = \frac{|AM| + |BM|}{4} = \frac{|AB|}{4}.$$



Obr. 5

Bod S tedy leží na rovnoběžce p s přímkou AB vedené ve vzdálenosti $\frac{|AB|}{4}$. Označme ještě P střed čtverce o straně AB (v polorovině ABS). Probíhá-li bod M vnitřek úsečky AB, body S_1 a S_2 probíhají vnitřky úseček AP a BP a bod S vnitřek úsečky P_1P_2, kde P_1, P_2 jsou středy úseček AP, BP.

6. Základny hledaného lichoběžníku jsou navzájem rovnoběžné a jsou tedy rovnoběžné s průsečnicí p daných rovin (obr. 6). To nám umožňuje převést úlohu na následující planimetrickou úlohu v rovině hledaného lichoběžníku:



Obr. 6

Jsou dány dvě rovnoběžky $a \neq c$, na přímce a bod A a na přímce c bod C. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ tak, aby bod B ležel na přímce a, bod D na přímce c a aby mu bylo možno vepsat kružnici.

Předpokládejme, že hledaný lichoběžník je sestrojen, a označme P, Q, R, S body, v nichž se vepsaná kružnice dotýká jeho stran (obr. 7). Pak je

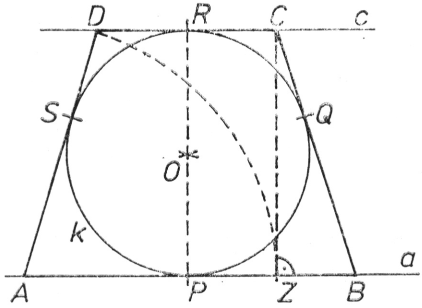
$$|AS| = |AP| = |BP| = |BQ|, \ |CQ| = |CR| = |DR| = |DS|.$$

Označíme-li ještě Z patu kolmice vedené bodem C na přímku a, dostaneme

$$|AZ| = |AP| + |PZ| = |AS| + |RC| = |AS| + |DS| = |AD|.$$

(V našem obrázku je $|AB| > |CD|$, rovnost $|AZ| = |AD|$ však analogicky odvodíme i v případě $|AB| < |CD|$.)

Této rovnosti využijeme při konstrukci hledaného lichoběžníku. Bodem C vedeme kolmici CZ k přímce a. Kolem bodu A pak opíšeme kružnici procházející bodem Z a její společný bod s přímkou c bude bod D. Trojúhelník ACD doplníme bodem B na rovnoramenný lichoběžník $ABCD$.



Obr. 7

Ukážeme ještě, že právě sestrojenému rovnoramennému lichoběžníku $ABCD$ lze vepsat kružnici. Sestrojme kružnici k, která se dotýká základen v jejich středech P, R (obr. 7). Podle konstrukce je trojúhelník ADZ rovnoramenný se základnou DZ. Protože

$$|PZ| = |RC| = |RD| \text{ a } |OR| = |OP|,$$

je střed O kružnice k středem základny DZ. Dotýká-li se tedy kružnice k ramene AZ, dotýká se i ramene AD. Ze souměrnosti lichoběžníku $ABCD$ podle osy PR pak vyplývá dotyk kružnice k se stranou BC.

Je-li $|AZ| > |CZ|$ (tj. odchylka mimoběžek AC, p je menší než 45°), má úloha právě dvě řešení souměrně sdružená podle středu úsečky AC. Je-li $|AZ| = |CZ|$ (odchylka 45°), vyhovuje úloze jediný čtverec. Jinak úloha nemá řešení.

7. Hledáme číslo n, pro jehož číslice $a \neq 0$, b, c platí

$$100a + 10b + c = 11(a^2 + b^2 + c^2).$$

Číslo

$$n = 100a + 10b + c = 99a + 11b + (a - b + c)$$

je dělitelné jedenácti, právě když je jedenácti dělitelné číslo $a - b + c$, tj. právě když

$$a - b + c = 0 \text{ nebo } a - b + c = 11$$

(a, b, c jsou totiž číslice).

V prvním případě pro hledané číslice platí

$$b = a + c \tag{1}$$

a zároveň

$$99a + 11b = 11(a^2 + b^2 + c^2),$$

neboli

$$9a + b = a^2 + b^2 + c^2. \tag{2}$$

Po dosazení (1) do (2) dostaneme pro a kvadratickou rovnici

$$2a^2 + (2c - 10)a + 2c^2 - c = 0.$$

Její diskriminant

$$(2c - 10)^2 - 8(2c^2 - c) = 4(25 - 8c - 3c^2)$$

je pro $c > 1$ záporný. Pro $c = 1$ nevychází celočíselný kořen, pro $c = 0$ vychází $a = 5$ (kořen $a = 0$ nevyhovuje úloze) a podle (1) $b = 5$. V prvním případě může být tedy hledaným číslem jedině $n = 550$, které skutečně vyhovuje.

Zbývá vyšetřit druhý případ, kdy

$$b = a + c - 11.$$

Tentokrát dostaneme kvadratickou rovnici

$$2a^2 + (2c - 32)a + 2c^2 - 23c + 132 = 0$$

a analogicky dojdeme k číslu $n = 803$.

Úloha má dvě řešení, čísla 550 a 803.

8. Levá strana nerovnice je definována, právě když $x \geqq -\frac{1}{2}$ a $x \neq 0$. V tomto oboru dostáváme ekvivalentními úpravami postupně nerovnice

$$\frac{4x^2(1 + \sqrt{1 + 2x})^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2 (1 + \sqrt{1 + 2x})^2} < 2x + 9,$$

$$(1 + \sqrt{1 + 2x})^2 < 2x + 9,$$

$$2\sqrt{1 + 2x} < 7,$$

$$4(1 + 2x) < 49.$$

Poslední nerovnici vyhovují právě všechna $x < \frac{45}{8}$. Řešením dané nerovnice jsou tedy všechna x, pro která platí

$$-\frac{1}{2} \leqq x < \frac{45}{8}, \quad x \neq 0.$$

9. Střed přepony BC označme S, krajní body prostřední části přepony P, Q a velikosti úseček AP, AQ označme p, q (obr. 8). Je-li např. $|AB| < |AC|$, leží pata H výšky spuštěné na přeponu uvnitř úsečky BS. (Je-li $H = S$, je úloha velmi jednoduchá). Dvojím vyjádřením obsahu trojúhelníku PAQ dostaneme

$$pq \sin \alpha = \frac{ah}{n}$$

a z kosinové věty pro trojúhelník PAQ

$$2pq \cos \alpha = p^2 + q^2 - \left(\frac{a}{n}\right)^2.$$

Je tedy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2ah}{n\left(p^2 + q^2 - \left(\frac{a}{n}\right)^2\right)}. \tag{1}$$

Označíme-li ještě $|HS| = x$, je

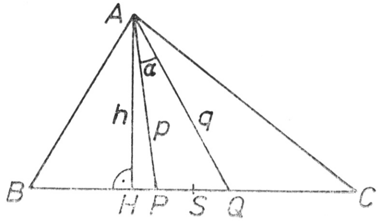
$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - h^2$$

a můžeme vypočítat

$$p^2 = \left(x - \frac{a}{2n}\right)^2 + h^2, \qquad q^2 = \left(x + \frac{a}{2n}\right)^2 + h^2,$$

takže

$$p^2 + q^2 = 2x^2 + 2h^2 + \frac{a^2}{2n^2} = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$



Obr. 8

Dosadíme-li odtud do (1), po malé úpravě dostaneme

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4nh}{(n^2 - 1)a}.$$

2. řešení. Využijeme vzorce

$$\operatorname{tg}(\beta - \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}. \tag{2}$$

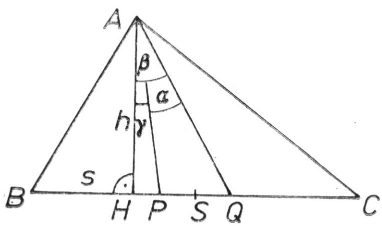
Při zachování už zavedeného značení ještě označme $s = |BH|$, $\beta = |\sphericalangle QAH|$, $\gamma = |\sphericalangle PAH|$ (obr. 9). Dostáváme

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|HQ|}{h} = \frac{\frac{a}{2} - s + \frac{a}{2n}}{h} = \frac{a - 2s}{2h} + \frac{a}{2nh},$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{|HP|}{h} = \frac{|HQ| - \frac{a}{n}}{h} = \frac{a - 2s}{2h} - \frac{a}{2nh}$$

a podle vzorce (2)

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\beta - \gamma) = \frac{\frac{a}{nh}}{1 + \frac{a^2(n^2 - 1) - 4n^2 s(a - s)}{4n^2h^2}}.$$



Obr. 9

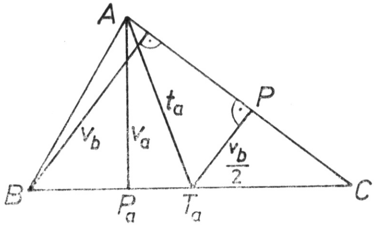
Dosadíme-li sem podle Euklidovy věty o výšce

$$s(a - s) = h^2$$

a výraz upravíme, vyjde

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4nh}{(n^2 - 1)a}.$$

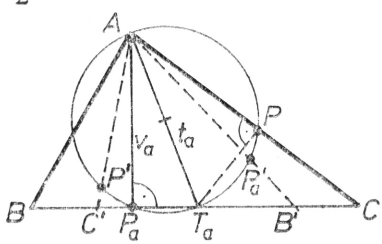
10. Vyhovuje-li trojúhelník ABC úloze, označme P_a patu výšky v_a a T_a střed strany a. Vedeme-li bodem T_a kolmici na stranu b a její patu označíme P (obr. 10), bude $|PT_a| = \frac{v_b}{2}$.



Obr. 10

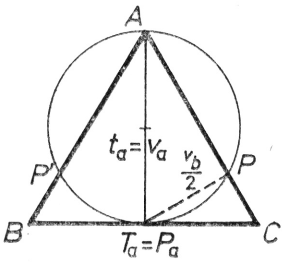
Toho využijeme ke konstrukci hledaného trojúhelníku. Nad průměrem $|AT_a| = t_a$ sestrojíme kružnici a na ní body P_a, P tak, aby $|AP_a| = v_a$, $|T_aP| = \frac{v_b}{2}$. Dále vedeme bodem P_a kolmici k přímce AP_a (prochází bodem T_a), bodem P kolmici k přímce T_aP (prochází bodem A) a jejich průsečík označíme C. Bod souměrně sdružený s bodem C podle středu T_a označíme B. Právě sestrojený trojúhelník ABC zřejmě vyhovuje podmínkám úlohy.

Pokud je $v_a > t_a$, $\frac{v_b}{2} > t_a$ nebo $v_a = t_a = \frac{v_b}{2}$, úloha nemá řešení. V případě $v_a < t_a$, $\frac{v_b}{2} < t_a$ má úloha dvě různá řešení (obr. 11), další dvě

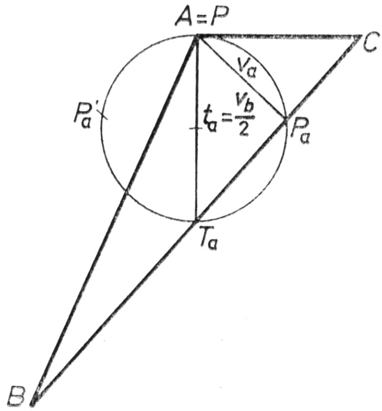


Obr. 11

jsou s nimi souměrně sdružená podle osy AT_a. V případě $v_a = t_a$, $\frac{v_b}{2} < t_a$ (obr. 12) i v případě $v_a < t_a$, $\frac{v_b}{2} = t_a$ (obr. 13) jsou vždy dvě shodná řešení souměrně sdružená podle osy AT_a.

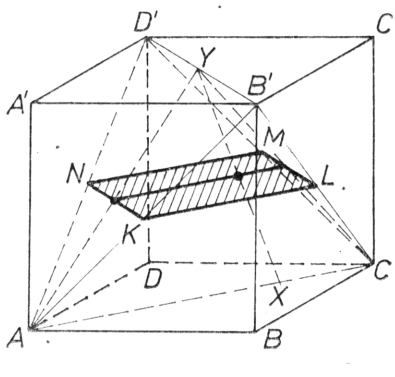


Obr. 12



Obr. 1

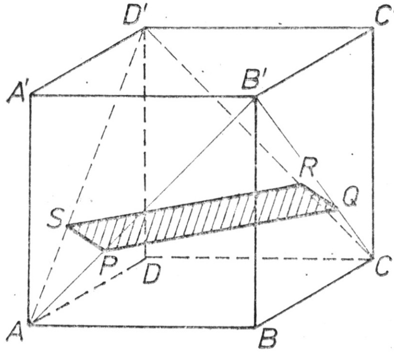
11. a) Stačí si uvědomit, že množinou středů všech úseček PX, kde bod X probíhá stranu RS trojúhelníku PRS, je střední příčka tohoto trojúhelníku. Leží-li bod Y na úsečce $B'D'$ a bod X probíhá úsečku AC, střed úsečky XY probíhá střední příčku trojúhelníku ACY (obr. 14). Probíhá-li bod Y



Obr. 14

úsečku $B'D'$, krajní body středních příček trojúhelníků ACY probíhají střední příčky trojúhelníků $AB'D'$, $CB'D'$ a střední příčky trojúhelníků ACY pak vyplní čtverec $KLMN$, jehož vrcholy jsou středy stěn $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DAA'D'$.

b) Analogicky zjistíme, že hledanou množinou je obdélník $PQRS$, jehož vrcholy dělí stěnové úhlopříčky AB', CB', CD', AD' v poměru 1 : 2 (obr. 15).



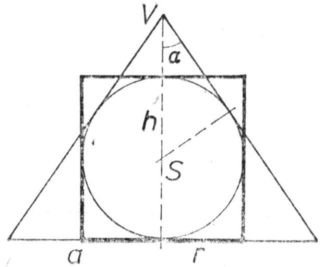
Obr. 15

12. Vrcholový úhel kužele označme 2α, jeho výšku h, poloměr koule a podstavy válce r (obr. 16). Podle známých vzorců je objem kužele

$$V_1 = \frac{\pi h a^2}{3}$$

a objem válce

$$V_2 = 2\pi r^3.$$



Obr. 16

Přitom

$$h = r + |SV| = r + \frac{r}{\sin\alpha} = r\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha},$$

$$a = h \operatorname{tg}\alpha = r \operatorname{tg}\alpha \frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha} = r\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Dosadíme-li do vzorce pro V_1, dostaneme

$$V_1 = \frac{\pi r^3(1+\sin\alpha)^3}{3\sin\alpha\cos^2\alpha}.$$

Je tedy

$$k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(1+\sin\alpha)^3}{6\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)} = \frac{(1+\sin\alpha)^2}{6\sin\alpha(1-\sin\alpha)}$$

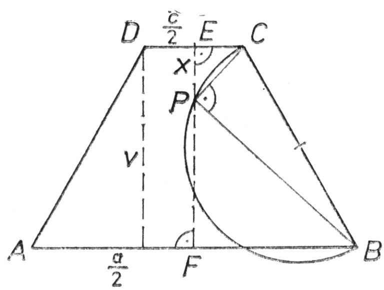
a odtud

$$(1+6k)\sin^2\alpha + 2(1-3k)\sin\alpha + 1 = 0.$$

Hledíme-li na tento vztah jako na kvadratickou rovnici pro $\sin\alpha$, vidíme, že má řešení, právě když pro její diskriminant platí

$$4(1-3k)^2 - 4(1+6k) \geqq 0,$$

tj. právě když $k \geqq \frac{4}{3}$. Pro žádné α tedy není $V_1 = V_2$. Nejmenší možné $k = \frac{4}{3}$ dostaneme pro $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, což nám umožní sestrojit příslušný úhel 2α.



Obr. 17

13. Hledaný bod P zřejmě leží na kružnici s průměrem BC (obr. 17). Pravoúhlé trojúhelníky EPC, FBP jsou podobné, neboť $|\sphericalangle ECP| = |\sphericalangle FPB|$. Označíme-li $|EP| = x$, platí tedy

$$x : \frac{a}{2} = \frac{c}{2} : (v - x)$$

a odtud

$$4x^2 - 4vx + ac = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má řešení

$$x = \frac{v}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{v^2 - ac}.$$

Je-li $v^2 - ac > 0$, má úloha dvě řešení (kružnice nad průměrem BC má dva společné body s osou EF), je-li $v^2 - ac = 0$, má úloha jediné řešení - střed úsečky EF (kružnice se dotýká osy). V případě $v^2 - ac < 0$ úloha řešení nemá.

14. Předpokládejme, že x, y, z jsou tři reálná čísla vyhovující soustavě rovnic

$$x + y + z = a, \quad (1)$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \quad (2)$$
$$xy = z^2. \quad (3)$$

Z (2) a (3) plyne, že

$$(x + y)^2 = b^2 + z^2,$$

a z (1) máme

$$(x + y)^2 = (a - z)^2.$$

Porovnáním těchto dvou vztahů dostaneme

$$2az = a^2 - b^2.$$

Je-li $a = 0$, $b \neq 0$, soustava nemá řešení. Pro $a = 0$, $b = 0$ má, jak je vidět přímo ze soustavy, jediné řešení $x = y = z = 0$.

Dále se budeme zabývat jen případem $a \neq 0$. Pak

$$z = \frac{a^2 - b^2}{2a} \quad (4)$$

a po dosazení do (1) a (3) zjistíme, že x a y vyhovují soustavě rovnic

$$x + y = \frac{a^2 + b^2}{2a}, \tag{5}$$

$$xy = \frac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2}. \tag{6}$$

Čísla x, y jsou tedy kořeny kvadratické rovnice

$$t^2 - \frac{a^2 + b^2}{2a} t + \frac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2} = 0.$$

Ta má za předpokladu

$$10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4 \geqq 0,$$

neboli

$$\frac{|b|}{\sqrt{3}} \leqq |a| \leqq |b| \sqrt{3},$$

kořeny

$$\frac{a^2 + b^2 + \sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}}{4a}, \quad \frac{a^2 + b^2 - \sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}}{4a}. \tag{7}$$

Dosadíme-li do dané soustavy za x a y tato dvě čísla (v libovolném pořadí) a za z podle (4), přesvědčíme se, že soustava je splněna.

Daná soustava má tedy

a) v případě $a = b = 0$ jediné řešení $x = y = z = 0$,

b) v případě $0 < |a| = |b|\sqrt{3}$ jediné řešení $x = y = z = \dfrac{a}{3}$,

c) v případě $0 < |b| = |a|\sqrt{3}$ jediné řešení $x = y = a$, $z = -a$

d) v případě $\dfrac{|b|}{\sqrt{3}} < |a| < |b|\sqrt{3}$ právě dvě řešení (7), (4) lišící se jen vzájemnou výměnou x a y. V ostatních případech řešení neexistuje.

Aby soustava měla za řešení kladná čísla, musí být $a > 0$, jak vidíme ze (7), a $a > |b|$, jak vidíme ze (4). Obráceně, je-li $a > |b|$, je podle (4) $z > 0$ a ze soustavy (5), (6) vidíme, že $x > 0$, $y > 0$. Už jsme zjistili, že $x \neq y$, právě když nastane případ d). Pak bude i kořen z různý od x a od y - kdyby bylo např. $x = z$, bylo by podle (3) $x = y$. Nutná a postačující podmínka k tomu, aby čísla x, y, z splňující danou soustavu byla kladná a navzájem různá, je

$$|b| < a < |b| \sqrt{3}.$$

2. řešení. Umocníme rovnici (1) a dostaneme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = a^2.$$

Dosadíme sem podle (2)

$$b^2 + 2(xy + yz + zx) = a^2,$$

podle (3)

$$b^2 + 2z(x + y + z) = a^2$$

a podle (1)

$$b^2 + 2az = a^2.$$

Dále pokračujeme stejně jako v 1. řešení.

Poznámka. Soustava rovnic (1), (2), (3) má geometrický význam. Její řešení jsou souřadnice bodů společných rovině (1), kulové ploše (2) a kuželové ploše (3). Rovina (1) má od počátku vzdálenost $\dfrac{|a|}{\sqrt{3}}$ a kulová plocha (2) má střed v počátku a poloměr $|b|$. Odtud je např. vidět, že k tomu, aby soustava měla řešení, musí být $\dfrac{|a|}{\sqrt{3}} \leqq |b|$, a platí-li zde rovnost, má soustava nanejvýš jedno řešení (rovina se dotýká kulové plochy).

15. Podle Heronova vzorce je

$$S^2 = s(s - a)(s - b)(s - c),$$

kde $s = \dfrac{a + b + c}{2}$, neboli

$$16\,S^2 = (a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) =$$
$$= -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2.$$

S dokazovanou nerovností je ekvivalentní nerovnost

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geqq 3.16\,S^2.$$

Dosadíme-li sem $16S^2$ z předešlého vztahu a upravíme, dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2 \geqq 0,$$

neboli

$$(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \geqq 0.$$

Poslední nerovnost platí vždy a rovnost v ní nastane, právě když $a = b = c$, tj. právě když jde o rovnostranný trojúhelník.

2. řešení. Podle Heronova vzorce je

$$4\,S = \sqrt{(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)} \leqq$$
$$\leqq \sqrt{(a + b + c)\frac{(a + b + c)^3}{27}} = \frac{(a + b + c)^2}{3\sqrt{3}} \leqq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{3}}.$$

Zde jsme využili známé nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem tří nezáporných čísel x, y, z

$$\sqrt[3]{xyz} \leqq \frac{x + y + z}{3} \qquad \text{neboli} \qquad xyz \leqq \frac{(x + y + z)^3}{27},$$

v níž nastane rovnost, právě když $x = y = z$. (V našem případě bylo $x = -a + b + c$, $y = a - b + c$, $z = a + b - c$.) Dále jsme odhadli

$$\frac{(a + b + c)^2}{3} \leqq a^2 + b^2 + c^2,$$

tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geqq 0.$$

Opět je zřejmé, že rovnost v dokázané nerovnosti nastane, právě když jde o rovnostranný trojúhelník.

3. řešení. Dosadíme-li do dokazované nerovnosti za c^2 podle kosinové věty

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

a za S podle vzorce

$$2\,S = ab \sin \gamma,$$

dojdeme k ekvivalentní nerovnosti

$$a^2 + b^2 - ab \cos \gamma \geqq \sqrt{3}ab \sin \gamma.$$

Tu můžeme dále přepsat

$$a^2 + b^2 - 2ab\left(\frac{1}{2}\cos\gamma + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\gamma\right) \geqq 0,$$

neboli

$$a^2 + b^2 - 2ab\sin(\gamma + 30°) \geqq 0.$$

Tato nerovnost platí, neboť

$$a^2 + b^2 - 2ab\sin(\gamma + 30°) \geqq a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geqq 0.$$

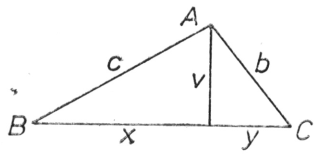
Zde nastane rovnost, právě když $\gamma = 60°$ a $a = b$, tedy právě když jde o rovnostranný trojúhelník.

4. řešení. Alespoň jedna z výšek uvažovaného trojúhelníku leží uvnitř - nechť je to např. výška na stranu a. Její velikost označme v a části, na které její pata dělí stranu a, označme x, y (obr. 18). Podle Pythagorovy věty je

$$c^2 = x^2 + v^2,$$
$$b^2 = y^2 + v^2$$

a obsah trojúhelníku ABC je

$$S = \frac{v(x + y)}{2}.$$



Obr. 18

Dokazujeme tedy nerovnost

$$(x + y)^2 + y^2 + v^2 + x^2 + v^2 \geqq 2\sqrt{3}\,v(x + y),$$

neboli

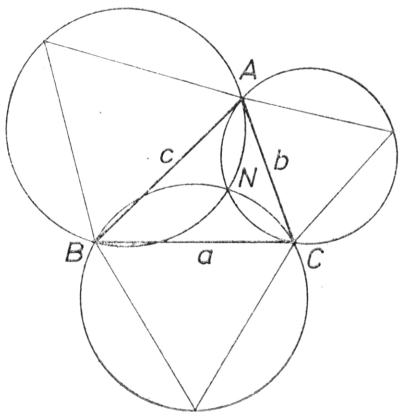
$$v^2 - \sqrt{3}\,(x + y)v + x^2 + y^2 + xy \geqq 0.$$

Levou stranu můžeme přepsat na tvar

$$\left(v - \frac{\sqrt{3}}{2}(x + y)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(x - y)\right)^2,$$

odkud vidíme, že je skutečně vždy nezáporná. Nulová je, právě když $x = y$ a $v = x\sqrt{3}$, tj. právě když jde o rovnostranný trojúhelník.

5. řešení. Předpokládejme nejprve, že každý z úhlů uvažovaného trojúhelníku je menší než 120°. Nad každou ze stran a, b, c sestrojme rovnostranný trojúhelník v opačné polorovině, než leží uvažovaný trojúhelník (obr. 19). Kružnice opsané těmto třem rovnostranným trojúhelníkům procházejí společným bodem N uvnitř trojúhelníku ABC. (O tom se snadno přesvědčíme: je-li N společný bod dvou z těchto kružnic, pak jsou z něho dvě strany vidět pod úhlem 120° a třetí pod úhlem $360° - 2 . 120° = 120°$, leží tedy i na třetí kružnici.) Obsah S trojúhelníku ABC je roven součtu obsahů trojúhelníků ABN, BCN, CAN.



Obr. 19

Teď si stačí jen uvědomit, že je-li jeden úhel v trojúhelníku alespoň 120°, pak obsah tohoto trojúhelníku je nejvýše třetina obsahu rovnostranného trojúhelníku sestrojeného nad protilehlou stranou (obr. 20) - má totiž nejvýše třetinovou výšku. Použijeme-li to na trojúhelníky ABN, BCN a CAN, dostaneme

$$S \leqq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)\frac{\sqrt{3}}{4}$$

a odtud plyne dokazovaná nerovnost. Rovnost nastane, právě když $|AN| = |BN| = |CN|$, tj. když $a = b = c$.

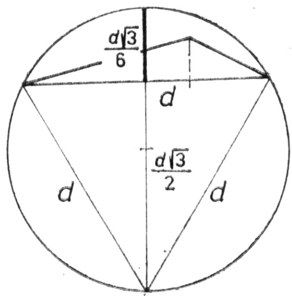
Zbývá ještě případ, kdy jeden z úhlů trojúhelníku ABC je alespoň 120°. Je-li protilehlá strana např. a, pak víme, že

$$S \leqq \frac{1}{3}a^2\frac{\sqrt{3}}{4},$$

neboli

$$a^2 \geqq 4\sqrt{3}\,S,$$

což je silnější nerovnost, než požaduje úloha.



Obr. 20

16. Stačí, najdeme-li řešení v intervalu $\langle 0, 2\pi)$. Ostatní řešení z nich pak dostaneme přičtením násobků 2π.

Pro $n = 1$ má rovnice

$$\cos x - \sin x = 1$$

v uvažovaném intervalu právě dvě řešení $x = 0$ a $x = \frac{3\pi}{2}$.

Pro $n = 2$ se rovnice

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1$$

zjednoduší, použijeme-li vztahu $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Ekvivalentní rovnice

$$\sin x = 0$$

má v uvedeném intervalu právě dvě řešení $x = 0$ a $x = \pi$.

Pro $n > 2$ pišme rovnici ve tvaru

$$\cos^n x - \sin^n x = \cos^2 x + \sin^2 x,$$

neboli

$$(1 - \cos^{n-2} x) \cos^2 x + (1 + \sin^{n-2} x) \sin^2 x = 0.$$

Oba sčítanci jsou nezáporní, takže rovnice je splněna, právě když

$$(1 - \cos^{n-2} x) \cos^2 x = (1 + \sin^{n-2} x) \sin^2 x = 0.$$

Rozebereme-li všechny možnosti, které tu mohou nastat, zjistíme, že pro lichá n jsou právě dvě řešení $x = 0$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$ a pro sudá n právě dvě řešení $x = 0$, $x = \pi$.

2. řešení pro $n > 2$. Vyhovuje-li číslo x dané rovnici, je

$$\begin{aligned} 1 &= |\cos^n x - \sin^n x| \leqq |\cos^n x| + |\sin^n x| = \\ &= \cos^2 x \, |\cos^{n-2} x| + \sin^2 x \, |\sin^{n-2} x| \leqq \cos^2 x + \sin^2 x = 1. \end{aligned}$$

V obou nerovnostech tedy musí nastat rovnost. V první nastane, právě když $\cos^n x$ a $\sin^n x$ mají opačná znaménka, totiž právě když

$$\cos^n x \sin^n x \leqq 0.$$

Ve druhé nerovnosti bude rovnost, právě když

$$|\cos^{n-2} x| = |\sin^{n-2} x| = 1$$

(to se nestane nikdy), nebo

$$\cos^2 x = 0 \text{ a } |\sin^n x| = 1,$$

nebo

$$\sin^2 x = 0 \text{ a } |\cos^n x| = 1.$$

Odtud je patrno, že obě rovnosti nastanou, právě když $\cos x = 0$ nebo $\sin x = 0$ a řešením rovnice mohou tedy být jen násobky $\dfrac{\pi}{2}$. Teď z nich už jen stačí vybrat ty, které rovnici vyhovují.

Poznámka. Pro sudá n je výsledek vidět také z rovnosti

$$\cos^n x = 1 + \sin^n x,$$

kde levá strana je

$$\cos^n x \leqq 1$$

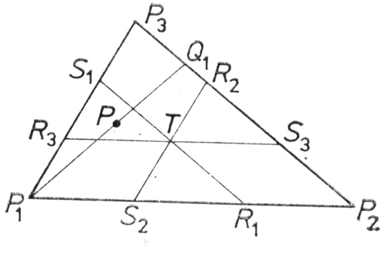
a pravá

$$1 + \sin^n x \geqq 1.$$

Rovnost tedy může platit, jen když je současně

$$\cos^2 x = 1 \text{ a } \sin x = 0.$$

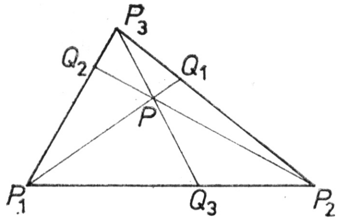
17. Těžištěm T trojúhelníku $P_1P_2P_3$ veďme příčky R_1S_1, R_2S_2, R_3S_3 rovnoběžné se stranami (obr. 21). Leží-li bod P uvnitř trojúhelníku $P_1R_1S_1$, je $|PP_1| : |PQ_1| < 2$, leží-li na úsečce R_1S_1, je $|PP_1| : |PQ_1| = 2$, a leží-li uvnitř lichoběžníku $P_2P_3S_1R_1$, je $|PP_1| : |PQ_1| > 2$. Podobně pro P_2Q_2 a P_3Q_3. Sjednocení vnitřků trojúhelníků $P_1R_1S_1$, $P_2R_2S_2$, $P_3R_3S_3$ je vnitřek trojúhelníku $P_1P_2P_3$ až na bod T. Stejné je sjednocení vnitřků tří uvažovaných lichoběžníků. Je-li tedy $P \neq T$, leží bod P uvnitř některého trojúhelníku i uvnitř některého lichoběžníku a mezi třemi hodnotami $|PP_1| : |PQ_1|$, $|PP_2| : |PQ_2|$, $|PP_3| : |PQ_3|$ je některá větší než 2 a některá menší než 2. Pro $P = T$ jsou všechny tři hodnoty rovné 2.



Obr. 21

2. řešení. Trojúhelník $P_1P_2P_3$ (jeho obsah označme S) je složen (obr. 22) ze tří trojúhelníků PP_2P_3, PP_3P_1, PP_1P_2 (jejich obsahy označme S_1, S_2, S_3). Platí tedy

$$S = S_1 + S_2 + S_3.$$



Obr. 22

Přitom však

$$S_1 : S = |PQ_1| : |P_1Q_1|,$$

neboť velikosti výšek trojúhelníků PP_2P_3, $P_1P_2P_3$ na společnou stranu P_2P_3 jsou v poměru $|PQ_1| : |P_1Q_1|$. Analogicky

$$S_2 : S = |PQ_2| : |P_2Q_2|,$$
$$S_3 : S = |PQ_3| : |P_3Q_3|.$$

Je tedy

$$\frac{|PQ_1|}{|P_1Q_1|} + \frac{|PQ_2|}{|P_2Q_2|} + \frac{|PQ_3|}{|P_3Q_3|} = \frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} = 1.$$

Odtud plyne, že jeden ze zlomků vlevo je

$$\frac{|PQ_i|}{|P_iQ_i|} \geqq \frac{1}{3}$$

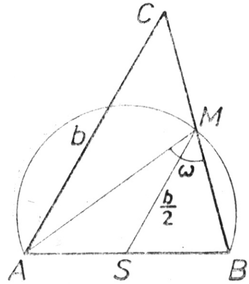
a jiný je

$$\frac{|PQ_j|}{|P_jQ_j|} \leqq \frac{1}{3},$$

což je ekvivalentní s dokazovaným tvrzením.

18. Má-li trojúhelník ABC požadované vlastnosti (obr. 23), leží bod M na kruhovém oblouku, z něhož je stranu AB vidět pod úhlem ω. Střední příčka SM, kde S je střed strany AB, je rovnoběžná se stranou AC a má délku $\frac{b}{2}$.

Toho využijeme ke konstrukci. Nad úsečkou AB sestrojíme známým způsobem kruhový oblouk, z něhož je vidět pod úhlem ω. Dále sestrojíme střed S úsečky AB a kružnici $\left(S, \frac{b}{2}\right)$. Společný bod oblouku a kružnice bude bod M. Bod C pak leží na polopřímce opačné k MB ve vzdálenosti $|MC| = |MB|$. (Přitom bude $AC \| MS$, $|AC| = 2\,|MS|$.) Sestrojený trojúhelník zřejmě má všechny požadované vlastnosti.



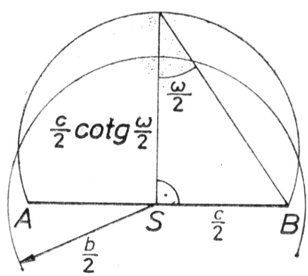
Obr. 23

Řešitelnost úlohy závisí na existenci společných bodů oblouku, z něhož je strana AB vidět pod úhlem ω, a kružnice $\left(S, \frac{b}{2}\right)$. Situaci vystihuje obr. 24. Společný bod existuje, právě když

$$\frac{c}{2} < \frac{b}{2} \leqq \frac{c}{2} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2},$$

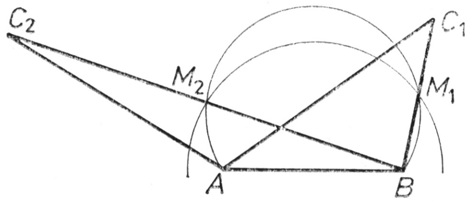
neboli

$$b \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \leqq c < b.$$



Obr. 24

V případě $c = b \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$ dostaneme jediné řešení - pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu A a s úhlem $\frac{\omega}{2}$ při vrcholu C. Jinak dostaneme dvě řešení (obr. 25).



Obr. 25

Poznámka. Je-li $\omega > 90°$, zůstává vše v platnosti, pouze podmínka řešitelnosti je

$$b < c \leqq b \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}.$$

Pro $\omega = 90°$ má úloha řešení, jen když $b = c$. Pak vyhovují všechny rovnoramenné trojúhelníky s rameny $b = c$.

19. Označme ještě T těžiště trojúhelníku ABC a T' těžiště trojúhelníku $A'B'C'$ (obr. 26). Ukážeme, že bod G je středem úsečky TT'. Zvolme v prostoru soustavu souřadnic. Mají-li body P, Q souřadnice (p_1, p_2, p_3), (q_1, q_2, q_3), budeme symbolem $P + Q$ rozumět bod o souřadnicích $(p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3)$ a symbolem sP, kde s je reálné číslo, bod o souřadnicích (sp_1, sp_2, sp_3). Potom je

$$T = \frac{A + B + C}{3}, \quad T' = \frac{A' + B' + C'}{3},$$

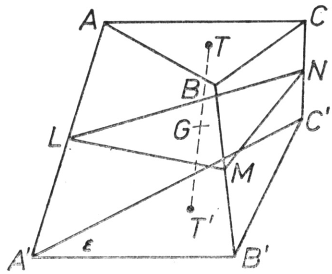
$$L = \frac{A + A'}{2}, \quad M = \frac{B + B'}{2}, \quad N = \frac{C + C'}{2}$$

a

$$G = \frac{L + M + N}{3} = \frac{\dfrac{A + A'}{2} + \dfrac{B + B'}{2} + \dfrac{C + C'}{2}}{3} =$$

$$= \frac{\dfrac{A + B + C}{3} + \dfrac{A' + B' + C'}{3}}{2} = \frac{T + T'}{2}.$$

Ke každému bodu T' roviny ε v ní můžeme najít tři body A', B', C' tak, aby bod T' byl těžištěm trojúhelníku $A'B'C'$. Hledaná množina bodů je tedy množina středů všech úseček TT', kde T je těžiště daného trojúhelníku ABC a bod T' probíhá danou rovinu ε. Je to rovina rovnoběžná s rovinou ε, která půlí vzdálenost bodu T od roviny ε.



Obr. 26

Poznámka. Leží-li body A', B', C' v přímce, rozumíme těžištěm »trojúhelníku« $A'B'C'$ bod $T' = \dfrac{A' + B' + C'}{3}$. Dále je zřejmé, že předpoklady o umístění bodů A, B, C vzhledem k rovině ε nejsou podstatné.

20. Hledané číslo můžeme napsat jako

$$10x + 6,$$

kde x je nezáporné celé číslo. Označíme-li c počet číslic hledaného čísla, je podle podmínek úlohy

$$4\,(10x + 6) = 6 \,.\, 10^{c-1} + x,$$

neboli

$$13x = 2\,(10^{c-1} - 4). \tag{1}$$

Nejmenší z čísel tvaru $10^{c-1} - 4$, tj. z čísel

$$6, 96, 996, 9996, \ldots,$$

dělitelné třinácti je, jak snadno zjistíme,

$$99\,996 = 13 . 7692.$$

V (1) pak bude $c = 6$, $x = 15\,384$, a jak se můžeme přesvědčit, číslo 153 846 skutečně úloze vyhovuje.

2. řešení. Hledané číslo n končí číslicí 6, a tedy číslo $4n$ končí číslicí 4. Podle podmínky úlohy pak číslo n končí dvojčíslím 46. Odtud vidíme, že $4n$ končí dvojčíslím 84 a n trojčíslím 846. Postupujeme-li tímto způsobem, nacházíme postupně poslední číslice čísel n a $4n$:

n	$4n$
..........6	4
.........46	84
........846	384
.......3846	5384
......53846	15384
.....153846	615384

Číslo 153 846 vyhovuje požadavkům úlohy a žádné menší nevyhovuje.

21. Vyhovuje-li číslo x dané nerovnici, platí pro ně nerovnost

$$\sqrt{3 - x} > \frac{1}{2} + \sqrt{x + 1}$$

a přitom jsou odmocniny definovány, takže je $-1 \leqq x \leqq 3$. Na obou stranách nerovnosti jsou kladná čísla, takže pro číslo x platí i nerovnost

$$\sqrt{x + 1} < \frac{7}{4} - 2x,$$

kterou dostaneme umocněním obou stran a jednoduchou úpravou. Odtud je patrno, že

$$-1 \leqq x < \frac{7}{8}. \tag{1}$$

Po dalším umocnění obou stran dostaneme

$$x^2 - 2x + \frac{33}{64} > 0,$$

neboli

$$(x - 1)^2 > \frac{31}{64}.$$

Každé řešení dané nerovnice tedy vyhovuje nerovnici

$$|x - 1| > \frac{\sqrt{31}}{8}. \tag{2}$$

Všechna řešení nerovnice (2) jsou právě ta x, pro která platí

$$x > 1 + \frac{\sqrt{31}}{8} \quad \text{nebo} \quad x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}.$$

V intervalu (1) z nich leží právě ta, pro která

$$-1 \leqq x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}.$$

Obrácením celého postupu se přesvědčíme, že dané nerovnici všechna vyhovují.

22. Zavedeme v prostoru soustavu souřadnic. Má-li bod P souřadnice (p_1, p_2, p_3) a bod Q souřadnice (q_1, q_2, q_3), budeme symbolem $P + Q$ rozumět bod o souřadnicích $(p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3)$, symbolem sP, kde s je reálné číslo, bod o souřadnicích (sp_1, sp_2, sp_3). Zkoumaný pohyb rozdělíme na čtyři části (obr. 27).

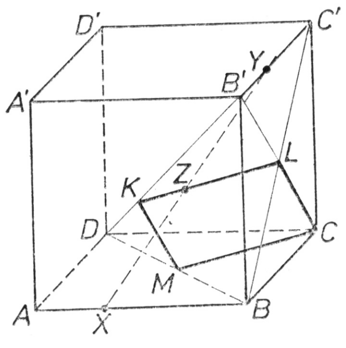
a) Bod X probíhá úsečku AB a bod Y stejnou rychlostí úsečku $B'C'$. Je tedy

$$X = (1 - t)A + tB, \; Y = (1 - t)B' + tC',$$

kde parametr t probíhá interval $\langle 0, 1 \rangle$. Pro střed Z úsečky XY pak platí

$$Z = \frac{X + Y}{2} = (1 - t)\,\frac{A + B'}{2} + t\,\frac{B + C'}{2},$$

proběhne tedy úsečku KL, kde K je střed úsečky AB' a L je střed úsečky BC'.



Obr. 27

b) Bod X probíhá úsečku BC a bod Y stejnou rychlostí úsečku $C'C$. Je tedy

$$X = (1 - t)B + tC, \quad Y = (1 - t)C' + tC,$$

kde parametr t probíhá interval $\langle 0, 1\rangle$. Pro střed Z úsečky XY pak platí

$$Z = \frac{X + Y}{2} = (1 - t)\frac{B + C'}{2} + tC,$$

proběhne tedy úsečku LC.

c) Bod X probíhá úsečku CD a bod Y stejnou rychlostí úsečku CB. Analogicky zjistíme, že bod Z proběhne úsečku CM, kde M je střed úsečky BD.

d) Bod X probíhá úsečku DA a bod Y stejnou rychlostí úsečku BB'. Bod Z pak proběhne úsečku MK.

Hledaná množina bodů je tedy obvod čtyřúhelníku $KLCM$, kde K, L, M jsou středy stěnových úhlopříček AB', BC', BD.

Poznámka. Čtyřúhelník $KLCM$ je kosočtverec o straně $\dfrac{|AB|}{\sqrt{2}}$ a s úhlem $|\sphericalangle LCM| = 60°$.

23. Pro každé reálné x je

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1,$$
$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

Řešíme tedy rovnici

$$\cos^2 x + (2\cos^2 x - 1)^2 + (4\cos^3 x - 3\cos x)^2 = 1,$$

kterou upravíme na tvar

$$2\cos^2 x\,(8\cos^4 x - 10\cos^2 x + 3) = 0.$$

Odtud zjistíme, že vyhovují právě ta x, pro něž $\cos x$ nabývá některé z hodnot

$$0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

V intervalu $\langle 0°, 360°)$ jsou to úhly

$30°, 45°, 90°, 135°, 150°, 210°, 225°, 270°, 315°$ a $330°$.

Další hodnoty dostaneme přičtením násobků $360°$.

2. řešení. Dosadíme-li do rovnice za $\cos^2 x$ a $\cos^2 2x$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2},$$

dojdeme k rovnici

$$\cos 2x + \cos 4x + 2\cos^2 3x = 0.$$

Podle vzorce pro součet kosinů je

$$\cos 2x + \cos 4x = 2\cos 3x \cos x,$$

takže řešíme rovnici

$$\cos 3x\,(\cos x + \cos 3x) = 0.$$

Podle téhož vzorce je

$$\cos x + \cos 3x = 2\cos x \cos 2x,$$

což nám umožňuje upravit rovnici na tvar

$$\cos x \cos 2x \cos 3x = 0.$$

Odtud už snadno najdeme její řešení.

3. řešení. Každému reálnému číslu x přiřadíme komplexní jednotku

$$z(x) = \cos x + \mathrm{i}\sin x.$$

Podle Moivreovy věty je

$$z^n(x) = \cos nx + \mathrm{i}\sin nx$$

a odtud snadno odvodíme, že pro každé x je

$$\cos nx = \frac{z^n(x) + z^{-n}(x)}{2}, \quad \sin nx = \frac{z^n(x) - z^{-n}(x)}{2i}. \tag{1}$$

Řešíme tedy rovnici

$$(z(x) + z^{-1}(x))^2 + (z^2(x) + z^{-2}(x))^2 + (z^3(x) + z^{-3}(x))^2 = 4,$$

neboli

$$z^{-6}(x) + z^{-4}(x) + z^{-2}(x) + 1 + z^2(x) + z^4(x) + z^6(x) = -1.$$

Vynásobíme-li tuto rovnici dvojčlenem $1 - z^2(x)$, dostaneme

$$z^{-6}(x) - z^8(x) = z^2(x) - 1,$$

neboli

$$z^7(x) - z^{-7}(x) = z^{-1}(x) - z(x).$$

Tato rovnice má kromě hledaných řešení ještě kořeny, pro které $1 - z^2(x) = 0$. Příslušná x však původní rovnici nevyhovují. Podle (1) pak dojdeme k rovnici

$$\sin 7x = - \sin x,$$

neboli

$$\sin 7x = \sin (-x),$$

kterou už není těžké vyřešit.

24. Nejprve předpokládejme, že $|\sphericalangle ABC| \leqq 90°$. Ve čtyřúhelníku $ABCD$ s požadovanými vlastnostmi označme S střed vepsané kružnice (obr. 28). Ten leží na osách úhlů čtyřúhelníku $ABCD$, což nám umožňuje vypočíst

$$|\sphericalangle ASC| = |\sphericalangle SAB| + |\sphericalangle SBA| + |\sphericalangle SBC| + |\sphericalangle SCB| = \\ = \frac{1}{2}|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle ABC| + \frac{1}{2}|\sphericalangle DCB|.$$

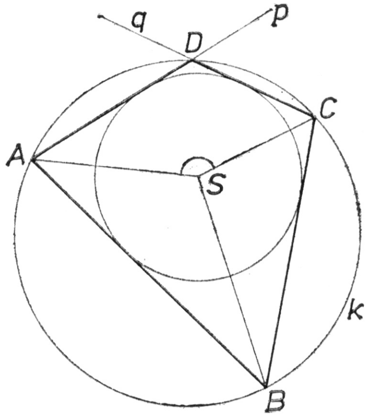
Protože čtyřúhelník $ABCD$ je vepsán do kružnice, je

$$|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle DCB| = 180°,$$

takže

$$|\sphericalangle ASC| = |\sphericalangle ABC| + 90°.$$

Tento vztah nám umožní sestrojit bod S jako společný bod osy úhlu ABC a kruhového oblouku o, který leží v polorovině ACB a z něhož je úsečku AC vidět pod úhlem $|\sphericalangle ABC| + 90°$. Vedeme-li pak bodem A přímku p souměrně sdruženou se stranou AB podle osy AS a bodem C přímku q souměrně sdruženou se stranou CB podle osy CS, protnou se v hledaném bodě D.



Obr. 28

Z konstrukce je patrno, že bod S leží na osách úhlů ABC, BAD, BCD a čtyřúhelníku $ABCD$ lze tedy vepsat kružnici. Abychom dokázali, že bod D leží na kružnici k, stačí dokázat, že

$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ADC| = 180°.$$

Skutečně, z konstrukce vyplývá

$$|\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle ASC| = 360° - \frac{1}{2}(|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BCD|),$$

tj.

$$|\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle ABC| + 90° = 360° - \frac{1}{2}(360° - |\sphericalangle ADC| - |\sphericalangle ABC|),$$

odkud plyne uvedená nerovnost.

Osa úhlu ABC se vždy protne s obloukem o nad úsečkou AC v jediném bodě, takže bod S je vždy určen jednoznačně. Přímky p, q svírají úhel $180° - |\sphericalangle ABC|$ a jsou tedy různoběžné, takže i bod D je vždy určen jednoznačně.

Analogicky postupujeme i v případě $|\sphericalangle ABC| > 90°$. Tentokrát bude bod S společným bodem osy úhlu ABC a kruhového oblouku, který leží v polorovině opačné k ACB a z něhož je úsečku AC vidět pod úhlem $270° - |\sphericalangle ABC|$.

2. řešení je založeno na známé větě: Konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$ lze vepsat kružnici, právě když pro velikosti jeho stran platí

$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|.$$

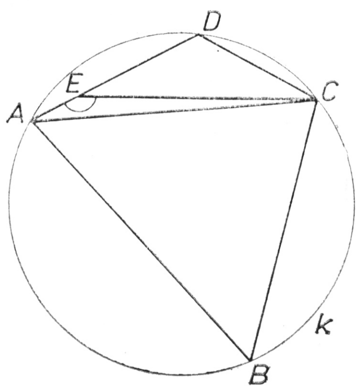
Její důkaz připomeneme v poznámce.

Vyhovuje-li tedy čtyřúhelník $ABCD$ úloze, platí

$$|AD| - |CD| = |AB| - |BC|. \tag{1}$$

Stačí se zabývat případem $|AB| > |BC|$. (Je-li $|AB| = |BC|$, plyne z (1), že $|AD| = |CD|$ a úloha je snadná. Případ $|AB| < |BC|$ převedeme na případ $|AB| > |BC|$ změnou označení vrcholů A, C.) Označme ještě E bod na straně AD, pro který je $|DE| = |CD|$ (obr. 29). Pak je

$$|AE| = |AD| - |CD| = |AB| - |BC|.$$



Obr. 29

Čtyřúhelník $ABCD$ je vepsán do kružnice k, proto

$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ADC| = 180°,$$

takže

$$|\sphericalangle AEC| = 180° - |\sphericalangle CED| = 180° - \frac{1}{2}(180° - |\sphericalangle ADC|) =$$
$$= 180° - \frac{1}{2}|\sphericalangle ABC|.$$

To nám umožňuje sestrojit bod E jako společný bod oblouku o ležícího v polorovině opačné k ACB, z něhož je úsečku AC vidět pod úhlem $180° - \frac{1}{2}|\sphericalangle ABC|$, a kružnice $(A; |AB| - |BC|)$. Bod D pak bude průsečík přímky AE s danou kružnicí k.

Z konstrukce je patrno, že pro sestrojený bod D platí (1) a čtyřúhelníku $ABCD$ lze tedy vepsat kružnici.

Oblouk o se s kružnicí $(A; |AB| - |BC|)$ vždy protne v jediném bodě a bod E je tedy určen jednoznačně. Oblouk o, a tedy i bod E leží uvnitř kružnice k, neboť

$$|\sphericalangle AEC| = 180° - \frac{1}{2}|\sphericalangle ABC| > 180° - |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC|.$$

Bod D je tedy také určen vždy jednoznačně.

Poznámka. Existence bodu D, který vyhovuje požadavkům úlohy, je vidět také takto: bod D je takový bod oblouku ω kružnice k doplňkového k oblouku ABC, že

$$|AD| - |CD| - |AB| + |BC| = 0. \tag{2}$$

Nechme bod X probíhat oblouk ω. V krajní poloze $X = A$ je podle trojúhelníkové nerovnosti

$$|AX| - |CX| - |AB| + |BC| = -|AC| - |AB| + |BC| < 0,$$

zatímco pro $X = C$ je

$$|AX| - |CX| - |AB| + |BC| = |AC| - |AB| + |BC| > 0.$$

Na oblouku ω tedy existuje bod D, pro který platí (2).

Připomeňme si ještě, jak se dokazuje věta, že konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$ lze vepsat kružnici, právě když pro velikosti jeho stran platí

$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|. \tag{3}$$

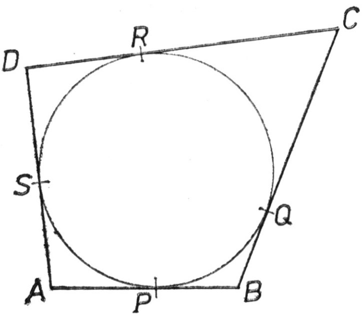
V 2. řešení jsme použili tuto větu v obou směrech.

Lze-li kružnici vepsat, označme P, Q, R, S body, v nichž se dotýká stran (obr. 30). Pak zřejmě

$$|AP| = |AS|, |BP| = |BQ|, |CQ| = |CR|, |DR| = |DS|,$$

a tedy

$$|AB| + |CD| = |AP| + |BP| + |CR| + |DR| =$$
$$= |AS| + |BQ| + |CQ| + |DS| = |BC| + |AD|.$$



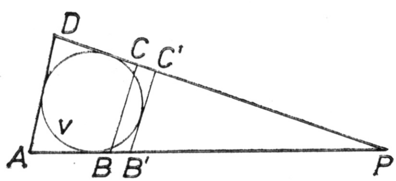
Obr. 30

Je-li $ABCD$ rovnoběžník, pro který platí (3), je to kosočtverec a tomu kružnici snadno vepíšeme. Není-li $ABCD$ rovnoběžník, zvolme označení tak, aby se přímky AB, CD protínaly v polorovině ADB a průsečík označme P. Trojúhelníku ADP vepišme kružnici v. Je-li strana BC sečnou kružnice v (obr. 31), sestrojíme v polorovině BCP tečnu $B'C'$ kružnice v rovnoběžnou s BC. Pak bude platit

$$|AB| < |AB'|, |DC| < |DC'|, |B'C'| < |BC|,$$

takže

$$|AB| + |CD| < |AB'| + |C'D| = |AD| + |B'C'| < |AD| + |BC|$$



Obr. 31

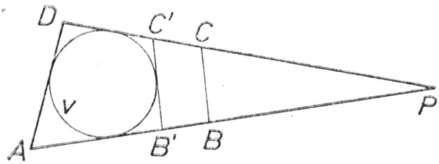
a (3) neplatí. Obdobně postupujeme i v případě, že strana BC nemá s kružnicí v společný bod (obr. 32). Pak bude

$$|AB'| < |AB|, \; |DC'| < |DC|, \; |BC| < |B'C'|,$$

takže

$$|AB| + |CD| > |AB'| + |DC'| = |AD| + |B'C'| > |AD| + |BC|$$

a (3) opět neplatí.



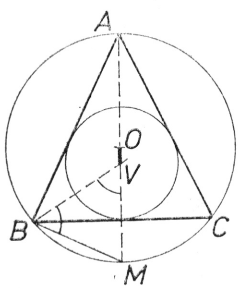
Obr. 32

25. Označme V střed vepsané kružnice a M průsečík přímky AV s opsanou kružnicí (obr. 33). Bude se nám později hodit, všimneme-li si, že $|BM| = |VM|$. Vyplývá to z rovnosti úhlů

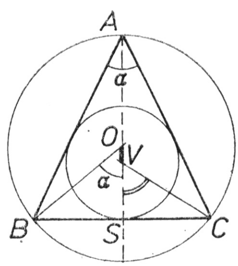
$$|\sphericalangle BVM| = |\sphericalangle ABV| + |\sphericalangle BAV| = |\sphericalangle ABV| + |\sphericalangle CAV| =$$
$$= |\sphericalangle CBV| + |\sphericalangle CBM| = |\sphericalangle MBV|.$$

Označme dále O střed opsané kružnice a S střed základny BC. Body O, V, S leží na ose základny BC (obr. 34). Je-li $|\sphericalangle BAC| = \alpha < 90°$, leží bod O uvnitř trojúhelníku ABC a přitom platí

$$|SO| = |BS| \operatorname{cotg} \alpha, \quad |SV| = |BS| \operatorname{cotg}\left(45° + \frac{\alpha}{4}\right).$$



Obr. 33



Obr. 34

Odtud je vidět, že pro $\alpha < 60°$ je $|SO| > |SV|$, pro $\alpha > 60°$ je $|SO| < |SV|$ a pro $\alpha = 60°$ je $O = V$. Je-li $\alpha > 90°$, leží bod O vně trojúhelníku ABC. Pro hraniční případy $\alpha = 60°$ a $\alpha = 90°$ úlohu snadno vyřešíme. Jinak dostáváme tři různá pořadí bodů O, V, S na úsečce AM.

Pro $\alpha < 60°$ zachycuje situaci obr. 35, v němž T je bod, ve kterém se vepsaná kružnice dotýká ramene AB. Pravoúhlé trojúhelníky ATV, ABM jsou podobné, přičemž

$$|AV| = R + d,\ |AM| = 2R,\ |TV| = r \text{ a } |BM| = |VM| = R - d.$$

Je tedy

$$|TV| : |BM| = |AV| : |AM|,$$

neboli

$$r : (R - d) = (R + d) : 2R.$$

Odtud hned dostaneme dokazovaný vztah

$$d = \sqrt{R(R - 2r)}.$$

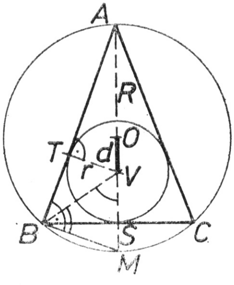
Pro $60° < \alpha < 90°$ je situace znázorněna na obr. 36. Z podobných trojúhelníků ATV, ABM, kde tentokrát je

$$|AV| = R - d,\ |AM| = 2R,\ |TV| = r \text{ a } |BM| = |VM| = R + d,$$

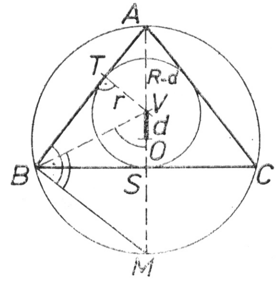
dostaneme

$$r : (R + d) = (R - d) : 2R,$$

což dává dokazovaný vztah.



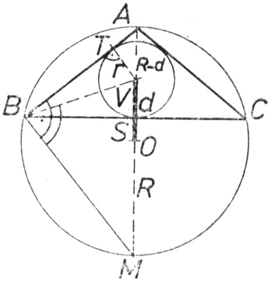
Obr. 35



Obr. 36

Obr. 37 znázorňuje situaci pro $\alpha > 90°$. Zde opět dostaneme

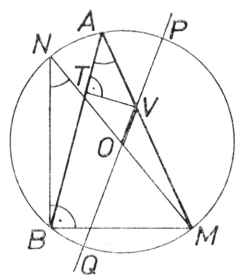
$$r : (R + d) = (R - d) : 2R.$$



Obr. 37

2. řešení. Dokážeme, že vzorec platí, i když trojúhelník ABC není rovnoramenný. Především si uvědomme, že při odvozování rovnosti $|BM| = |VM|$ jsme nepotřebovali předpoklad o rovnoramennosti trojúhelníku ABC. Označme ještě N druhý koncový bod průměru OM opsané kružnice (obr. 38). Pravoúhlé trojúhelníky ATV, NBM jsou podobné a odtud

$$|AV| . |BM| = |MN| . |TV| = 2Rr. \qquad (1)$$



Obr. 38

Koncové body průměru OV opsané kružnice označme P, Q. Pak je

$$|PV| . |QV| = (R - d)(R + d),$$

a tedy i

$$|AV| . |MV| = (R - d)(R + d) \qquad (2)$$

(mocnost bodu V k opsané kružnici). Levé strany (1) a (2) jsou stejné, proto

$$2Rr = (R - d)(R + d)$$

a odtud

$$d^2 = R(R - 2r).$$

Poznámka. Všimněte si, že pro každý trojúhelník je $R \geqq 2r$. Rovnost nastane, právě když je trojúhelník rovnostranný.

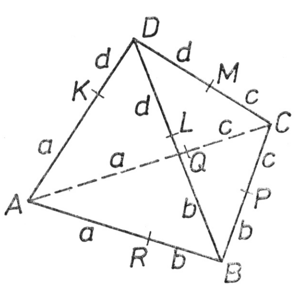
Obrácením úvahy z 2. řešení bychom dokázali obrácenou větu: Jsou-li v rovině dány dvě kružnice k, K, pro jejichž poloměry r, R a vzdálenost středů d platí

$$d^2 = R(R - 2r),$$

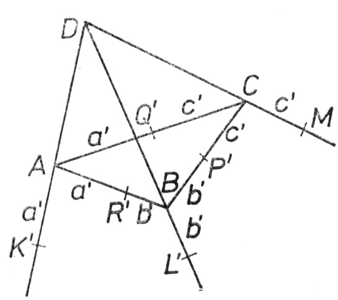
pak existuje trojúhelník, jemuž je kružnice k vepsána a kružnice K opsána. Přesněji, zvolíme-li na kružnici K libovolný bod A, pak tečny vedené z něho ke kružnici k protnou kružnici K v bodech B, C, přičemž tětiva BC se dotýká kružnice k.

26. Dotýká-li se kulová plocha všech šesti přímek, v nichž leží hrany čtyřstěnu, protíná čtyři roviny, v nichž leží stěny, v kružnicích vepsaných nebo připsaných jeho stěnám. Přitom každé dvě z těchto kružnic mají společný bod dotyku.

Jedna možnost je, že všechny čtyři kružnice jsou stěnám vepsané a všech šest bodů dotyku K, L, M, P, Q, R leží uvnitř hran (obr. 39). Taková kulová plocha - říkejme jí vnitřní - existuje nejvýše jedna.



Obr. 39



Obr. 40

Druhá možnost je, že některá z kružnic je připsaná, takže některý bod dotyku leží na prodloužení hrany za její krajní bod. Dejme tomu, že např. bod dotyku K' leží na prodloužení hrany DA za bod A (obr. 40). Kulová plocha pak protne rovinu DAB v kružnici připsané trojúhelníku DAB, která se dotýká hrany AB ve vnitřním bodě R' a přímky DB v bodě L' na prodloužení hrany DB za bod B. Stejná situace je v rovinách DBC, DAC. Kulová plocha se tedy v tomto případě dotýká hran AC, BC, AB v bodech P', Q', R' a přímek DA, DB, DC v bodech K', L', M' oddělených od bodu D rovinou ABC. Jedna kružnice je vepsána stěně ABC a tři kružnice jsou připsány ostatním stěnám. Stejnou úvahu, jakou jsme teď provedli pro bod D, můžeme provést i pro ostatní vrcholy A, B, C.

Zjistili jsme, že popsanou vlastnost může mít nanejvýš pět kulových ploch, jedna vnitřní a čtyři vnější.

Existuje-li vnitřní kulová plocha, je

$$\begin{aligned} |AK| &= |AR| = |AQ| = a, \\ |BL| &= |BP| = |BR| = b, \\ |CM| &= |CP| = |CQ| = c, \\ |DK| &= |DL| = |DM| = d. \end{aligned}$$

Existuje-li vnější kulová plocha příslušná bodu D, je

$$\begin{aligned} |AK'| &= |AQ'| = |AR'| = a', \\ |BL'| &= |BP'| = |BR'| = b', \\ |CM'| &= |CP'| = |CQ'| = c', \\ |DK'| &= |DL'| = |DM'| = d'. \end{aligned}$$

Existují-li obě, je $P = P'$, $Q = Q'$, $R = R'$, a tedy

$$a = a', b = b', c = c'$$

a

$$d' = 2a + d = 2b + d = 2c + d,$$

takže

$$a = b = c$$

a trojúhelník ABC je rovnostranný. Provedeme-li analogickou úvahu i se třemi zbývajícími vnějšími kulovými plochami, zjistíme, že i stěny ABD, BCD, ACD jsou rovnostranné trojúhelníky a čtyřstěn $ABCD$ je pravidelný.

Obráceně, je-li $ABCD$ pravidelný čtyřstěn, označme S jeho střed (tj. těžiště). Pak kulová plocha o středu S, která prochází středem jedné hrany, bude procházet i středy ostatních hran. Stejnolehlostí se středem D a koeficientem 3 převedeme tuto vnitřní kulovou plochu ve vnější příslušnou vrcholu D. Stejně pak sestrojíme ostatní tři vnější kulové plochy.

27. Je-li x reálný kořen dané rovnice, je $x^2 \geqq p$, $x^2 \geqq 1$, $x \geqq 0$, tedy

$$x^2 \geqq p,\ x \geqq 1. \tag{1}$$

Pro číslo x platí

$$2\sqrt{x^2 - 1} = x - \sqrt{x^2 - p},$$

a umocníme-li obě strany,

$$2x^2 + (p - 4) = -2x\sqrt{x^2 - p}.$$

Po dalším umocnění dostaneme rovnici

$$4\,(4 - 2p)x^2 = (p - 4)^2. \tag{2}$$

Je-li $p = 4$, má rovnice (2) řešení $x = 0$, ale to nevyhovuje podmínce (1). Je-li $p \geqq 2$, $p \neq 4$, nemá rovnice (2), a tedy ani původní rovnice řešení. Pro $p < 2$ má rovnice (2) dvě řešení

$$x = \frac{4 - p}{2\sqrt{4 - 2p}}, \tag{3}$$

$$x = \frac{p - 4}{2\sqrt{4 - 2p}}. \tag{4}$$

Snadno se přesvědčíme, že číslo (3) vyhovuje a číslo (4) nevyhovuje podmínkám (1). Jak uvidíme, neznamená to ještě, že číslo (3) vždy vyhovuje dané rovnici. Dosadíme-li totiž (3) do dané rovnice, dostaneme rovnost, právě když pro parametr p platí

$$|3p - 4| + 2|p| = 4 - p,$$

tj. právě když

$$0 \leqq p \leqq \frac{4}{3}.$$

Pro tyto hodnoty parametru p má tedy daná rovnice jediné řešení (3), pro ostatní hodnoty řešení nemá.

2. řešení. Daná rovnice je ekvivalentní se soustavou

$$(\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1})^2 = x^2,$$
$$x \geqq 0,$$

neboli

$$4\sqrt{x^2-p}\,\sqrt{x^2-1} = p+4-4x^2,$$
$$x \geqq 0.$$

Tato soustava je ekvivalentní soustavě

$$(4\sqrt{x^2-p}\,\sqrt{x^2-1})^2 = (p+4-4x^2)^2,$$
$$x \geqq 0,$$
$$p+4-4x^2 \geqq 0$$

a ta soustavě

$$16\,(x^2-p)\,(x^2-1) = (p+4-4x^2)^2,$$
$$x \geqq 0,$$
$$p+4-4x^2 \geqq 0,$$
$$x^2-p \geqq 0,$$
$$x^2-1 \geqq 0,$$

neboli

$$8\,(2-p)x^2 = (4-p)^2,$$
$$x \geqq 0, \tag{5}$$
$$x^2 \leqq \frac{p+4}{4}, \tag{6}$$
$$x^2 \geqq p, \tag{7}$$
$$x^2 \geqq 1. \tag{8}$$

Porovnáme-li podmínky (6), (7) a (6), (8), zjistíme, že soustava nemá řešení, není-li

$$0 \leqq p \leqq \frac{4}{3}.$$

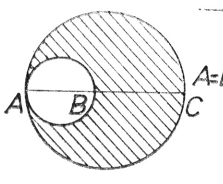
Pro tato p má původní rovnice jediné řešení vyhovující podmínce (5), totiž

$$x = \frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}.$$

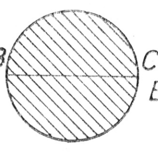
Snadno se přesvědčíme, že i podmínky (6), (7), (8) jsou pro toto x splněny.

28. Hledaná množina je podle Thaletovy věty sjednocením všech kulových ploch s průměrem AX, kde bod X probíhá úsečku BC (body A a X patří do hledané množiny, neboť pravé úhly s ramenem AX a vrcholem v bodě A nebo X splňují podmínky úlohy). Uvědomme si, že kulová plocha je invariantní vůči otočení kolem přímky procházející středem. Množina všech středů zmíněných kulových ploch je úsečka $B'C'$, jejíž krajní body B', C' jsou středy úseček AB, AC. Hledaná množina bude tedy invariantní vůči otáčení kolem přímky $B'C'$. Stačí tedy úlohu vyřešit v rovině, v níž leží body A, B, C. Najdeme-li tak množinu M, dostaneme hledanou množinu v prostoru rotací množiny M kolem přímky $B'C'$.

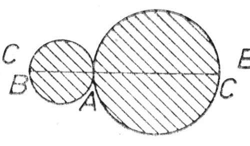
Na obr. 41a—f jsou znázorněny hledané množiny v rovině pro různé případy vzájemné polohy bodů A a úsečky BC. Je to sjednocení všech kružnic nad průměrem AX, kde bod X probíhá úsečku BC. Jinými slovy, je to množina všech kružnic procházejících bodem A, jejichž středy probíhají úsečku $B'C'$. Společným bodem všech těchto kružnic je také bod A_1 souměrně sdružený s bodem A podle přímky $B'C'$. Hledanou množinu bodů v rovině můžeme charakterizovat takto: Je to množina všech bodů, které leží v sjednocení dvou kruhů s průměry AB, AC a neleží uvnitř jejich průniku.



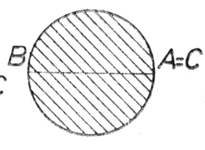
Obr. 41a



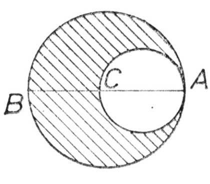
Obr. 41b



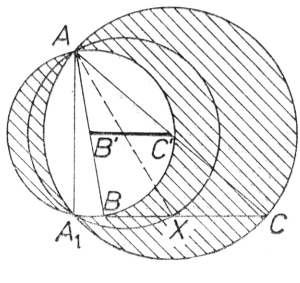
Obr. 41c



Obr. 41d



Obr. 41e



Obr. 41f

Hledanou množinou bodů v prostoru je množina všech bodů, které leží ve sjednocení dvou koulí s průměry AB, AC a neleží uvnitř jejich průniku.

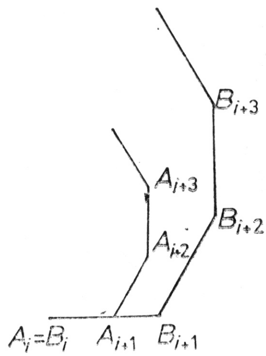
29. Vezměme pravidelný n-úhelník $B_1B_2\ldots B_n$, který má s daným n-úhelníkem $A_1A_2\ldots A_n$ společnou stranu $A_1A_2 = B_1B_2$, přičemž oba leží v téže polorovině určené přímkou A_1A_2. Oba mnohoúhelníky mají vnitřní úhly stejné. Jestliže

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1},$$

je $A_n = B_n$, a protože $A_1 = B_1$, je $a_n = |A_nA_1| = |B_nB_1| = a_1$. Kdyby $i \in \{1, 2, \ldots, n - 2\}$ byl první index takový, že $a_i > a_{i+1}$, ležely by (obr. 42) body $A_{i+2}, \ldots, A_n$ uvnitř pravidelného n-úhelníku $B_1B_2\ldots B_n$ a platilo by

$$|\sphericalangle A_nA_1A_2| < |\sphericalangle B_nB_1B_2|,$$

což není možné.



Obr. 42

2. řešení. Sestrojme osu vnitřního úhlu při vrcholu A_1 a promítněme na ni pravoúhle všechny vrcholy uvažovaného n-úhelníku. Protože všechny vnitřní úhly jsou shodné, mají dvojice stran A_1A_2 a A_1A_n, A_2A_3 a A_nA_{n-1}, ... vždy stejné odchylky od osy (je-li $n = 2k - 1$, zbyde strana A_kA_{k+1}, která je na osu kolmá). Odtud je vidět, že průměty lomených čar $A_1A_2\ldots A_k$ a $A_1A_n\ldots A_{k+1}$ v případě lichého $n = 2k - 1$, resp. $A_1A_2\ldots A_{k+1}$, $A_1A_n\ldots$ ... A_{k+1} v případě sudého $n = 2k$, jsou stejně dlouhé. Zároveň je patrno, že je-li alespoň jedna z nerovností

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n$$

ostrá, nemohou být průměty obou lomených čar stejně dlouhé.

30. Vyhovují-li čísla x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 dané soustavě, je podle prvních dvou rovnic

$$x_5 = yx_1 - x_2, \tag{1}$$
$$x_3 = yx_2 - x_1. \tag{2}$$

Dosadíme-li odtud do třetí rovnice, dostaneme

$$x_4 = (y^2 - 1)x_2 - yx_1. \tag{3}$$

Dosadíme ještě do čtvrté a páté rovnice za x_3, x_4, x_5 podle (1), (2) a (3) a dostaneme

$$(y^2 + y - 1)x_1 - (y - 1)(y^2 + y - 1)x_2 = 0, \tag{4}$$
$$(y^2 + y - 1)x_1 - (y^2 + y - 1)x_2 = 0. \tag{5}$$

Řešení dané soustavy tedy vyhovují soustavě (1)—(5). Obráceným postupem bychom zjistili, že každé řešení soustavy (1)—(5) splňuje danou soustavu. Obě soustavy jsou tedy ekvivalentní.

Řešme soustavu (1)—(5). Je-li $y^2 + y - 1 = 0$, tj.

$$y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ nebo } y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2},$$

jsou rovnice (4) a (5) splněny pro libovolná dvě čísla x_1, x_2. Ke každé dvojici x_1, x_2 pak rovnice (1)—(3) jednoznačně určují čísla x_3, x_4, x_5.

V případě že $y^2 + y - 1 \neq 0$, nabudou rovnice (4), (5) tvaru

$$x_1 - (y - 1)x_2 = 0,$$
$$x_1 - x_2 = 0.$$

Je-li $y = 2$, zjistíme, že soustavě vyhovují právě všechny pětice, pro které platí $$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5.$$

Pro $y \neq 2$ má v uvažovaném případě soustava jediné řešení

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0.$$

Závěr. Je-li

$$y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ nebo } y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2},$$

má soustava nekonečně mnoho řešení tvaru

$$x_1 = u,\ x_2 = v,\ x_3 = yv - u,\ x_4 = (y^2 - 1)v - yu,\ x_5 = yu - v,$$

kde u, v jsou libovolná čísla.

Je-li $y = 2$, má soustava nekonečně mnoho řešení tvaru

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = t,$$

kde t je libovolné číslo.

V ostatních případech má soustava jediné řešení

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0.$$

31. Podle vzorců pro součet kosinů a pro kosinus a sinus dvojnásobného úhlu je

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\frac{2\pi}{7} =$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} - 2\cos^2\frac{\pi}{7} + 1 =$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7}\right) + 1 =$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right) + 1 =$$

$$= 4\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + 1 =$$

$$= \frac{4\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} + 1 =$$

$$= \frac{2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} + 1 = \frac{\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} + 1 =$$

$$= \frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} + 1 = \frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} + 1 = \frac{1}{2}.$$

2. řešení využívá vzorce

$$2 \cos x \cos y = \cos (x + y) + \cos (x - y).$$

Postupně dostáváme

$$2 \cos \frac{\pi}{14} \left(\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \right) =$$

$$= 2 \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{14} - 2 \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{\pi}{14} + 2 \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{\pi}{14} =$$

$$= \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{\pi}{14} - \cos \frac{5\pi}{14} - \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} = \cos \frac{\pi}{14},$$

takže

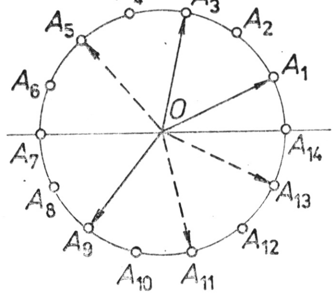
$$2 \left(\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \right) = 1.$$

3. řešení. Zaveďme v rovině soustavu souřadnic (budeme pracovat jen s prvními souřadnicemi). Čísla

$$\cos \frac{\pi}{7}, \ \cos \frac{2\pi}{7}, \ \cos \frac{3\pi}{7}$$

jsou souřadnice vrcholů A_1, A_2, A_3 pravidelného čtrnáctiúhelníku vepsaného do jednotkové kružnice se středem v počátku O (obr. 43). Číslo

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}$$



Obr. 43

se shoduje se souřadnicí koncového bodu vektoru

$$OA_1 - OA_2 + OA_3 = OA_1 + OA_9 + OA_3.$$

Všimněme si, že koncový bod vektoru

$$OA_{13} + OA_5 + OA_{11}$$

má tutéž souřadnici. Přidáme-li ještě vektor OA_7, dojdeme k závěru, že číslo

$$2\left(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\right) - 1$$

je souřadnice koncového bodu vektoru

$$OA_1 + OA_3 + OA_5 + OA_7 + OA_9 + OA_{11} + OA_{13}.$$

To je však nulový vektor, neboť je invariantní vůči otočení o $\frac{2\pi}{7}$. Je tedy

$$2\left(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\right) = 1.$$

4. řešení. Uvažujme komplexní jednotku

$$z = \cos\frac{\pi}{7} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{7}.$$

Podle Moivreovy věty je

$$z^n = \cos\frac{n\pi}{7} + \mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{7}$$

a odtud

$$2\cos\frac{n\pi}{7} = z^n + z^{-n}.$$

Všimněme si ještě, že $z^7 = -1$. Je tedy

$$2\left(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\right) = (z + z^{-1}) - (z^2 + z^{-2}) + (z^3 - z^{-3}) =$$

$$= z^3 - z^2 + z - 1 + z^{-1} - z^{-2} + z^{-3} + 1 =$$

$$= \frac{z^4 + z^{-3}}{z + 1} + 1 = \frac{z^7 + 1}{z^3(z + 1)} + 1 = 1.$$

32. Probereme všech 120 pořadí a zjistíme, že jedině EDACB vyhovuje podmínkám úlohy.

2. řešení. Vyjdeme z druhé předpovědi. Pořadí DAECB obsahuje čtyři dvojice bezprostředně za sebou následujících písmen DA, AE, EC, CB, z nichž právě dvě jsou správné. Tyto dvě správné dvojice nemohou mít společné písmeno. Pak bychom totiž dostali správnou trojici bezprostředně po sobě následujících písmen. Kdyby tato trojice měla některé písmeno na správném místě, byla by pak všechna její tři písmena na správném místě, ale správně předpovězena byla jen dvě. A kdyby na správném místě byla zbývající dvě písmena, bylo by všech pět písmen na správném místě. V úvahu tedy přicházejí tři páry správných dvojic

DA, EC,
DA, CB,
AE, CB.

Uvědomme si ještě, že pro dvě správně předpovězená písmena není jiná možnost, než že tvoří jednu ze správných dvojic. Pro hledané pořadí tak dostáváme v prvním případě jednoho kandidáta DABEC, ve druhém případě DACBE a EDACB a ve třetím případě AEDCB. Podle výsledku první předpovědi z nich vyhovuje jen EDACB.

33. Nejprve zjistíme, jaké zbytky dává 2^n při dělení sedmi. Číslo

$$2^{3k} = (2^3)^k = (7 + 1)^k$$

dává podle binomické věty při dělení sedmi zbytek 1. Odtud je vidět, že číslo $2^{3k+1} = 2 . 2^{3k}$ dává zbytek 2 a číslo $2^{3k+2} = 4 . 2^{3k}$ dává zbytek 4.

a) Číslo $2^n - 1$ je dělitelné sedmi, právě když n je dělitelné třemi.

b) Číslo $2^n + 1$ není dělitelné sedmi pro žádné přirozené n.

34. Podle trojúhelníkové nerovnosti je

$$(b - c)^2(b + c - a) \geqq 0,$$
$$(c - a)^2(c + a - b) \geqq 0,$$
$$(a - b)^2(a + b - c) \geqq 0.$$

Sečteme-li tyto tři nerovnosti, dostaneme

$$a^2(c + a - b + a + b - c) + b^2(b + c - a + a + b - c) +$$
$$+ c^2(b + c - a + c + a - b) - 2bc\,(b + c - a) - 2ac\,(c + a - b) -$$
$$- 2ab\,(a + b - c) =$$
$$= 2a^2(a - b - c) + 2b^2(b - a - c) + 2c^2(c - a - b) + 6abc \geqq 0,$$

což dává dokazovanou nerovnost.

2. řešení. Jsou-li $a \geqq b \geqq c \geqq 0$ libovolná tři čísla, je

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) - 3abc =$$
$$= a(ab + ac - a^2 - bc) + b(bc + ba - b^2 - ac) +$$
$$+ c(ac + cb - c^2 - ab) =$$
$$= - a(a - b)(a - c) + b(b - c)(a - b) - c(a - c)(b - c) \leqq$$
$$\leqq - a(a - b)(b - c) + b(b - c)(a - b) - c(a - c)(b - c) =$$
$$= - (a - b)^2(b - c) - c(a - c)(b - c) \leqq 0$$

a rovnost nastane, právě když je $a = b = c$ nebo $a = b$, $c = 0$.

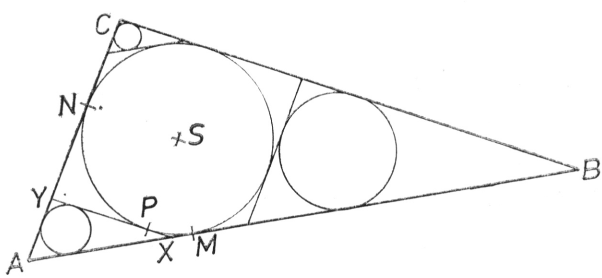
Poznámka. Předpoklad, že a, b, c jsou velikosti stran trojúhelníku, byl zbytečný. Za tohoto předpokladu je např.

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) > 0.$$

a odtud

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) > 2abc.$$

35. Poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC označme r a jeho poloviční obvod s. Analogického značení použijeme pro trojúhelníky



Obr. 44

oddělené uvedenými tečnami. Všechny čtyři uvažované trojúhelníky jsou si podobné. Naším úkolem je vyjádřit číslo

$$z = \pi r^2 + \pi r_a^2 + \pi r_b^2 + \pi r_c^2 = \pi r^2 \left(1 + \left(\frac{r_a}{r}\right)^2 + \left(\frac{r_b}{r}\right)^2 + \left(\frac{r_c}{r}\right)^2\right)$$

pomocí a, b, c. Z vlastností tečen zjistíme (obr. 44), že

$$s_a = \frac{1}{2}(|AX| + |XP|) + \frac{1}{2}(|AY| + |YP|) =$$

$$= \frac{1}{2}|AM| + \frac{1}{2}|AN| = |AM| = s - a,$$

takže

$$\frac{r_a}{r} = \frac{s_a}{s} = \frac{s-a}{s} = 1 - \frac{a}{s},$$

analogicky

$$\frac{r_b}{r} = 1 - \frac{b}{s}, \quad \frac{r_c}{r} = 1 - \frac{c}{s},$$

a tedy

$$z = \pi r^2 \left(1 + \left(1 - \frac{a}{s}\right)^2 + \left(1 - \frac{b}{s}\right)^2 + \left(1 - \frac{c}{s}\right)^2\right) =$$

$$= \pi r^2 \left(4 - 2\frac{a+b+c}{s} + \frac{a^2+b^2+c^2}{s^2}\right) =$$

$$= \pi r^2 \frac{a^2+b^2+c^2}{s^2}.$$

Obsah P trojúhelníku ABC je roven součtu obsahů trojúhelníků ABS, BCS, CAS, tj.

$$P = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = rs,$$

a podle Heronova vzorce je

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

takže

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

Je tedy

$$z = \frac{\pi}{s^3}(s-a)(s-b)(s-c)(a^2+b^2+c^2) =$$

$$= \frac{\pi(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^3}.$$

Poznámka. Všimněme si, že

$$\frac{r_a}{r} + \frac{r_b}{r} + \frac{r_c}{r} = 1 - \frac{a}{s} + 1 - \frac{b}{s} + 1 - \frac{c}{s} = 3 - \frac{a+b+c}{s} = 1.$$

Je tedy

$$r_a + r_b + r_c = r.$$

36. Zvolme jednu z uvažovaných osob a označme ji A. Ta si dopisuje se šestnácti osobami nanejvýš o třech tématech. S alespoň šesti osobami si tedy osoba A dopisuje o stejném tématu - označme je I.

Dopisují-li si některé dvě z těchto šesti osob také o tématu I, nalezli jsme tři osoby, které si píší o tématu I.

V opačném případě si žádné dvě z těchto šesti osob nepíší o tématu I. Libovolně z nich zvolená osoba B si tedy s ostatními pěti dopisuje o nejvýš dvou tématech. Alespoň se třemi si tedy dopisuje na jedno téma - označme je II.

Dopisují-li si nyní některé dvě z těchto tří osob na téma II, nacházíme opět tři osoby píšící si o témže tématu. Není-li tomu tak, dopisují si tyto tři osoby na další téma III a důkaz je proveden.

37. Zvolme jeden z pěti daných bodů. Čtyři zbývající body mají 6 spojnic a zvoleným bodem k nim prochází 6 kolmic. Žádné dvě z nich nesplynou (jinak by dvě spojnice byly rovnoběžné) a žádná z těchto kolmic neprochází žádným ze čtyř zbývajících bodů (jinak by byly dvě spojnice kolmé). Nesplynou ani dvě kolmice vedené dvěma z daných bodů, jinak by byly dvě spojnice kolmé. Máme tedy 30 kolmic.

Kdyby se každé dvě protínaly a každým průsečíkem procházely jen dvě, měli bychom $\binom{30}{2} = 435$ průsečíků.

Kolmice vedené dvěma z daných bodů k téže spojnici libovolných dvou zbývajících bodů jsou však rovnoběžné a neprotínají se. Ke každé z $\binom{5}{2} = 10$ spojnic lze vést tři takové dvojice, takže odpadá 30 průsečíků.

Každým z pěti daných bodů prochází 6 kolmic, a tak vždy $\binom{6}{2} = 15$ průsečíků splývá v jeden. Odpadne tak dalších $5 . 14 = 70$ průsečíků.

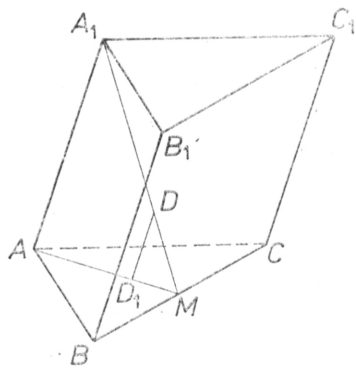
Každé tři z daných bodů jsou vrcholy trojúhelníku, v němž tři výšky procházejí společným průsečíkem. V každém z $\binom{5}{3} = 10$ trojúhelníků tak odpadnou dva průsečíky. Průsečík výšek v trojúhelníku, jehož vrcholy tvoří dané body, přitom není daný bod, jinak by byly některé spojnice daných bodů kolmé. Odpadá tedy dalších 20 průsečíků.

Kolmice se protínají nanejvýš v

$$435 - 30 - 70 - 20 = 315$$

bodech, z nichž 5 jsou dané body.

38. a) Rovina určená rovnoběžkami AA_1, DD_1 obsahuje těžnici AM trojúhelníku ABC (obr. 45). Body M, D, A_1 leží v této rovině i v rovině BCD, leží tedy v přímce. Trojúhelníky MAA_1, MD_1D jsou podobné,

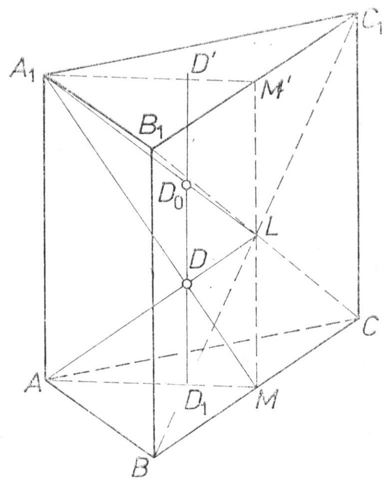


Obr. 45

a protože $|MA| = 3\,|MD_1|$, je $|AA_1| = 3\,|DD_1|$. Analogicky zjistíme, že $|BB_1| = 3|DD_1|$ a $|CC_1| = 3\,|DD_1|$. Odtud vidíme, že trojúhelníky ABC, $A_1B_1C_1$ jsou shodné a leží v rovnoběžných rovinách, jejichž vzdálenost je trojnásobek vzdálenosti bodu D od roviny ABC. Čtyřstěny $A_1B_1C_1D_1$, $ABCD$ mají tedy shodné základny a druhý má trojnásobnou výšku, tedy i trojnásobný objem.

b) Bod A_1 leží na průsečnici rovin AD_1D, BCD, tj. na přímce DM, kde M je společný bod přímky AD_1 s hranou BC (obr. 46). Označme D' průsečík přímky D_1D s rovinou $A_1B_1C_1$. Označíme-li M' průsečík přímek A_1D', B_1C_1, bude $MM' \parallel BB_1$.

Trojúhelníky AD_1D', A_1D_1D' mají stejný obsah, protože mají společnou stranu D_1D' a je $AA_1 \parallel D_1D'$. Oba trojúhelníky leží v jedné rovině a body B, B_1 od ní mají stejnou vzdálenost, protože přímka BB_1 je s touto rovinou rovnoběžná. Čtyřstěny ABD_1D', $A_1B_1D'D_1$ mají proto stejný objem. Podobně čtyřstěny BCD_1D' a $B_1C_1D'D_1$ a také ACD_1D', $A_1C_1D'D_1$ mají stejné objemy. Sjednocením čtyřstěnů ABD_1D', BCD_1D', ACD_1D' vznikne čtyřstěn $ABCD'$ a sjednocením čtyřstěnů $A_1B_1D'D_1$, $B_1C_1D'D_1$, $A_1C_1D'D_1$ čtyřstěn $A_1B_1C_1D_1$. Čtyřstěny $A_1B_1C_1D_1$ a $ABCD'$ mají tedy stejný objem a stačí dokázat, že $|D_1D'| = 3\,|D_1D|$.



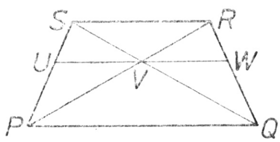
Obr. 46

Ve čtyřúhelníku BCC_1B_1 je $BB_1 \parallel CC_1$. Podle předpokladu leží úhlopříčka BC_1 v rovině ABD a druhá úhlopříčka B_1C v rovině ACD. Průsečík L úhlopříček BC_1, B_1C tedy leží na přímce AD, a tudíž i na přímce MM'. Příčka MM' tedy prochází průsečíkem úhlopříček L, který ji proto půlí (o této vlastnosti lichoběžníku a rovnoběžníku se ještě zmíníme v poznámce). Bod L je tedy střed úsečky MM', takže úsečka A_1L je těžnice trojúhelníku MA_1M'. Příčka DD' tohoto trojúhelníku je rovnoběžná se stranou MM', a proto její střed D_0 leží na těžnici A_1L.

Všimněme si dále, že ve čtyřúhelníku $AMLA_1$ je $AA_1 \parallel ML$ a průsečíkem jeho úhlopříček je bod D. Proto je bod D středem příčky D_1D_0.

Zjistili jsme, že $|D_1D| = |DD_0| = |D_0D'|$, takže skutečně $|D_1D'| = 3\,|D_1D|$.

Poznámka (obr. 47). Je-li $PQRS$ rovnoběžník nebo lichoběžník a UW příčka procházející průsečíkem V úhlopříček, $PQ \parallel UW \parallel SR$, mají obě dvojice podobných trojúhelníků $PUV \sim PSR$, $QVW \sim QSR$ stejný koeficient podobnosti k, totiž poměr vzdáleností bodu V a bodu S od základny PQ. Je tedy $|UV| = k\,|SR| = |VW|$.



Obr. 47

2. řešení využívá základů analytické geometrie v prostoru a lineární algebry. Má-li bod P souřadnice (p_1, p_2, p_3) a bod Q souřadnice (q_1, q_2, q_3), budeme symbolem $P + Q$ označovat bod se souřadnicemi $(p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3)$ a symbolem tP, kde t je reálné číslo, bod se souřadnicemi (tp_1, tp_2, tp_3). Budeme pracovat v kartézské soustavě souřadnic s počátkem v bodě D. Objem čtyřstěnu $ABCD$ je pak roven

$$V = \frac{1}{6}\,|\det(A, B, C)|,$$

kde (A, B, C) je matice, jejíž sloupce jsou souřadnice bodů A, B, C.

Zvolme bod D_1 v rovině ABC tak, aby neležel na žádné z přímek AB, AC, BC. Pak je

$$D_1 = aA + bB + cC \quad (a + b + c = 1,\ abc \neq 0).$$

Rovnoběžka s přímkou DD_1 vedená bodem A má parametrickou rovnici
$$A + tD_1 = A + t(aA + bB + cC) = (1 + at)A + btB + ctC$$
a rovinu BCD protíná v bodě, v němž je koeficient u A nulový, tj. pro $t = -\frac{1}{a}$, tedy v bodě

$$A_1 = -\frac{b}{a}B - \frac{c}{a}C.$$

Analogicky zjistíme, že

$$B_1 = -\frac{a}{b}A - \frac{c}{b}C, \quad C_1 = -\frac{a}{c}A - \frac{b}{c}B.$$

Objem čtyřstěnu $A_1B_1C_1D_1$ je roven

$$V_1 = \frac{1}{6}\,|\det(A_1 - D_1, B_1 - D_1, C_1 - D_1)|,$$

přičemž

$$A_1 - D_1 = -aA - \left(\frac{b}{a} + b\right)B - \left(\frac{c}{a} + c\right)C,$$

$$B_1 - D_1 = -\left(\frac{a}{b} + a\right)A - bB - \left(\frac{c}{b} + c\right)C,$$

$$C_1 - D_1 = -\left(\frac{a}{c} + a\right)A - \left(\frac{b}{c} + b\right)B - cC.$$

Je tedy

$$V_1 = V\left|\det\begin{pmatrix} a & \frac{a}{b} + a & \frac{a}{c} + a \\ \frac{b}{a} + b & b & \frac{b}{c} + b \\ \frac{c}{a} + c & \frac{c}{b} + c & c \end{pmatrix}\right| = V(a + b + c + 2) = 3V.$$

Zjistili jsme, že tvrzení a) platí pro libovolný bod D_1 roviny ABC, který neleží na žádné z přímek AB, AC, BC.

Poznámka. Leží-li bod D_1 např. na přímce AB, nemá rovina ABD společný bod s přímkou vedenou bodem C rovnoběžně s DD_1, takže nevznikne bod C_1.

39. Řešme nejprve druhou nerovnici

$$|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\,| \leqq \sqrt{2}.$$

Obě strany umocníme a dostaneme ekvivalentní nerovnici

$$1 + \sin 2x - 2\sqrt{1+\sin 2x}\,\sqrt{1-\sin 2x} + 1 - \sin 2x \leqq 2,$$

neboli

$$-2\sqrt{1+\sin 2x}\,\sqrt{1-\sin 2x} \leqq 0.$$

Této nerovnici vyhovují všechna $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Řešme nyní nerovnici

$$2\cos x \leqq |\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\,|. \tag{1}$$

Jestliže $\cos x \leqq 0$, tedy $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$, je nerovnice zřejmě splněna. Hledáme dále řešení nerovnice (1), pro něž $\cos x > 0$. Za tohoto předpokladu obě strany nerovnice umocníme a postupně dostáváme ekvivalentní nerovnice

$$4\cos^2 x \leqq 1 + \sin 2x - 2\sqrt{1+\sin 2x}\,\sqrt{1-\sin 2x} + 1 - \sin 2x,$$

$$4\cos^2 x \leqq 2 - 2\sqrt{1-\sin^2 2x},$$

$$2\cos^2 x \leqq 1 - |\cos 2x|,$$

$$\cos 2x \leqq -|\cos 2x|.$$

Poslední nerovnost je splněna, právě když $\cos 2x \leqq 0$. V druhém případě vyhovují tedy $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4} \right\rangle$. Připojíme-li interval $\left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$ z předešlého případu, vidíme, že řešení nerovnice (1) jsou právě všechna $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\rangle$. To jsou také všechna řešení úlohy.

2. řešení. Jiná úprava nerovnice je založena na tom, že

$$\sqrt{1 \pm \sin 2x} = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x \pm 2\sin x \cos x} = |\sin x \pm \cos x|.$$

Hledáme tedy řešení nerovnice

$$2\cos x \leqq \big|\,|\sin x + \cos x| - |\sin x - \cos x|\,\big| \leqq \sqrt{2}$$

a ta se v některých částech intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ redukuje na

$$\cos x \leqq |\cos x| \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

a v jiných na

$$\cos x \leqq |\sin x| \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

40. Předpokládejme, že čísla x_1, x_2, x_3 jsou řešením soustavy a nejsou všechna rovna nule. Pak můžeme dokonce předpokládat, že aspoň jedno z nich je kladné, neboť trojice $-x_1$, $-x_2$, $-x_3$ soustavě také vyhovuje. Největší z čísel x_1, x_2, x_3 označme x_r, je tedy $x_r > 0$. Z r-té rovnice máme podle podmínek úlohy

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + a_{r3}x_3 = a_{rr}x_r + \sum_{i \neq r} a_{ri}x_i \geqq$$
$$\geqq a_{rr}x_r + \sum_{i \neq r} a_{ri}x_r = x_r(a_{r1} + a_{r2} + a_{r3}) > 0$$

a dostáváme spor, neboť uvažovaná trojice nevyhovuje r-té rovnici.

2. řešení využívá základních poznatků o determinantech. Označme

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinant dané soustavy. Stačí dokázat, že $D \neq 0$, neboť homogenní soustava lineárních rovnic má nenulové řešení, právě když determinant soustavy je nulový.

Označme součty koeficientů v i-té rovnici $s_i = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}$ pro $i \in \{1, 2, 3\}$. Pak

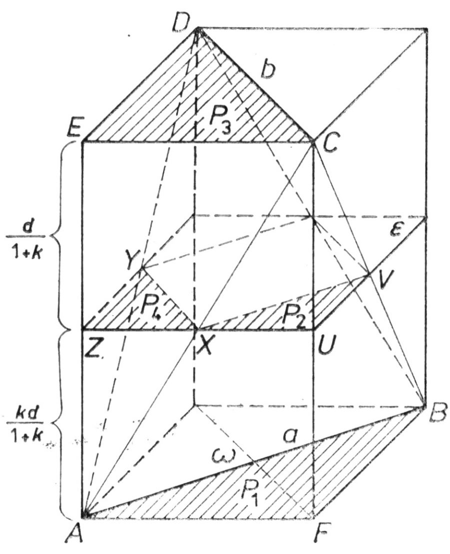
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & s_1 \\ a_{21} & a_{22} & s_2 \\ a_{31} & a_{32} & s_3 \end{vmatrix} = s_1(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) + s_2(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) + \\ + s_3(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}). \qquad (1)$$

Z podmínek úlohy plyne, že první dva členy na pravé straně jsou kladné. Dále $a_{11} + a_{12} > a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0$, tedy $a_{11} > -a_{12}$. Obdobně $a_{21} + a_{22} > a_{21} + a_{22} + a_{23} > 0$, tedy $a_{22} > -a_{21}$. Dohromady $a_{11}a_{22} > > a_{12}a_{21}$, tedy i třetí člen na pravé straně (1) je kladný. Platí tedy $D > 0$ a soustava má pouze nulové řešení.

Poznámka. Tvrzení úlohy můžeme zobecnit na soustavu n lineárních rovnic o n neznámých, postupujeme-li stejně jako v 1. řešení.

41. Čtyřstěn $ABCD$ doplníme na rovnoběžnostěn, jak ukazuje obr. 48 (výsledný rovnoběžnostěn ovšem nemusí být kolmý). Hrany AB, CD čtyřstěnu jsou úhlopříčkami jeho podstav, rovina ε dělí rovnoběžnostěn ve dva rovnoběžnostěny; objem dolního (horního) označíme V_1 (V_2). Protože jejich výšky jsou po řadě $\frac{kd}{1+k}$, $\frac{d}{1+k}$ a protože oba rovnoběžnostěny mají podstavu téhož obsahu $2P = \frac{1}{2} ab \sin \omega$ (klademe $P_1 = P_3 = P$), platí

$$V_1 = \frac{2kdP}{1+k}, \quad V_2 = \frac{2dP}{1+k}. \tag{1}$$



Obr. 48

Rovina ε rozdělí čtyřstěn $ABCD$ na dvě části; dolní dostaneme, když od dolního rovnoběžnostěnu oddělíme dva jehlany a dva komolé jehlany. Výška jehlanů je $\frac{kd}{1+k}$ a jejich podstavy mají týž obsah P_4; je to obsah trojúhelníku XYZ. Poněvadž trojúhelníky XYZ, CDE jsou stejnolehlé podle středu A $\left(\text{koeficient stejnolehlosti je}\ \dfrac{k}{1+k}\right)$, platí

$$P_4 = \left(\frac{k}{1+k}\right)^2 P.$$

Součet objemů jehlanů je tedy

$$\frac{2}{3}\,\frac{kd}{1+k}\left(\frac{k}{1+k}\right)^2 P = \frac{2}{3}\,d\left(\frac{k}{1+k}\right)^3 P. \tag{2}$$

Oba komolé jehlany mají také výšku $\dfrac{kd}{1+k}$; jejich podstavy mají obsahy P (trojúhelník ABF) a P_2 (trojúhelník XVU). Protože trojúhelníky XVU, ABF jsou stejnolehlé podle středu C $\left(\text{koeficient stejnolehlosti je}\ \dfrac{1}{1+k}\right)$, platí

$$P_2 = \left(\frac{1}{1+k}\right)^2 P.$$

Součet objemů obou komolých jehlanů je tedy

$$\frac{2}{3}\,\frac{kd}{1+k}\left(P + \left(\frac{1}{1+k}\right)P + \left(\frac{1}{1+k}\right)^2 P\right) =$$
$$= \frac{2d}{3}\,\frac{k(k^2+3k+3)}{(1+k)^3}\,P. \tag{3}$$

Objem V_1' dolní části čtyřstěnu dostaneme, odečteme-li od čísla V_1 obě čísla (2), (3). Je tedy

$$V_1' = \frac{2kd}{1+k}\,P - \frac{2}{3}\,d\,\frac{k^3}{(1+k)^3}\,P - \frac{2}{3}\,d\,\frac{k(k^2+3k+3)}{(1+k)^3}\,P =$$
$$= \frac{2k^2(k+3)d}{3\,(1+k)^3}\,P. \tag{4}$$

Objem V_2' horní části zřejmě dostaneme, nahradíme-li ve výsledku (4) číslo k číslem $\dfrac{1}{k}$; po úpravě vyjde

$$V_2' = \frac{2(1+3k)d}{3(1+k)^3}\,P. \tag{5}$$

Z (4) a (5) plyne

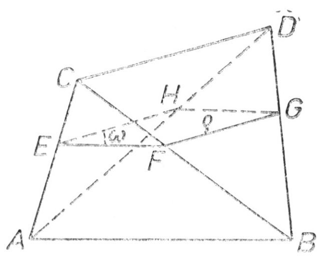
$$\frac{V_1'}{V_2'} = \frac{k^2(k+3)}{1+3k}.$$

Poznámka. Vidíme, že poměr nezávisí na a, b, d, ω. Pro $k = 1$ jsme dostali větu:

Rovina, která prochází středy dvou mimoběžných hran a středem další hrany čtyřstěnu, dělí čtyřstěn na dvě části o stejném objemu.

2. řešení využívá integrálního počtu. Veďme proměnnou rovinu ϱ rovnoběžnou s rovinou ε ve vzdálenosti x od přímky AB. Nechť rovina ϱ protíná čtyřstěn $ABCD$ v čtyřúhelníku $EFGH$ (obr. 49). Zřejmě $FG \parallel CD \parallel EH$, $EF \parallel AB \parallel HG$, tedy čtyřúhelník $EFGH$ je rovnoběžník. Jeho obsah je

$$P = |EF| . |FG| \sin\omega = |AB| \frac{d-x}{d} |CD| \frac{x}{d} \sin\omega = ab \frac{x(d-x)}{d^2} \sin\omega.$$



Obr. 49

Označme V_1, V_2 objemy těles vzniklých rozdělením čtyřstěnu $ABCD$ rovinou ε. Pak platí

$$V_1 = \int_0^{\frac{kd}{1+k}} ab \frac{x(d-x)}{d^2} \sin\omega \, dx = \frac{ab\sin\omega}{d^2} \left[\frac{x^2 d}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{kd}{1+k}} =$$

$$= abd \frac{k^2(k+3)}{6(1+k)^3} \sin\omega,$$

$$V_2 = \int\limits_{\frac{kd}{1+k}}^{d} ab \frac{x(d-x)}{d^2} \sin \omega \, \mathrm{d}x = \frac{ab \sin \omega}{d^2} \left[\frac{x^2 d}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{kd}{1+k}}^{d} =$$

$$= abd \frac{3k+1}{6(1+k)^3} \sin \omega .$$

Poměr objemů bude tedy

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{k^2(k+3)}{3k+1} .$$

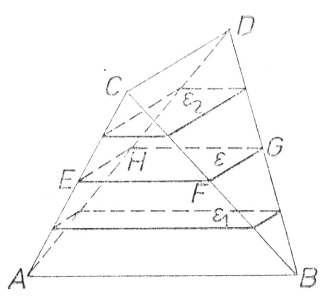
3. řešení. Využijeme následující věty, kterou dokážeme nakonec.

Objem mnohostěnu, jehož všechny vrcholy leží ve dvou rovnoběžných rovinách, je dán vzorcem

$$V = \frac{h}{6}(B_1 + B_2 + 4M), \tag{6}$$

kde B_1, B_2 jsou obsahy podstav, h je výška mnohostěnu (vzdálenost podstav) a M je obsah průniku mnohostěnu s rovinou rovnoběžnou s podstavami a stejně vzdálenou od obou podstav. (Věta platí i v případě, kdy se jedna z podstav redukuje na úsečku nebo na bod a má tedy nulový obsah.)

Uvažujme roviny ε_1, resp. ε_2 rovnoběžné s rovinou ε a stejně vzdálené od roviny ε a přímky AB, resp. CD (obr. 50). Vzdálenosti rovin ε, ε_1, resp. ε_2 od přímky AB jsou $\frac{kd}{1+k}$, $\frac{kd}{2(1+k)}$, resp. $\frac{(1+2k)d}{2(1+k)}$. Jak už víme



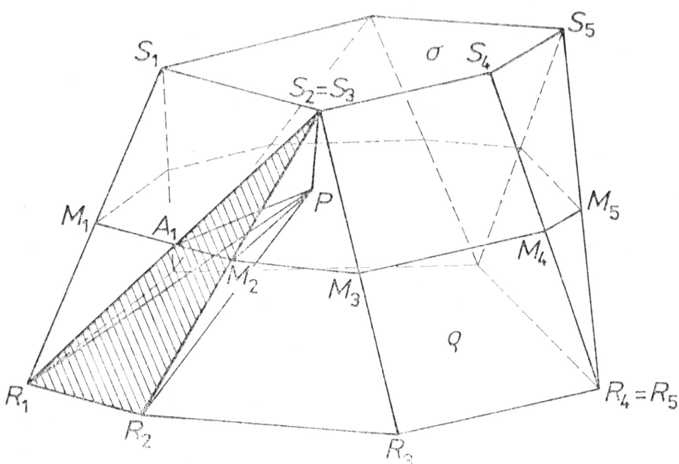
Obr. 50

z 2. řešení, roviny ε, ε_1, ε_2 protnou čtyřstěn $ABCD$ v rovnoběžnících s obsahem

$$ab\,\frac{x(d-x)}{d^2}\sin\omega,$$

kde x je vzdálenost příslušné roviny od přímky AB. Podle vzorce (6) pak už snadno určíme objemy V_1, V_2 těles vzniklých rozdělením čtyřstěnu $ABCD$ rovinou ε.

Zbývá dokázat vzorec (6) (obr. 51). Nechť všechny vrcholy mnohostěnu leží ve dvou rovnoběžných rovinách ϱ a σ. Vrcholy R_1, R_2, ..., R_n v rovině ϱ jsou spojeny hranami s vrcholy S_1, S_2, ..., S_n v rovině σ (několik následujících vrcholů může splývat). Boční stěny mnohostěnu jsou trojúhelníky nebo čtyřúhelníky. Každou boční čtyřúhelníkovou stěnu rozdělíme úhlopříčkou na dva trojúhelníky (v obr. 51 např. čtyřúhelník $R_1R_2S_2S_1$ úhlopříčkou R_1S_2). Označme $M_1M_2...M_n$ n-úhelník, který vznikne jako řez mnohostěnu rovinou rovnoběžnou s podstavami a stejně od nich vzdálenou. Zvolme bod P uvnitř tohoto mnohoúhelníku a spojme bod P s vrcholy M_1, M_2, ..., M_n, s body A_i, ve kterých přidané stěnové

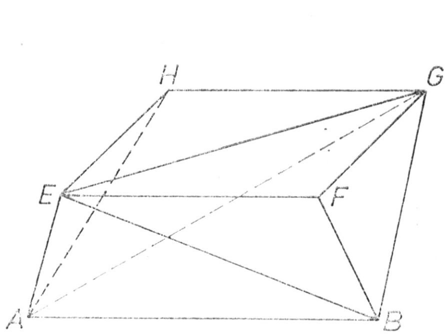


Obr. 51

úhlopříčky protínají n-úhelník $M_1M_2\dots M_n$, a se všemi vrcholy R_1, R_2, $\dots$, R_n, S_1, S_2, $\dots$, S_n mnohostěnu. Označme V, V_1 objemy jehlanů $R_1R_2S_2P$, $A_1M_2S_2P$. Zřejmě $V = 4V_1$ a $V_1 = \frac{1}{3}\frac{h}{2}S$, kde S je obsah trojúhelníku A_1M_2P. Je tedy $V = \frac{2hS}{3}$. Stejným způsobem vypočteme objemy jehlanů $R_2R_3S_2P$, $R_3R_4S_3P$, $S_3S_4R_4P$ atd. Součet objemů těchto jehlanů, z nichž každý má vrchol P a za podstavu jeden z bočních trojúhelníků, je $\frac{2hM}{3}$, kde M je obsah n-úhelníku $M_1M_2\dots M_n$. Objem mnohostěnu získáme přidáním dvou jehlanů s vrcholem P a podstavami $R_1R_2\dots$ $\dots R_n$, resp. $S_1S_2\dots S_n$. Oba jehlany mají výšku $\frac{h}{2}$. Označíme-li obsahy podstav B_1 a B_2, dostaneme vzorec (6).

4. řešení. Rovina ε protíná daný čtyřstěn v rovnoběžníku $EFGH$ a rozděluje ho na dva pětistěny $ABEFGH$ a $CDEFGH$. Pětistěn $ABEFGH$ (obr. 52) je složen ze tří čtyřstěnů $AEGH$, $BEFG$ a $ABEG$. První dva z nich mají podstavy EGH, EFG stejného obsahu a stejně velké výšky, mají tedy stejné objemy. Porovnejme čtyřstěny $AEGH$, $ABEG$. Výšku ze společného vrcholu E mají společnou a výšky podstavy AGH na stranu GH a podstavy ABG na stranu AB jsou také stejně velké. Je tedy

$$\frac{V(ABEG)}{V(AEGH)} = \frac{|AB|}{|GH|} = k + 1,$$



Obr. 52

takže

$$V(ABEFGH) = (k + 3)\, V(AEGH).$$

Pětistěn $CDEFGH$ rozložíme na tři čtyřstěny $DEGH$, $CEFG$ a $CDEG$ a analogicky zjistíme, že

$$V(CDEFGH) = \left(\frac{1}{k} + 3\right) V(DEGH).$$

Vzhledem k tomu, že je zřejmě

$$V(AEGH) = k\, V(DEGH),$$

dostaneme

$$\frac{V(ABEFGH)}{V(CDEFGH)} = \frac{k(k+3)}{\dfrac{1}{k} + 3} = \frac{k^2(k+3)}{3k+1}.$$

Poznámka. Všimněte si, že jsme vůbec nepracovali s danými veličinami a, b, d, ω.

5. řešení. Jak známo, každé afinní zobrazení v prostoru zachovává rovnoběžnost i dělicí poměr. Jsou-li dány dva čtyřstěny $ABCD$, $A'B'C'D'$, pak existuje afinní zobrazení, které převede A v A', B v B', C v C', D v D'. Stačí tedy naši úlohu vyřešit pro jeden určitý čtyřstěn a výsledek pak bude stejný pro všechny ostatní čtyřstěny. Pohodlně se objemy částí počítají např. pro čtyřstěn s vrcholy (0, 0, 0,) (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0).

42. Předpokládejme, že čísla x_1, x_2, x_3, x_4 vyhovují podmínkám úlohy, tj. jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2x_3x_4 &= 2, \\ x_2 + x_1x_3x_4 &= 2, \\ x_3 + x_1x_2x_4 &= 2, \\ x_4 + x_1x_2x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Žádné z čísel x_i není rovno nule: kdyby např. $x_1 = 0$, dostaneme ze soustavy $x_2x_3x_4 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 2$, což není možné.

Označme nyní $p = x_1x_2x_3x_4$. Pak i-tá rovnice soustavy má tvar

$$x_i + \frac{p}{x_i} = 2,$$

neboli

$$x_i^2 - 2x_i + p = 0.$$

Pro číslo x_i tedy platí

$$x_i = 1 + \sqrt{1 - p} \text{ nebo } x_i = 1 - \sqrt{1 - p}.$$

To znamená, že z čísel x_i mohou být nejvýše dvě různá. Rozlišíme tři možnosti:

a) Všechna čtyři čísla jsou si rovna, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = m$. Pak $m + m^3 = 2$, neboli

$$(m - 1)(m^2 + m + 2) = 0.$$

Tato rovnice má jediný reálný kořen $m = 1$. Příslušná čtveřice $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ vyhovuje podmínkám úlohy.

b) Tři z čísel x_i jsou si rovna a čtvrté od nich různé, např. $x_1 = x_2 = x_3 = m$, $x_4 = n \neq m$. Pak

$$m + m^2 n = 2,$$
$$n + m^3 = 2.$$

Odečtením dostaneme $(m - n)(1 - m^2) = 0$ a snadno zjistíme, že může být jen $m = -1$, $n = 3$. Příslušná čtveřice $x_1 = x_2 = x_3 = -1$, $x_4 = 3$ jakož i další tři čtveřice, které z ní dostaneme změnou pořadí, vyhovují úloze.

c) Dvě a dvě čísla x_i jsou si rovna, např. $x_1 = x_2 = m$, $x_3 = x_4 = n \neq m$. Pak

$$m + mn^2 = 2,$$
$$n + m^2 n = 2.$$

Odečtením dostaneme $(m - n)(1 - mn) = 0$. Protože $m \neq n$, musí být $mn = 1$ a z první rovnice plyne $m + n = 2$. Taková čísla $m \neq n$ však neexistují.

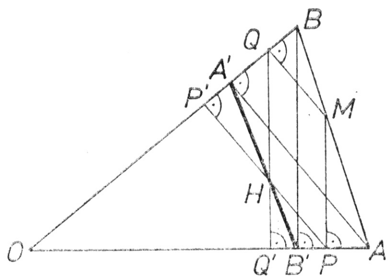
Úloze tedy vyhovuje celkem pět čtveřic čísel (1, 1, 1, 1), (3, —1, —1, —1), (—1, 3, —1, —1), (—1, —1, 3, —1), (—1, —1, —1, 3).

Poznámka. V oboru komplexních čísel jsou ještě další dvě řešení $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \dfrac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \dfrac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$.

43. a) Označme B', Q' paty kolmic spuštěných z bodů B, Q na přímku OA (obr. 53) a A', P' paty kolmic spuštěných z bodů A, P na přímku OB. Dokážeme, že hledanou množinou je úsečka $A'B'$.

Označme H_1 průsečík přímek PP', $A'B'$ a H_2 průsečík přímek QQ', $A'B'$. Dokážeme, že $H_1 = H_2$, což znamená, že bod H leží na úsečce $A'B'$. Z podobnosti trojúhelníků $B'H_1P \sim B'A'A$, $BB'A \sim MPA$ dostaneme

$$\frac{|B'H_1|}{|B'A'|} = \frac{|B'P|}{|B'A|} = \frac{|BM|}{|BA|}$$



Obr. 53

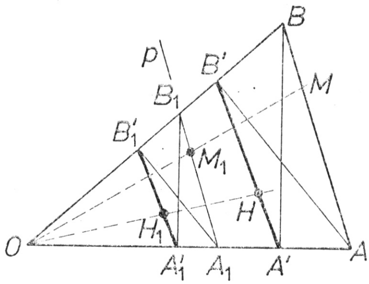
a z podobnosti trojúhelníků $A'H_2Q \sim A'B'B$, $AA'B \sim MQB$

$$\frac{|A'H_2|}{|A'B'|} = \frac{|A'Q|}{|A'B|} = \frac{|AM|}{|AB|}.$$

Body H_1, H_2 dělí tedy úsečku $A'B'$ v témže poměru, a proto $H_1 = H_2$, $H \in A'B'$. Přitom proběhne-li bod M úsečku AB, proběhne bod H zřejmě úsečku $A'B'$.

(V případě, kdy úhel ABO nebo BAO je pravý, úsečka $A'B'$ splyne s úsečkou PP' nebo QQ' a důkaz se zjednoduší.)

b) Nechť M_1 je vnitřní bod trojúhelníku OAB (obr. 54). Bodem M_1 veďme rovnoběžku p s přímkou AB. Průsečíky přímky p s přímkami OA, OB označme A_1, B_1. Existuje zřejmě právě jedna stejnolehlost se středem O a koeficientem k, $0 < k < 1$, která převádí body A, B na body A_1, B_1 a některý vnitřní bod M úsečky AB na bod M_1. Nechť H, H_1 jsou průsečíky výšek sestrojené podle textu úlohy k bodům M a M_1. V části a) jsme dokázali, že probíhá-li bod M úsečku AB, probíhá bod H úsečku



Obr. 54

$A'B'$. Probíhá-li bod M_1 úsečku A_1B_1, probíhá zřejmě bod H_1 úsečku $A_1'B_1'$ stejnolehlou s $A'B'$ s koeficientem k. Jelikož k může nabývat libovolné hodnoty intervalu $(0, 1)$, je hledanou množinou bodů v části b) vnitřek trojúhelníku $OA'B'$.

2. řešení. Zvolme v rovině soustavu souřadnic. Mají-li body P, Q souřadnice (p_1, p_2), (q_1, q_2), budeme symbolem $P + Q$ rozumět bod o souřadnicích $(p_1 + q_1, p_2 + q_2)$ a symbolem sP, kde s je reálné číslo, bod o souřadnicích (sp_1, sp_2). Protože $MPHQ$ je rovnoběžník, je (obr. 53)

$$H - P = Q - M,$$

neboli

$$H = P + Q - M. \qquad (1)$$

Označíme-li $\dfrac{|AM|}{|AB|} = k$, je

$$M = A + k(B - A) = (1 - k)A + kB.$$

Protože $MP \parallel BB'$, je

$$P = (1 - k)A + kB',$$

a protože $MQ \parallel AA'$, je

$$Q = (1 - k)A' + kB.$$

Dosadíme-li do (1), vyjde

$$H = (1 - k)A' + kB'.$$

Probíhá-li tedy bod M úsečku AB, probíhá k interval $\langle 0, 1\rangle$ a bod H úsečku $A'B'$.

Poznámka. Tvrzení věty zůstane v platnosti, i když úhel AOB není ostrý.

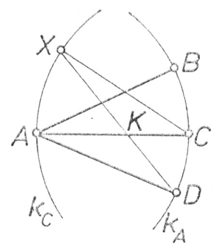
44. Uvažujme nejdříve případ, kdy z některého bodu A dané množiny M vycházejí alespoň tři průměry AB, AC, AD (obr. 55). Pak body B, C, D leží na kružnici $k_A = (A; d)$ ve středovém úhlu velikosti nejvýše 60°. Zvolme označení tak, aby polopřímka AC ležela uvnitř úhlu BAD. Dokážeme, že z bodu C vychází pouze průměr CA.

Předpokládejme, že z bodu C vychází ještě další průměr CX, $X \in$ M, $X \neq A$. Bod X musí ležet na kružnici $k_C = (C, d)$ a v kruhu ohraničeném kružnicí k_A. Nechť např. bod X leží v polorovině ACB. Označme K průsečík úseček XD a AC, pak sečtením trojúhelníkových nerovností

$$|XC| < |XK| + |KC|,$$
$$|AD| < |AK| + |KD|$$

dostaneme

$$|XC| + |AD| < |AC| + |XD|.$$



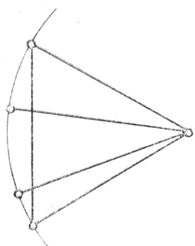
Obr. 55

Protože $|AC| = |AD| = |XC| = d$, je $|XD| > d$. To je však spor s tím, že d je průměrem množiny M. Obdobně dostaneme nerovnost $|XB| > d$, leží-li bod X v polorovině ACD. Vychází-li tedy z některého bodu dané množiny alespoň tři průměry, pak v ní existuje bod, z něhož vychází jediný průměr.

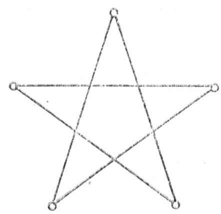
Teď již snadno dokážeme tvrzení úlohy indukcí podle n. Pro $n = 3$ zřejmě tvrzení platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro každou k-prvkovou množinu bodů. Nechť M_{k+1} je libovolná množina $k + 1$ bodů A_1, A_2, ..., A_{k+1}. Jestliže v M_{k+1} existuje bod (např. A_1), ze kterého vychází nejvýše jeden průměr, je zřejmě počet průměrů množiny M_{k+1} nejvýše o 1 větší než počet průměrů množiny $\{A_2, A_3, \ldots, A_{k+1}\}$. Z indukčního předpokladu plyne, že M_{k+1} má pak nejvýše $k + 1$ průměrů. Předpokládejme dále, že z každého bodu množiny M_{k+1} vycházejí alespoň dva průměry, pak z předcházející úvahy plyne, že z každého bodu množiny M_{k+1} vycházejí právě dva průměry. Protože každý průměr spojuje dva body, je celkový počet průměrů množiny M_{k+1} roven $k + 1$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Poznámka. Pro každé $n \geqq 3$ existuje množina bodů v rovině, která má právě n průměrů (obr. 56). Pro lichá n jsou také takovou množinou vrcholy pravidelného n-úhelníku (obr. 57). V prvním příkladu vychází z jednoho bodu více než dva a z některých bodů jen po jednom průměru, ve druhém příkladu vycházejí z každého bodu právě dva průměry.

Uvažujeme-li $n > 3$ bodů v prostoru, pak maximální počet průměrů je $2n - 2$. Důkaz tohoto tvrzení je obtížnější.



Obr. 56



Obr. 57

45. Označme p_A počet žáků, kteří vyřešili jen úlohu A, p_{AB} počet žáků, kteří vyřešili právě úlohy A a B atd. Podmínky úlohy zapíšeme rovnicemi

$$\begin{aligned} p_A + p_B + p_C + p_{AB} + p_{AC} + p_{BC} + p_{ABC} &= 25, \\ p_B + p_{BC} &= 2(p_C + p_{BC}), \\ p_A &= 1 + p_{AB} + p_{AC} + p_{ABC}, \\ p_A + p_B + p_C &= 2(p_B + p_C), \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned} p_A + p_B + p_C + p_{AB} + p_{AC} + p_{BC} + p_{ABC} &= 25, & (1) \\ p_B - 2p_C - p_{BC} &= 0, & (2) \\ p_A - p_{AB} - p_{AC} - p_{ABC} &= 1, & (3) \\ p_A - p_B - p_C &= 0. & (4) \end{aligned}$$

Sečtením prvních tří rovnic dostaneme

$$2p_A + 2p_B - p_C = 26.$$

Dosadíme-li sem za p_A podle (4), vyjde

$$4p_B + p_C = 26.$$

Této rovnici vyhovuje právě sedm dvojic nezáporných celých čísel (p_B, p_C): (0, 26), (1, 22), (2,18), (3, 14), (4, 10), (5, 6), (6, 2). Podle (2) je

$$p_B - 2p_C \geqq 0,$$

čemuž vyhovuje jedině poslední z uvedených sedmi dvojic, totiž $p_B = 6$, $p_C = 2$. Jen úlohu B tedy vyřešilo 6 žáků.

Poznámka. Úloze zřejmě vyhovují ty sedmice nezáporných celých čísel, pro které platí $p_A = 8$, $p_B = 6$, $p_C = 2$, $p_{BC} = 2$, $p_{AB} + p_{AC} + p_{ABC} = 7$. Situace popsaná v úloze může tedy skutečně nastat.

46. Do dané rovnosti můžeme dosadit za $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ funkci úhlů α, β, protože

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\pi - \alpha - \beta}{2} = \operatorname{cotg} \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Dalšími úpravami postupně dostáváme

$$a\left(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cotg} \frac{\alpha + \beta}{2}\right) + b\left(1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{cotg} \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 0,$$

$$a\left(\cos \beta \cos \alpha \sin \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \beta \sin \alpha \cos \frac{\alpha + \beta}{2}\right) +$$

$$+ b\left(\cos \alpha \cos \beta \sin \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \alpha \sin \beta \cos \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 0,$$

$$a \cos \beta \sin \frac{\beta - \alpha}{2} + b \cos \alpha \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 0,$$

$$\sin \frac{\beta - \alpha}{2} (a \cos \beta - b \cos \alpha) = 0.$$

Je tedy buď $\sin \frac{\beta - \alpha}{2} = 0$, tj. $\beta = \alpha$, a pak je trojúhelník rovnoramenný, nebo

$$a \cos \beta - b \cos \alpha = 0, \text{ tj. } a \cos \beta = b \cos \alpha,$$

což spolu s rovností (sinová věta)

$$a \sin \beta = b \sin \alpha$$

dává $a^2 = b^2$. I v tomto případě je tedy trojúhelník rovnoramenný.

2. řešení. Danou podmínku můžeme přepsat na tvar

$$(a + b) \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta. \tag{1}$$

Odtud již vidíme, že úhly α, β musí být ostré. Levá strana je totiž kladná, a kdyby např. úhel β byl tupý, bylo by

$$a < b, \qquad \operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} (\pi - \beta) = -\operatorname{tg} \beta$$

a pravá strana by byla záporná. Teď si stačí uvědomit, že funkce tangens je ryze konvexní v intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, takže pro ostré úhly α, β platí

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} \leqq \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{2} \tag{2}$$

s rovností, právě když $\alpha = \beta$. Předpokládejme, že $\alpha \neq \beta$. Pak ve (2) bude ostrá nerovnost a podle (1) tedy máme

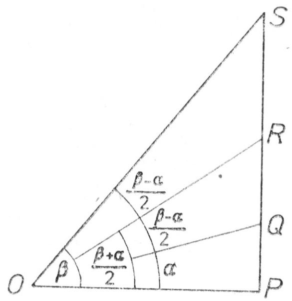
$$\frac{a + b}{2} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) > a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta,$$

neboli

$$\frac{b - a}{2} \operatorname{tg} \alpha > \frac{b - a}{2} \operatorname{tg} \beta.$$

Odtud bychom pro $a < b$ dostali $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta$ a pro $a > b$ zase $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \beta$, což odporuje skutečnosti, že tangens je rostoucí funkce.

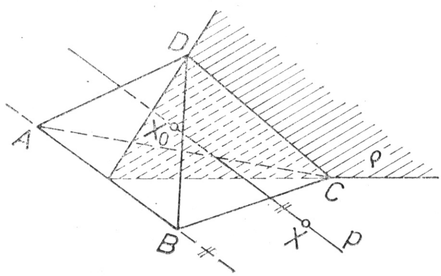
Poznámka. O platnosti nerovnosti (2) se můžeme přesvědčit z obr. 58, kde $|PQ| = \operatorname{tg} \alpha$, $|PR| = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$, $|PS| = \operatorname{tg} \beta$ a pro $\alpha < \beta$ je zřejmě $|QR| < |RS|$, takže $|PR| < \frac{|PQ| + |PS|}{2}$. Jiný přístup umožňuje matematická analýza. Druhá derivace funkce tangens je v intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ kladná a funkce tangens je tam tedy konvexní, z čehož okamžitě vyplývá nerovnost (2).



Obr. 58

47. Označme ϱ rovinu souměrnosti hrany AB pravidelného čtyřstěnu $ABCD$. Vrcholy C, D zřejmě leží v rovině ϱ. Pro libovolný bod X prostoru označme X_0 jeho pravoúhlý průmět do roviny ϱ (obr. 59). Potom

$$|AX_0| + |BX_0| \leqq |AX| + |BX|. \tag{1}$$



Obr. 59

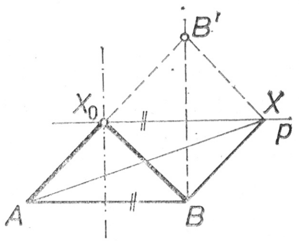
Probíhá-li totiž bod X přímku $p \parallel AB$, $p \neq AB$, je $|AX| + |BX|$ minimální, je-li $|AX| = |BX|$, jak snadno zjistíme pomocí osové souměrnosti a trojúhelníkové nerovnosti (obr. 60). V (1) nastane rovnost, právě když $X \in \varrho$ nebo leží-li bod X na úsečce AB. Dále je

$$|CX| + |DX| = \sqrt{|CX_0|^2 + |XX_0|^2} + \sqrt{|DX_0|^2 + |XX_0|^2} \geqq$$
$$\geqq |CX_0| + |DX_0|$$

s rovností, právě když $X \in \varrho$. Je tedy

$$|AX| + |BX| + |CX| + |DX| > |AX_0| + |BX_0| + |CX_0| + |DX_0|, \quad (2)$$

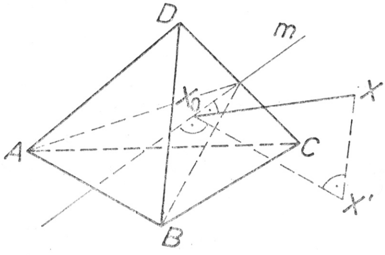
právě když $X \notin \varrho$.



Obr. 60

To znamená, že neleží-li bod X v rovině souměrnosti některé hrany čtyřstěnu $ABCD$, najdeme bod X_0, pro který platí (2). Funkce $f(X) = |AX| + |BX| + |CX| + |DX|$ tedy nemůže nabývat minima jinde než ve středu T čtyřstěnu $ABCD$, který je jediným bodem ležícím ve všech šesti rovinách souměrnosti hran. (Existence minima plyne ze spojitosti funkce f.)

2. řešení. Označme m spojnici středů hran AB a CD a pro libovolný bod X prostoru označme X_0 jeho pravoúhlý průmět na přímku m (obr. 61).



Obr. 61

Je-li X' pravoúhlý průmět bodu X do roviny obsahující hranu AB a přímku m, je

$$|AX| + |BX| = \sqrt{|AX'|^2 + |XX'|^2} + \sqrt{|BX'|^2 + |XX'|^2} \geqq |AX'| + |BX'| \geqq$$
$$\geqq |AX_0| + |BX_0|$$

(přímky AB a X_0X' jsou rovnoběžné) s rovností, právě když X leží na m nebo na úsečce AB. Podobně dostaneme

$$|CX| + |DX| \geqq |CX_0| + |DX_0|$$

s rovností, právě když X leží na m nebo na úsečce CD. Stačí tedy zkoumat jen body X ležící na přímce m.

Otočme úsečku CD kolem přímky m do roviny určené přímkami AB, m; dostaneme úsečku $C'D'$ (obr. 62). Pro každý bod $X \in m$ je pak

$$|AX| + |BX| + |CX| + |DX| = |AX| + |BX| + |C'X| + |D'X|,$$

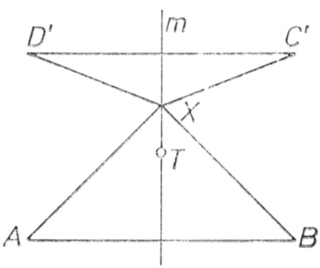
přitom

$$|AX| + |D'X| \geqq |AT| + |D'T|, \ |BX| + |C'X| \geqq |BT| + |C'T|,$$

kde T je střed čtyřstěnu, takže

$$|AX| + |BX| + |C'X| + |D'X| \geqq |AT| + |BT| + |CT| + |DT|$$

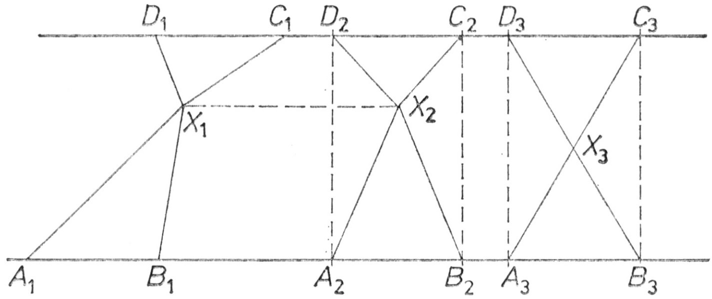
s rovností, právě když $X = T$.



Obr. 62

3. řešení. Zvolme libovolný bod X v prostoru. Trojúhelníky XAB, XCD (jeden z nich případně redukovaný na úsečku) umístěme v rovině tak, aby měly rovnoběžné základny $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ a společný vrchol X_1 ležel v pásu jimi určeném (obr. 63). Pak bude

$$|AX| + |BX| + |CX| + |DX| = |A_1X_1| + |B_1X_1| + |C_1X_1| + |D_1X_1|,$$
$$|A_1B_1| = |AB| = |CD| = |C_1D_1|$$



Obr. 63

a vzdálenost rovnoběžek A_1B_1, C_1D_1 bude alespoň tak velká jako vzdálenost mimoběžek AB, CD, tj. alespoň $\frac{|AB|}{\sqrt{2}}$. Použijeme-li dvakrát principu z obr. 60, dostaneme (obr. 63)

$$|A_1X_1| + |B_1X_1| + |C_1X_1| + |D_1X_1| \geqq$$
$$\geqq |A_2X_2| + |B_2X_2| + |C_2X_2| + |D_2X_2| \geqq$$
$$\geqq |A_3X_3| + |B_3X_3| + |C_3X_3| + |D_3X_3| \geqq 2\,|A_3C_3|.$$

Protože

$$|A_3C_3| = \sqrt{|A_3B_3|^2 + |B_3C_3|^2} \geqq |AB|\sqrt{\frac{3}{2}},$$

je

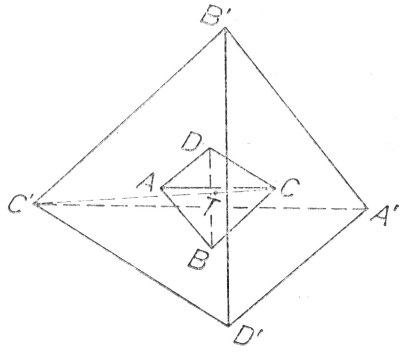
$$|AX| + |BX| + |CX| + |DX| \geqq |AB|\sqrt{6}$$

a rovnost nastane, právě když

$$|AX| = |BX| = |CX| = |DX| = |AB|\frac{\sqrt{6}}{4},$$

tj. právě pro $X = T$, kde T je střed čtyřstěnu.

4. řešení. Označme T střed pravidelného čtyřstěnu $ABCD$. Vedeme-li jeho vrcholy roviny rovnoběžné s protějšími stěnami, dostaneme čtyřstěn $A'B'C'D'$ stejnolehlý s původním čtyřstěnem $ABCD$ ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem —3 (obr. 64).



Obr. 64

Zvolme libovolný bod X v prostoru. Zřejmě

$$|AX| \geqq d(X, B'C'D'), \; |BX| \geqq d(X, A'C'D'), \; |CX| \geqq d(X, A'B'D'),$$
$$|DX| \geqq d(X, A'B'C'),$$

kde $d(X, B'C'D')$ označuje vzdálenost bodu X od roviny $B'C'D'$ apod. V nerovnosti

$$\begin{aligned} |AX| + |BX| + |CX| + |DX| \geqq d(X, B'C'D') + d(X, A'C'D') + \\ + d(X, A'B'D') + d(X, A'B'C') \end{aligned} \tag{3}$$

přitom nastane rovnost, právě když $X = T$.

Objem čtyřstěnu $XB'C'D'$ (případně degenerovaného) je

$$V_{XB'C'D'} = \frac{S}{3} d(X, B'C'D'),$$

kde S je obsah trojúhelníku $B'C'D'$. Obdobné vztahy platí i pro ostatní trojice bodů A', B', C', D'. Je tedy

$$\begin{aligned} d(X, B'C'D') + d(X, A'C'D') + d(X, A'B'D') + d(X, A'B'C') = \\ = \frac{3}{S}(V_{XB'C'D'} + V_{XA'C'D'} + V_{XA'B'D'} + V_{XA'B'C'}). \end{aligned} \tag{4}$$

Dokážeme, že sjednocení čtyřstěnů $XB'C'D'$, $XA'C'D'$, $XA'B'D'$, $XA'B'C'$ obsahuje čtyřstěn $A'B'C'D'$. To je zřejmé, je-li bod X bodem čtyřstěnu $A'B'C'D'$. Leží-li bod X vně tohoto čtyřstěnu, uvažujme libovolný bod P téhož čtyřstěnu. Označme jako R ten bod čtyřstěnu $A'B'C'D'$, který leží na přímce PX a má od bodu X největší vzdálenost. Bod R leží v některé stěně čtyřstěnu $A'B'C'D'$. Leží-li např. ve stěně $A'B'C'$, pak bod P leží ve čtyřstěnu $XA'B'C'$. Je tedy

$$V_{XB'C'D'} + V_{XA'C'D'} + V_{XA'B'D'} + V_{XA'B'C'} \geqq V_{A'B'C'D'} \tag{5}$$

s rovností, právě když bod X leží v čtyřstěnu $A'B'C'D'$. Ze vztahů (3), (4) a (5) dostaneme nerovnost

$$|AX| + |BX| + |CX| + |DX| \geqq \frac{3}{S} V_{A'B'C'D'} = v' = 3v,$$

kde v' a v jsou výšky čtyřstěnů $A'B'C'D'$ a $ABCD$. Rovnost zde nastane, právě když $X = T$.

Poznámka. V průběhu 4. řešení jsme odvodili zajímavou větu: Součet vzdáleností bodu pravidelného čtyřstěnu od jeho stěn je konstantní a rovná se jeho výšce.

48. Rovnost dokážeme matematickou indukcí.

Pro $n = 1$ rovnost platí:

$$\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} 2x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x} =$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{\sin 2x}.$$

Nechť tvrzení platí pro přirozené číslo k. Dokážeme je pro $k + 1$. Podle indukčního předpokladu dostáváme

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^{k+1}x} = \operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} 2^k x + \frac{1}{\sin 2^{k+1}x} =$$

$$= \operatorname{cotg} x - \frac{\cos 2^k x}{\sin 2^k x} + \frac{1}{2 \sin 2^k x \cos 2^k x} =$$

$$= \operatorname{cotg} x - \frac{2 \cos^2 2^k x - 1}{2 \sin 2^k x \cos 2^k x} = \operatorname{cotg} x - \frac{\cos 2^{k+1} x}{\sin 2^{k+1} x} =$$

$$= \operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} 2^{k+1} x$$

a důkaz je hotov.

2. řešení. Stejně jako v předcházejícím řešení dokážeme, že

$$\frac{1}{\sin 2x} = \operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} 2x.$$

To nám umožňuje upravit levou stranu dokazované rovnosti

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n x} = (\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} 2x) +$$
$$+ (\operatorname{cotg} 2x - \operatorname{cotg} 4x) + \ldots + (\operatorname{cotg} 2^{n-1}x - \operatorname{cotg} 2^n x) =$$
$$= \operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} 2^n x.$$

49. Libovolnou permutací indexů 1, 2, 3, 4 získáme soustavu týchž rovnic, změní se pouze jejich pořadí. Nechť (i, j, k, l) je takové pořadí indexů 1, 2, 3, 4, pro které $a_i > a_j > a_k > a_l$. Označme po řadě a_i, a_j, a_k, a_l písmeny b_1, b_2, b_3, b_4 a x_i, x_j, x_k, x_l písmeny y_1, y_2, y_3, y_4. Potom $b_r > b_s$ pro $r < s$ a danou soustavu můžeme zapsat ve tvaru

$$(b_1 - b_2)y_2 + (b_1 - b_3)y_3 + (b_1 - b_4)y_4 = 1, \qquad (1)$$
$$(b_1 - b_2)y_1 + (b_2 - b_3)y_3 + (b_2 - b_4)y_4 = 1, \qquad (2)$$
$$(b_1 - b_3)y_1 + (b_2 - b_3)y_2 + (b_3 - b_4)y_4 = 1, \qquad (3)$$
$$(b_1 - b_4)y_1 + (b_2 - b_4)y_2 + (b_3 - b_4)y_3 = 1. \qquad (4)$$

Odečtením druhé rovnice od prvé dostáváme

$$(b_1 - b_2)(-y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 0,$$

a protože $b_1 - b_2 \neq 0$,

$$-y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0. \qquad (5)$$

Obdobně (2) a (3) dává

$$-y_1 - y_2 + y_3 + y_4 = 0, \qquad (6)$$

(3) a (4) dává

$$-y_1 - y_2 - y_3 + y_4 = 0. \qquad (7)$$

Odečtením rovnic (5), (6) dostáváme $y_2 = 0$, obdobně z rovnic (6), (7) plyne $y_3 = 0$. Sečtením (5) a (7) vyjde $y_1 = y_4$. Dosazením do kterékoli z rovnic (1) až (4) dostaneme $y_4 = \dfrac{1}{b_1 - b_4}$. Zkouškou se přesvědčíme, že

$$y_1 = \frac{1}{b_1 - b_4},\ y_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 = \frac{1}{b_1 - b_4}$$

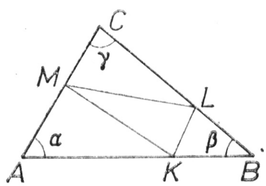
je skutečně řešením soustavy (1)—(4). Původní soustava má tedy právě jedno řešení $x_i = x_l = \dfrac{1}{a_i - a_l}$, $x_j = x_k = 0$.

Poznámka. Úlohu je možno zobecnit na soustavu n rovnic

$$\sum_{k=1}^{n} |a_i - a_k| x_k = 1, \qquad i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou daná navzájem různá reálná čísla. Analogickým postupem můžeme dokázat, že tato soustava má právě jedno řešení $x_{i_1} = x_{i_n} = \dfrac{1}{a_{i_1} - a_{i_n}}$, $x_{i_2} = x_{i_3} = \ldots = x_{i_{n-1}} = 0$, kde $i_1, i_2, \ldots, i_n$ je pořadí indexů $1, 2, \ldots, n$, pro něž $a_{i_1} > a_{i_2} > \ldots > a_{i_n}$.

50. Označme P_{XYZ} obsah trojúhelníku XYZ. Platí (obr. 65)



Obr. 65

$$\frac{P_{AKM}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}|AM|\,.\,|AK| \sin\alpha}{\frac{1}{2}|AB|\,.\,|AC| \sin\alpha} = \frac{|AM|\,.\,|AK|}{|AB|\,.\,|AC|},$$

obdobně

$$\frac{P_{BKL}}{P_{ABC}} = \frac{|BK|\,.\,|BL|}{|AB|\,.\,|BC|}, \quad \frac{P_{CML}}{P_{ABC}} = \frac{|CM|\,.\,|CL|}{|AC|\,.\,|BC|}.$$

Součin těchto tří poměrů je roven

$$\frac{|AK|\,.\,|BK|\,.\,|BL|\,.\,|CL|\,.\,|AM|\,.\,|CM|}{|AB|^2\,.\,|BC|^2\,.\,|AC|^2}.$$

Protože $\sqrt{|AK|.|BK|} \leqq \frac{|AK| + |BK|}{2} = \frac{|AB|}{2}$, je $\frac{|AK|.|BK|}{|AB|^2} \leqq \frac{1}{4}$.

Obdobně $\frac{|BL|.|CL|}{|BC|^2} \leqq \frac{1}{4}$, $\frac{|AM|.|CM|}{|AC|^2} \leqq \frac{1}{4}$. Vynásobením dostaneme

$$\frac{|AK|.|BK|.|BL|.|CL|.|AM|.|CM|}{|AB|^2.|BC|^2.|AC|^2} \leqq \frac{1}{64},$$

tedy alespoň jeden z trojúhelníků AKM, BKL, CML má obsah nepřevyšující čtvrtinu obsahu trojúhelníku ABC.

2. řešení. Označme K_0, L_0, M_0 středy stran AB, BC, CA. Střední příčky K_0L_0, L_0M_0, M_0K_0 rozdělí trojúhelník ABC na čtyři části s obsahem $\frac{P_{ABC}}{4}$. Rozlišíme dva případy.

a) Dva z bodů K, L, M leží na obvodu téhož »rohového« trojúhelníku např. jako na obr. 66, kdy zřejmě

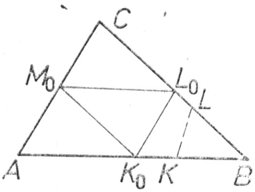
$$P_{BLK} \leqq P_{BL_0K_0} = \frac{1}{4} P_{ABC}.$$

b) Na obvodu každého z »rohových« trojúhelníků leží po jednom z bodů K, L, M jako na obr. 67. Úloha bude vyřešena, dokážeme-li, že pro obsah »vnitřního« trojúhelníku je $P_{KLM} \geqq \frac{P_{ABC}}{4}$ (pak totiž

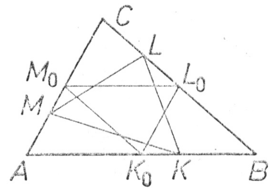
$$P_{AKM} + P_{BLK} + P_{CML} \leqq \frac{3}{4} P_{ABC}$$

a alespoň jeden z trojúhelníků AKM, BLK, CML bude mít obsah nejvýše $\frac{1}{4} P_{ABC}$). Protože vzdálenost bodu K od přímky LM je větší nebo rovna vzdálenosti bodu K_0, je $P_{KLM} \geqq P_{K_0LM}$. Podobně $P_{K_0LM} \geqq P_{K_0L_0M} = P_{K_0L_0M_0} = \frac{1}{4} P_{ABC}$. Tím je důkaz proveden.

Poznámka. Dá se také dokázat, že obsah aspoň jednoho z trojúhelníků MAK, KBL, LCM je nanejvýš roven obsahu trojúhelníku KLM. Toto tvrzení platí, i když nahradíme obsah obvodem, důkaz je však obtížný.



Obr. 66



Obr. 67

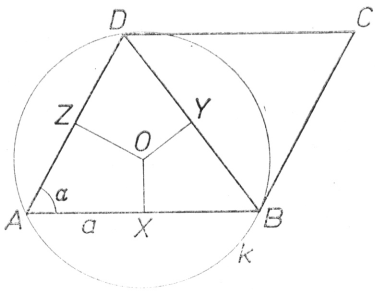
51. Označme O střed kružnice k opsané trojúhelníku ABD a r její poloměr. Označme dále K_A, K_B, K_C, K_D jednotkové kruhy se středy A, B, C, D.

Nejprve ukážeme, že v případě $r \leqq 1$ je rovnoběžník $ABCD$ pokryt kruhy K_A, K_B, K_C, K_D. Označíme-li X, Y, Z středy úseček AB, BD, AD, bude (obr. 68)

$$|AX| \leqq |AO| = r \leqq 1, \; |AZ| \leqq r \leqq 1$$

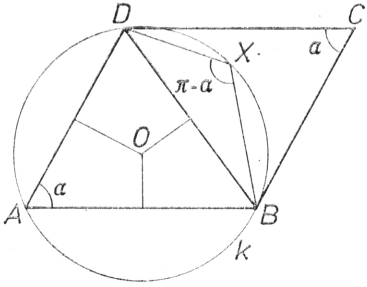
a kruh K_A tedy pokrývá čtyřúhelník $AXOZ$. Analogicky zjistíme, že kruh K_B pokrývá čtyřúhelník $BXOY$ a kruh K_D čtyřúhelník $DYOZ$. Je tedy $ABD \subset K_A \cup K_B \cup K_D$. Ze stejného důvodu je $BCD \subset K_B \cup K_C \cup K_D$.

Je-li $r > 1$, kruhy K_A, K_B, K_D už trojúhelník ABD nepokryjí, protože žádný z uvedených kruhů neobsahuje bod O. Bod O neleží ani v kruhu K_C.

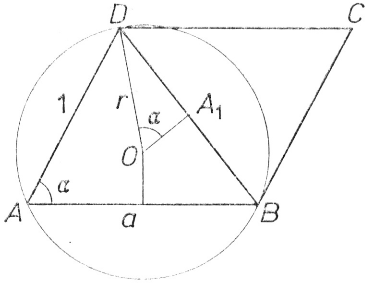


Obr. 68

Bod C leží totiž vně kružnice k, neboť je $|\sphericalangle BCD| = \alpha < \frac{\pi}{2}$, zatímco pro body X poloroviny BDC, které leží na kružnici k nebo uvnitř, platí (obr. 69) $|\sphericalangle BXD| \geqq \pi - \alpha > \frac{\pi}{2}$. Je tedy $|OC| > r > 1$.



Obr. 69



Obr. 70

Jednotkové kruhy se středy A, B, C, D tedy pokrývají rovnoběžník $ABCD$, právě když pro poloměr r kružnice opsané trojúhelníku ABD platí $r \leqq 1$. Nyní je z trojúhelníku OA_1D (obr. 70)

$$r = \frac{|BD|}{2 \sin \alpha} \quad \text{a} \quad |BD| = \sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \alpha}$$

podle kosinové věty. Je tedy

$$r = \frac{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \alpha}}{2 \sin \alpha}.$$

Z podmínky $r \leqq 1$ dostáváme postupně ekvivalentní podmínky

$$1 + a^2 - 2a \cos \alpha \leqq 4 \sin^2\alpha,$$
$$(a - \cos \alpha)^2 - 3 \sin^2\alpha \leqq 0,$$
$$(a - \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha)(a - \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha) \leqq 0,$$
$$\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha \leqq a \leqq \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha.$$

Levá strana poslední nerovnosti je však splněna vždy, protože trojúhelník ABD je ostroúhlý a je

$$a = |AB| > |AD| \cos \alpha = \cos \alpha.$$

Jednotkové kruhy se středy A, B, C, D pokrývají tedy rovnoběžník $ABCD$, právě když

$$a \leqq \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha.$$

52. Označme A, B, C, D vrcholy čtyřstěnu tak, aby $|AB| = x \leqq 1$, $|AC| \leqq 1$, $|BC| \leqq 1$, $|AD| \leqq 1$, $|BD| \leqq 1$, $|CD| > 1$. Dále označme P patu výšky trojúhelníku ABC vedené ke straně AB, $|PC| = u$ (obr. 71). Zřejmě je

$$u = \sqrt{|AC|^2 - |AP|^2} \leqq \sqrt{1 - |AP|^2}$$

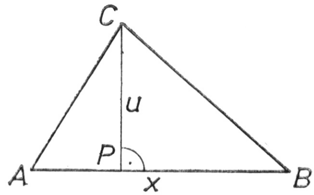
a zároveň

$$u = \sqrt{|BC|^2 - |BP|^2} \leqq \sqrt{1 - |BP|^2}.$$

Protože buď $|AP| \geqq \frac{x}{2}$ nebo $|BP| \geqq \frac{x}{2}$, platí $u \leqq \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$. Stejnými úvahami dostaneme pro výšku v trojúhelníku ABD vedenou ke straně AB $v \leqq \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$. Protože výška čtyřstěnu $ABCD$ sestrojená z vrcholu D má velikost nejvýše v a $x \leqq 1$, platí pro objem V čtyřstěnu $ABCD$ odhad

$$V \leqq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}xu\right)v \leqq \frac{1}{6}x\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = \frac{1}{6}x\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2}\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{6}x\left(1 - \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{8}(2x - x^2) = \frac{1}{8}(1 - (x - 1)^2) \leqq \frac{1}{8}.$$



Obr. 71

Rovnost nastane právě pro čtyřstěn $ABCD$, jehož hrany mají délky $|AB| = |AC| = |BC| = |AD| = |BD| = 1$ a jehož stěny ABC, ABD jsou navzájem kolmé. V tomto čtyřstěnu je $u = v = \sqrt{\frac{3}{4}}$, $|CD| = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} > 1$.

Poznámka. V závěru důkazu vlastně hledáme maximum funkce

$$g(x) = \frac{1}{6}x\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = \frac{1}{6}x - \frac{1}{24}x^3$$

v intervalu $(0, 1\rangle$. Toto maximum můžeme snadno najít derivováním. Platí

$$g'(x) = \frac{1}{6} - \frac{1}{8}x^2 > 0$$

pro všechna $x \in (0, 1\rangle$, tedy funkce g je v daném intervalu rostoucí, hledané maximum je v bodě $x = 1$ a $g(1) = \frac{1}{8}$.

Mají-li všechny hrany čtyřstěnu délku nejvýše 1, pak se dá ukázat, že jeho objem je nejvýše $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

53. Vyjdeme ze vztahu

$$\begin{aligned} c_p - c_q = p(p+1) - q(q+1) = p^2 - q^2 + p - q = \\ = (p-q)(p+q+1). \end{aligned}$$

Je tedy

$$\begin{aligned} &(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k) \ldots (c_{m+n} - c_k) = \\ &= (m+1-k)(m+k+2)(m+2-k)(m+k+3) \;.\; \ldots \;. \\ &. \, (m+n-k)(m+k+n+1) = AB, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} A &= (m-k+1)(m-k+2) \ldots (m-k+n), \\ B &= (m+k+2)(m+k+3) \ldots (m+k+n+1). \end{aligned}$$

Dále je

$$c_1 c_2 \ldots c_n = 1.2.2.3. \ldots n(n+1) = n!(n+1)!\,.$$

Ještě ukážeme, že číslo A - součin n po sobě následujících celých čísel - je dělitelné číslem $n!$. To je zřejmé, jestliže některý z činitelů je roven nule. Jsou-li všechny kladné, tj. $m - k + 1 > 0$, je

$$\frac{A}{n!} = \frac{(m-k+1)(m-k+2) \ldots (m-k+n)}{n!} = \binom{m-k+n}{n}.$$

Je-li $m - k + n < 0$, je

$$\frac{A}{n!} = (-1)^n \frac{(k-m-1)(k-m-2)\dots(k-m-n)}{n!} = (-1)^n \binom{k-m-1}{n}.$$

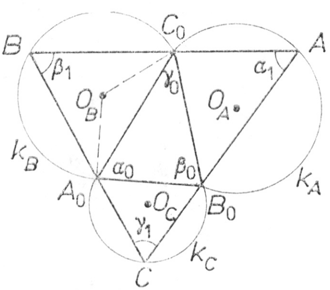
Tedy ve všech případech je A dělitelné číslem $n!$. Ze stejného důvodu je $(m+k+1)B$ dělitelné číslem $(n+1)!$. Protože $m+k+1$ je prvočíslo větší než $n+1$, jsou čísla $m+k+1$ a $(n+1)!$ nesoudělná a číslo B je dělitelné číslem $(n+1)!$. Součin $(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k) \dots (c_{m+n} - c_k) = AB$ je tedy dělitelný součinem $c_1 c_2 \dots c_n = n!(n+1)!$.

54. Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníků $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$ označme α_0, β_0, γ_0, α_1, β_1, γ_1. Uvažujme libovolný trojúhelník ABC, který vyhovuje požadavkům úlohy (ne nutně maximální). Vrcholy A, B, C pak leží (obr. 72) na obloucích kružnic k_A, k_B, k_C, z nichž jsou úsečky B_0C_0, A_0C_0, A_0B_0 vidět pod úhlem α_1, β_1, γ_1 (případně mohou některé vrcholy splynout s krajními body příslušného oblouku). Tyto oblouky i jejich středy O_A, O_B, O_C leží přitom vně trojúhelníku $A_0B_0C_0$, neboť trojúhelník $A_0B_0C_0$ je vepsán do trojúhelníku ABC a trojúhelník ABC je ostroúhlý.

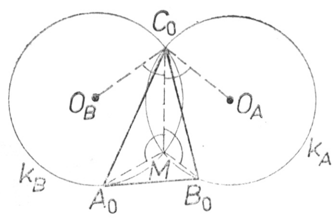
Vyšetříme nyní vzájemnou polohu kružnic k_A, k_B, k_C. Především zjistíme, že kružnice k_A, k_B se protnou v bodě $M \neq C_0$ ležícím uvnitř úhlu $A_0C_0B_0$, neboť (obr. 73)

$$|\sphericalangle O_AC_0O_B| = |\sphericalangle O_AC_0B_0| + |\sphericalangle B_0C_0A_0| + |\sphericalangle A_0C_0O_B| =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \alpha_1 + \gamma_0 + \frac{\pi}{2} - \beta_1 = \gamma_0 + \gamma_1 < \pi.$$



Obr. 72



Obr. 73

Protože

$$|\sphericalangle A_0MC_0| + |\sphericalangle B_0MC_0| = \pi - \beta_1 + \pi - \alpha_1 = \pi + \gamma_1 > \pi,$$

leží bod M uvnitř trojúhelníku $A_0B_0C_0$ a je

$$|\sphericalangle A_0MB_0| = \pi - \gamma_1.$$

Bod M tedy leží na kružnici k_C, takže všechny tři kružnice k_A, k_B, k_C procházejí společným bodem M.

Klíčem k řešení úlohy je zjištění, že trojúhelníky ABC a $O_AO_BO_C$ jsou podobné. Ze souvislosti středového a obvodového úhlu plyne (obr. 72)

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle A_0BC_0| = \frac{1}{2}|\sphericalangle A_0O_BC_0|,$$

a protože (obr. 74) O_AO_B, O_BO_C jsou osy úseček C_0M, A_0M, je

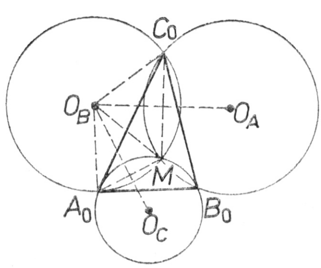
$$|\sphericalangle O_AO_BO_C| = |\sphericalangle O_CO_BM| + |\sphericalangle O_AO_BM| =$$
$$= \frac{1}{2}|\sphericalangle A_0O_BM| + \frac{1}{2}|\sphericalangle C_0O_BM| = \frac{1}{2}|\sphericalangle A_0O_BC_0|,$$

takže

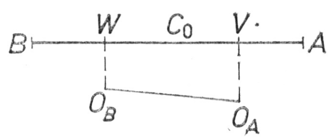
$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle O_AO_BO_C|.$$

Analogicky dokážeme, že $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle O_BO_AO_C|$.

Veďme kolmice z bodů O_A, O_B na stranu AB a jejich paty označme V, W (obr. 75). Zřejmě $|AB| = 2|VW| \leqq 2|O_AO_B|$ s rovností, právě když $AB \parallel O_AO_B$. V tomto případě má tedy trojúhelník ABC nejdelší strany ze všech trojúhelníků vyhovujících úloze, a tedy i největší obsah. Zároveň je vidět, že (obr. 76) maximální trojúhelník ABC je stejnolehlý s trojúhelníkem $O_AO_BO_C$ se středem M a koeficientem 2.

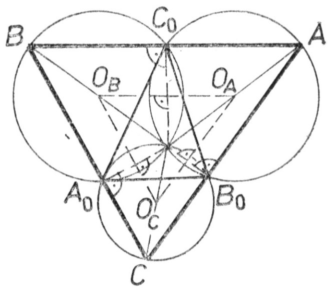


Obr. 74



Obr. 75

Odtud plyne konstrukce maximálního trojúhelníku ABC. Známým postupem sestrojíme vně trojúhelníku $A_0B_0C_0$ středy O_A, O_B, O_C kruhových oblouků, z nichž jsou strany B_0C_0, A_0C_0, A_0B_0 vidět pod úhly α_1, β_1, γ_1. Body A_0, B_0, C_0 pak vedeme rovnoběžky s přímkami O_BO_C, O_AO_C, O_AO_B. Ty vytvoří trojúhelník ABC (obr. 76).



Obr. 76

Z úvah provedených v rozboru vyplývá, že takto sestrojený trojúhelník ABC má požadované vlastnosti. Úloha má vždy jediné řešení.

Poznámka. Při konstrukci maximálního trojúhelníku jsme mohli také využít toho, že jsou jeho strany kolmé k přímkám MA_0, MB_0, MC_0.

55. Můžeme předpokládat, že čísla $a_1, \ldots, a_8$ jsou očíslována tak, že $|a_1| \geqq |a_2| \geqq \ldots \geqq |a_8|$. Dále můžeme předpokládat, že $a_1 = 1$, protože $a_1 \neq 0$ a

$$c'_n = \frac{c_n}{a_1^n} = 1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n + \ldots + \left(\frac{a_8}{a_1}\right)^n$$

je rovno nule pro stejnou množinu indexů jako c_n. Uvažujme tedy posloupnost

$$c_n = 1 + a_2^n + \ldots + a_8^n,$$

kde

$$1 \geqq |a_2| \geqq \ldots \geqq |a_8|.$$

Pro n sudé je zřejmě $c_n > 0$. Tedy c_n je rovno nule pro nekonečně mnoho lichých indexů n.

Nechť k z čísel $a_1, \ldots, a_8$ je rovno 1 a l z těchto čísel je rovno -1, potom pro liché n je

$$c_n = k - l + \sum_{i=k+l+1}^{8} a_i^n.$$

Protože pro dostatečně velké n zřejmě platí

$$\left| \sum_{i=k+l+1}^{8} a_i^n \right| \leqq 8\, |a_{k+l+1}|^n < 1$$

a $c_n = 0$ pro nekonečně mnoho lichých indexů, je nutně $k = l$ a

$$c_n = \sum_{i=k+l+1}^{8} a_i^n$$

pro lichá n. Postupujeme-li dále stejným způsobem, zjistíme, že mezi čísly a_i s druhou největší absolutní hodnotou jich je stejný počet kladných i záporných, atd. Čísla $a_1, \ldots, a_8$ se tedy skládají ze čtyř dvojic opačných čísel, takže $c_n = 0$ právě pro všechna lichá n.

Poznámka. Zřejmě není podstatné, že čísel a_i je právě 8. Dokázané tvrzení zůstane v platnosti i pro posloupnost

$$c_n = a_1^n + \ldots + a_r^n,$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_r$ jsou reálná čísla (je-li r liché, je zřejmě lichý počet čísel a_i roven nule).

Uvažujeme-li komplexní čísla a_i, tvrzení neplatí. Nechť např. $a_1, \ldots, a_8$ jsou všechny osmé (komplexní) odmocniny z 1. Snadno se ukáže, že $c_n = 0$, právě když n není dělitelné osmi.

56. Označme x_k, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, počet medailí, které zbyly na začátku k-tého dne. Podle zadání je pro $1 \leqq k \leqq n - 1$

$$x_1 = m,$$
$$x_{k+1} = \frac{6}{7}(x_k - k). \tag{1}$$

Vypočteme-li několik prvních členů, vidíme, že pro $2 \leqq k \leqq n$

$$x_k = \left(\frac{6}{7}\right)^{k-1} m - \left(\frac{6}{7}\right)^{k-1} - 2\left(\frac{6}{7}\right)^{k-2} - \ldots - (k-2)\left(\frac{6}{7}\right)^2 -$$
$$- (k-1)\frac{6}{7},$$

což můžeme dokázat z rekurentního vzorce (1) matematickou indukcí. Protože $x_n = n$, dostáváme tak vztah

$$n = \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1} m - \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{6}{7}\right)^{n-2} - \ldots - (n-1)\frac{6}{7}. \qquad (2)$$

Vypočítáme součet

$$S = \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1} + 2\left(\frac{6}{7}\right)^{n-2} + \ldots + (n-1)\frac{6}{7}. \qquad (3)$$

Zřejmě je

$$\frac{7}{6}S = \left(\frac{6}{7}\right)^{n-2} + 2\left(\frac{6}{7}\right)^{n-3} + \ldots + (n-2)\frac{6}{7} + n - 1$$

a odečtením od (3)

$$-\frac{S}{6} = \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1} + \left(\frac{6}{7}\right)^{n-2} + \left(\frac{6}{7}\right)^{n-3} + \ldots + \frac{6}{7} + 1 - n =$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{6}{7}\right)^n}{1 - \frac{6}{7}} - n,$$

tedy

$$S = 6n - 42\left(1 - \left(\frac{6}{7}\right)^n\right).$$

Dosadíme do (2) a po malé úpravě vychází

$$m - 36 = \frac{7^n}{6^{n-1}}(n-6).$$

Protože 6 a 7 jsou nesoudělná čísla, musí být $\frac{n-6}{6^{n-1}}$ celé číslo, avšak pro $n > 1$ je $|n-6| < 6^{n-1}$. Je tedy $\frac{n-6}{6^{n-1}} = 0$, což dává $n = 6$, $m = 36$.

Snadno se přesvědčíme, že tyto hodnoty vyhovují úloze. Sportovní soutěž tedy trvala šest dní a bylo rozděleno 36 medailí.

57. Nechť trojúhelník ABC má při obvyklém značení úhly α, β, γ a strany $a = n$, $b = n + 1$, $c = n + 2$, kde n je přirozené číslo. Potom z kosinové věty plyne

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2 - n^2}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n+5}{2(n+2)},$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{n^2 + (n+2)^2 - (n+1)^2}{2n(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 3}{2n(n+2)}, \qquad (1)$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{n^2 + (n+1)^2 - (n+2)^2}{2n(n+1)} = \frac{n-3}{2n}.$$

Protože $\alpha < \beta < \gamma$, mohou nastat pouze tři možnosti:

a) $\beta = 2\alpha$. Potom

$$\frac{n+1}{n} = \frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha = \frac{n+5}{n+2}.$$

Tedy $n^2 + 3n + 2 = n^2 + 5n$ a $n = 1$. To však nedává řešení úlohy, neboť neexistuje trojúhelník se stranami 1, 2, 3.

b) $\gamma = 2\alpha$. Potom

$$\frac{n+2}{n} = \frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha = \frac{n+5}{n+2}.$$

Tedy $n^2 + 4n + 4 = n^2 + 5n$ a $n = 4$. Trojúhelník o stranách 4, 5, 6 existuje a splňuje podmínky úlohy. Ze vztahů (1) totiž vyplývá $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, $\cos\gamma = \frac{1}{8}$, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1}{8} = \cos\gamma$, tedy $\gamma = 2\alpha$.

c) $\gamma = 2\beta$. Potom

$$\frac{n+2}{n+1} = \frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = 2\cos\beta = \frac{n^2 + 2n + 3}{n(n+2)}.$$

Tedy $n^3 + 4n^2 + 4n = n^3 + 3n^2 + 5n + 3$,

$$n^2 - n - 3 = 0.$$

Kořeny této rovnice však nejsou přirozená čísla.

Dokázali jsme, že existuje jediný trojúhelník s požadovanými vlastnostmi - trojúhelník se stranami 4, 5, 6.

58. Předpokládejme, že n-ciferné číslo x vyhovuje úloze. Součin jeho číslic označme $P(x)$. Zřejmě

$$10^{n-1} \leqq x < 10^n.$$

Jestliže $n \geqq 3$, je

$$x^2 - 10x - 22 = x(x - 10) - 22 \geqq 10^{n-1}(10^{n-1} - 10) - 22 =$$
$$= 10^{2n-2} - 10^n - 22 \geqq 8 . 10^{2n-3} > 10^n$$

a

$$P(x) \leqq 9^n < 10^n,$$

tedy

$$x^2 - 10x - 22 > P(x).$$

Jsou tedy jen dvě možnosti: $n = 1$ a $n = 2$.

Jestliže $n = 1$, pak $P(x) = x$ a $x^2 - 10x - 22 = x$, tedy

$$x^2 - 11x - 22 = 0.$$

Této rovnici však nevyhovuje žádné přirozené číslo x. Nutně tedy $n = 2$. Nechť $x = 10a + b$, kde a, b jsou číslice čísla x, $1 \leqq a \leqq 9$, $0 \leqq b \leqq 9$. Pak $P(x) = ab$ a platí

$$(10a + b)^2 - 10(10a + b) - 22 = ab,$$

neboli

$$100a(a - 1) + b(19a - 10) + b^2 - 22 = 0. \quad (1)$$

Pro $a \geqq 2$ je zřejmě levá strana rovnice (1) kladná. Tedy $a = 1$ a z rovnice (1) dostáváme

$$b^2 + 9b - 22 = 0.$$

Odtud $b = 2$ a $x = 12$. Zkouškou se přesvědčíme, že $x = 12$ vyhovuje. Jediné přirozené číslo splňující podmínky úlohy je tedy $x = 12$.

2. řešení. Nechť

$$x = c_0 + 10c_1 + 10^2c_2 + \ldots + 10^{n-1}c_{n-1},$$

kde $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ jsou číslice čísla x, $c_{n-1} \neq 0$. Pak pro součin $P(x)$ číslic čísla x platí

$$P(x) = c_0\, c_1 \ldots c_{n-1} \leqq c_{n-1}\, 9^{n-1} \leqq c_{n-1}10^{n-1} \leqq x$$

Pro číslo x tedy platí

$$x^2 - 10x - 22 \leqq x,$$

neboli

$$x^2 - 11x - 22 \leqq 0.$$

Řešením této kvadratické nerovnice zjistíme, že $x < 13$. Protože $P(x) \geqq 0$, platí dále

$$x^2 - 10x - 22 \geqq 0$$

a odtud $x > 11$. Jediná možnost je tedy $x = 12$, a ta vyhovuje úloze.

59. Označme $P(x) = ax^2 + (b - 1)x + c$. Potom danou soustavu můžeme přepsat ve tvaru

$$\begin{aligned} P(x_1) &= x_2 - x_1, \\ P(x_2) &= x_3 - x_2, \\ &\dots \\ P(x_{n-1}) &= x_n - x_{n-1}, \\ P(x_n) &= x_1 - x_n. \end{aligned}$$

Sečtením dostáváme

$$P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_n) = 0. \tag{1}$$

a) Jestliže $(b - 1)^2 - 4ac < 0$, je buď $P(x) > 0$ pro všechna reálná x, nebo $P(x) < 0$ pro všechna reálná x, a proto nemůže platit (1).

b) Jestliže $(b - 1)^2 - 4ac = 0$, potom je buď $P(x) \geqq 0$ pro všechna reálná x, nebo $P(x) \leqq 0$ pro všechna reálná x. Ze vztahu (1) potom vyplývá $P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_n) = 0$. Rovnice $P(x) = 0$ má však právě jedno řešení $x = \dfrac{1 - b}{2a}$. Jediným řešením dané soustavy je tedy

$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \dfrac{1 - b}{2a}$, jak se snadno přesvědčíme.

c) Jestliže $(b - 1)^2 - 4ac > 0$, pak rovnice $P(x) = 0$ má dvě různá reálná řešení ξ, η. Snadno se přesvědčíme, že $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \xi$ a $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \eta$ jsou dvě různá reálná řešení dané soustavy.

Poznámka. V případě c) soustava může mít ještě další reálná řešení. Například pro $n = 2$, $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$ má soustava 4 reálná řešení (x_1, x_2): $(0, 0)$, $(3, 3)$, $\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}, \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}, \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

60. Nechť $ABCD$ je libovolný čtyřstěn, přičemž označení volíme tak, aby hrana AB byla nejdelší (popř. jedna z nejdelších). Pro stěny ABC, ABD čtyřstěnu platí trojúhelníkové nerovnosti

$$|AC| + |BC| > |AB|,$$
$$|AD| + |BD| > |AB|.$$

Sečtením dostaneme nerovnost

$$|AC| + |BC| + |AD| + |BD| > 2|AB|,$$

kterou můžeme přepsat na tvar

$$(|AC| + |AD| - |AB|) + (|BC| + |BD| - |AB|) > 0.$$

Je tedy buď $|AC| + |AD| > |AB|$, nebo $|BC| + |BD| > |AB|$. Protože hrana AB je nejdelší, je možno buď z úseček AC, AD, AB, nebo z úseček BC, BD, AB sestrojit trojúhelník.

61. a) Z dané podmínky plyne pro každé reálné x, že $f(x + a) \geqq \frac{1}{2}$ a zároveň $f(x) - (f(x))^2 \geqq 0$, tedy $\frac{1}{2} \leqq f(x) \leqq 1$ pro každé x. Navíc je

$$f(x + 2a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x + a) - (f(x + a))^2} =$$
$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2} - \frac{1}{4} - \sqrt{f(x) - (f(x))^2} - f(x) + (f(x))^2} =$$
$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + (f(x))^2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2} =$$
$$= \frac{1}{2} + \left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = f(x),$$

neboť jak už víme, $f(x) \geqq \frac{1}{2}$. Tedy $f(x + 2a) = f(x)$ pro každé číslo x.

b) Definujme funkci f následujícím předpisem:

$$f(x) = \frac{1}{2} \quad \text{pro} \quad x \in \langle 2k, 2k + 1),$$
$$f(x) = 1 \quad \text{pro} \quad x \in \langle 2k + 1, 2k + 2),$$

kde k je celé číslo. Snadno se přesvědčíme, že takto definovaná funkce f vyhovuje podmínkám úlohy.

Poznámka. Obecně lze funkci f s požadovanými vlastnostmi definovat takto:

pro $x \in \langle 0, 1)$ definujeme f libovolně tak, aby $\frac{1}{2} \leqq f(x) \leqq 1$,

pro $x \in \langle 1, 2)$ položíme $f(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x-1) - (f(x-1))^2}$,

pro ostatní reálná x definujeme $f(x)$ tak, aby funkce f byla periodická s periodou 2.

2. řešení. Zavedeme funkci $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$. Protože $\frac{1}{2} \leqq f(x) \leqq 1$, je $0 \leqq g(x) \leqq \frac{1}{2}$ pro všechna x. Danou podmínku můžeme psát ve tvaru

$$g(x+a) = \sqrt{g(x) + \frac{1}{2} - (g(x))^2 - g(x) - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4} - (g(x))^2}\,.$$

Pro hodnoty funkce g tedy platí

$$(g(x+a))^2 = \frac{1}{4} - (g(x))^2$$

a také

$$(g(x+2a))^2 = \frac{1}{4} - (g(x+a))^2.$$

Porovnáním těchto dvou vztahů dostaneme

$$(g(x+2a))^2 = (g(x))^2,$$

a protože $g(x) \geqq 0$, je

$$g(x+2a) = g(x)$$

pro každé x. Funkce g má tedy periodu $2a$, což zřejmě platí i pro funkci f.

3. řešení. Z dané podmínky vyjádříme $f(x)$ pomocí $f(x+a)$. Rovnici přepíšeme

$$f(x+a) - \frac{1}{2} = \sqrt{f(x) - (f(x))^2}$$

a obě strany umocníme. Dostaneme tak pro $f(x)$ kvadratickou rovnici

$$(f(x))^2 - f(x) + \left(f(x+a) - \frac{1}{2}\right)^2 = 0,$$

která má kořeny

$$\frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - (f(x+a))^2}, \quad \frac{1}{2} - \sqrt{f(x+a) - (f(x+a))^2}.$$

Druhý kořen je menší než $\frac{1}{2}$, takže

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - (f(x+a))^2}$$

pro každé x. Je tedy také

$$f(x-a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2},$$

tudíž $f(x-a) = f(x+a)$ pro každé x.

62. Je-li k tak velké, aby $2^k > n$, je

$$\frac{n+2^k}{2^{k+1}} < 1, \quad \text{takže} \quad \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] = 0.$$

Uvažovaný součet tedy obsahuje pro každé n jen konečný počet nenulových sčítanců.

Srovnejme k-té sčítance součtů S_n a S_{n+1}. Zřejmě

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] \leqq \left[\frac{n+1+2^k}{2^{k+1}}\right]$$

(odtud plyne, že $S_n \leqq S_{n+1}$). Protože

$$\frac{n+1+2^k}{2^{k+1}} - \frac{n+2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}},$$

je

$$\left[\frac{n+1+2^k}{2^{k+1}}\right] - \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] \leqq 1. \tag{1}$$

Rovnost zde nastane, právě když existuje přirozené číslo p tak, že

$$\frac{n+2^k}{2^{k+1}} < p \leqq \frac{n+1+2^k}{2^{k+1}},$$

neboli

$$n + 2^k < p.2^{k+1} \leqq n + 2^k + 1.$$

Musí tedy platit

$$p.2^{k+1} = n + 2^k + 1,$$

tj.

$$2^k(2p - 1) = n + 1. \qquad (2)$$

Odtud vidíme, že k danému n existuje právě jedno k tak, aby platilo (2), a tedy v (1) nastala rovnost, totiž počet dvojek v rozkladu čísla $n + 1$ na prvočinitele. Je tedy $S_{n+1} = S_n + 1$. Snadno spočteme, že $S_1 = 1$, takže $S_n = n$.

2. řešení. Přirozená čísla 1, 2, ..., n rozdělíme do dvou skupin: na čísla lichá, kterých je $\left[\frac{n+1}{2}\right]$, a na čísla sudá. Sudá čísla dále rozdělíme opět do dvou skupin: na čísla nedělitelná čtyřmi - těch je $\left[\frac{n+2}{4}\right]$ - a na čísla dělitelná čtyřmi. Poslední skupinu dále dělíme na čísla nedělitelná osmi - těch je $\left[\frac{n+4}{8}\right]$ - a zbytek. Tak postupujeme, dokud nevyčerpáme všechna přirozená čísla 1, 2, ..., n. Odtud vidíme, že $S_n = n$.

Podrobněji: Označme M_k, $k \geqq 0$ celé, množinu všech přirozených čísel $m \leqq n$ dělitelných číslem 2^k a nedělitelných číslem 2^{k+1}. Žádné dvě z těchto množin zřejmě nemají společný prvek a sjednocení všech těchto množin je $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ukážeme, že počet prvků množiny M_k je právě $|\mathsf{M}_k| = \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$.

Prvky množiny M_k jsou totiž čísla tvaru $m = 2^k(2c - 1)$, pro která $m \leqq n$. Je jich tedy právě tolik, pro kolik přirozených čísel c platí

$$2^k(2c - 1) \leqq n,$$

neboli

$$c \leqq \frac{n + 2^k}{2^{k+1}}.$$

Takových čísel c je právě $\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right]$. Tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} |\mathsf{M}_k| = |\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathsf{M}_k| = |\{1, 2, \ldots, n\}| = n.$$

Poznámka. Uvažujeme-li místo čísla 2 libovolné prvočíslo p, dostaneme obecnější výsledek:

$$\left[\frac{n + 1}{p}\right] + \left[\frac{n + p}{p^2}\right] + \left[\frac{n + p^2}{p^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n + 2}{p}\right] + \left[\frac{n + 2p}{p^2}\right] +$$

$$+ \left[\frac{n + 2p^2}{p^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n + p - 1}{p}\right] + \left[\frac{n + (p-1)p}{p^2}\right] +$$

$$+ \left[\frac{n + (p-1)p^2}{p^3}\right] + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{p-1} \left[\frac{n + jp^k}{p^{k+1}}\right] = n.$$

3. řešení. Číslo n vyjádříme ve dvojkové soustavě:

$$n = \sum_{i=0}^{r} c_i 2^i, \quad c_r = 1, \; c_i \in \{0, 1\}.$$

Potom $\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right] = 0$ pro $k > r$. Jestliže $k \leqq r$, platí

$$\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right] = \left[\frac{c_r 2^r + c_{r-1} 2^{r-1} + \ldots + (c_k + 1)2^k + \ldots + 2c_1 + c_0}{2^{k+1}}\right] =$$

$$= c_r 2^{r-k-1} + c_{r-1} 2^{r-k-2} + \ldots + c_{k+1} +$$

$$+ [(c_k + 1)2^{-1} + c_{k-1} 2^{-2} + \ldots + c_1 2^{-k} + c_0 2^{-k-1}].$$

Protože

$$c_{k-1} 2^{-2} + \ldots + c_1 2^{-k} + c_0 2^{-k-1} \leqq 2^{-2} + 2^{-3} + \ldots + 2^{-k-1} < \frac{1}{2},$$

je

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] = c_r 2^{r-k-1} + c_{r-1}2^{r-k-2} + \ldots + c_{k+1} + \left[\frac{c_k+1}{2}\right] =$$

$$= c_r 2^{r-k-1} + c_{r-1}2^{r-k-2} + \ldots + c_{k+1} + c_k.$$

Platí tedy

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] = c_0 + c_1 + 2c_2 + 2^2c_3 + \ldots + c_{r-1}2^{r-2} + c_r 2^{r-1},$$

$$\left[\frac{n+2}{4}\right] = c_1 + c_2 + 2c_3 + \ldots + c_{r-1}2^{r-3} + c_r 2^{r-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left[\frac{n+2^{r-1}}{2^r}\right] = c_{r-1} + c_r,$$

$$\left[\frac{n+2^r}{2^{r+1}}\right] = c_r.$$

Sečteme-li těchto $r+1$ rovností, zjistíme, že hledaný součet je roven $c_0 + 2c_1 + \ldots + 2^r c_r = n$.

4. řešení je založeno na rovnosti

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x] - [x],$$

kterou snadno ověříme. Pro hledaný součet tak máme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] =$$

$$= \left[\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}\right] + \ldots + =$$

$$= [n] - \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2^k}\right] - \left[\frac{n}{2^{k+1}}\right] + \ldots =$$

$$= [n] = n,$$

neboť nenulových sčítanců je jen konečný počet.

Poznámka. 4. řešení zaručuje, že uvažovaný součet je pro libovolné reálné číslo n roven $[n]$. To platí i pro obecnější součet, o němž jsme se zmínili v předešlé poznámce.

63. Pro každé přirozené číslo n a přirozené číslo $k > 1$ je

$$\begin{aligned} n^4 + 4k^4 &= n^4 + 4n^2k^2 + 4k^4 - 4n^2k^2 = \\ &= (n^2 + 2k^2)^2 - (2nk)^2 = \\ &= (n^2 + 2k^2 + 2nk)\,(n^2 + 2k^2 - 2nk), \end{aligned}$$

přičemž

$$n^2 + 2k^2 + 2nk > 1$$

a

$$n^2 + 2k^2 - 2nk = (n - k)^2 + k^2 > 1.$$

Čísla tvaru $a = 4k^4$, $k \in \{2, 3, \ldots\}$, mají tedy požadovanou vlastnost, že číslo $n^4 + a$ je složené pro libovolné přirozené číslo n.

64. Užitím vzorce $\cos(a_i + x) = \cos a_i \cos x - \sin a_i \sin x$ dostáváme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} \cos(a_i + x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\cos a_i \cos x}{2^{i-1}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\sin a_i \sin x}{2^{i-1}} =$$
$$= A \cos x - B \sin x,$$

kde $A = \sum_{i=1}^{n} \frac{\cos a_i}{2^{i-1}}$ a $B = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sin a_i}{2^{i-1}}$ jsou konstanty.

Obě ty.o konstanty nemohou být zároveň nulové. Kdyby tomu tak bylo, měli bychom

$$0 = |A \cos a_1 + B \sin a_1| = \left| 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} \cos(a_1 - a_i) \right| \geqq$$
$$\geqq 1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Tedy alespoň jedno z čísel A, B je různé od nuly.

Nechť x_1, x_2 jsou reálná čísla, pro která platí $f(x_1) = f(x_2) = 0$, tj.

$$\begin{aligned} A \cos x_1 - B \sin x_1 &= 0, \\ A \cos x_2 - B \sin x_2 &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Je-li $A = 0$, $B \neq 0$, je pak $\sin x_1 = \sin x_2 = 0$, tedy $x_1 - x_2 = k\pi$, kde k je celé číslo. Je-li $A \neq 0$, $B = 0$, je $\cos x_1 = \cos x_2 = 0$ a $x_1 - x_2 = k\pi$, kde k je celé číslo. Zbývá případ $A \neq 0$, $B \neq 0$. Kdyby $\cos x_1 = 0$, ze vztahu (1) by plynulo, že $\sin x_1 = 0$, což není možné. Tedy $\cos x_1 \neq 0$ a obdobně $\cos x_2 \neq 0$. Z (1) tak dostáváme

$$\operatorname{tg} x_1 = \frac{A}{B} = \operatorname{tg} x_2,$$

tedy opět $x_1 - x_2 = k\pi$, kde k je celé číslo.

2. řešení. Nechť $f(x_1) = 0$ a x je libovolné reálné číslo. Pak

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\cos(a_i + x)}{2^{i-1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\cos((a_i + x_1) + (x - x_1))}{2^{i-1}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \cos(x - x_1) \frac{\cos(a_i + x_1)}{2^{i-1}} - \sum_{i=1}^{n} \sin(x - x_1) \frac{\sin(a_i + x_1)}{2^{i-1}} =$$

$$= \cos(x - x_1) f(x_1) + \sin(x - x_1) \sum_{i=1}^{n} \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + a_i + x_1\right)}{2^{i-1}} =$$

$$= \sin(x - x_1) f\left(\frac{\pi}{2} + x_1\right).$$

Kdyby $f\left(\dfrac{\pi}{2} + x_1\right) = 0$, bylo by $f(x) = 0$ pro všechna reálná x, avšak

$$f(-a_1) = \cos 0 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\cos(a_i - a_1)}{2^{i-1}} > 1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} > 0.$$

Je tedy $f\left(\dfrac{\pi}{2} + x_1\right) \neq 0$. Jestliže $f(x_2) = 0$, platí

$$0 = f(x_2) = \sin(x_2 - x_1) f\left(\frac{\pi}{2} + x_1\right),$$

tedy $\sin(x_2 - x_1) = 0$ a $x_2 - x_1 = k\pi$, kde k je celé číslo.

3. **řešení** využívá diferenciálního počtu. Pro druhou derivaci uvažované funkce f platí

$$f''(x) = -f(x).$$

Této diferenciální rovnici vyhovují právě všechny funkce tvaru

$$f(x) = A \cos (x + \varphi),$$

kde A, φ jsou reálná čísla. Protože $f(-a_1) \neq 0$, je také $A \neq 0$. Jestliže tedy $f(x_1) = f(x_2) = 0$, potom

$$\cos (x_1 + \varphi) = \cos (x_2 + \varphi) = 0$$

a odtud $x_1 - x_2 = k\pi$, kde k je celé číslo.

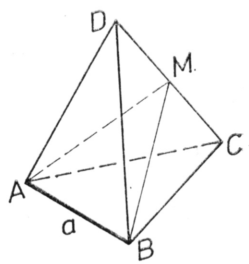
65. Postupně vyšetříme jednotlivé případy.

a) $k = 1$. Označení zvolme tak, aby platilo $|AB| = a$, $|AC| = |AD| = |BC| = |BD| = |CD| = 1$. Označme M střed hrany CD (obr. 77). Potom

$$|AM| = |BM| = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ a } |AB| < |AM| + |BM| = \sqrt{3},$$

tedy

$$a < \sqrt{3}. \tag{1}$$

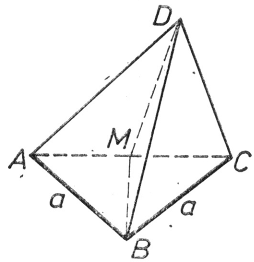


Obr. 77

Obráceně ukážeme, že podmínka (1) je i postačující. Sestrojíme rovnostranné trojúhelníky ACD, BCD a otáčením trojúhelníku BCD kolem společné hrany CD můžeme díky podmínce (1) dosáhnout, aby $|AB| = a$.

b) $k = 2$. Hrany o délce a mohou být buď přilehlé, nebo protilehlé. Nejdříve zvolíme označení tak, aby $|AB| = |BC| = a$, $|AC| = |AD| = |BD| = |CD| = 1$. Označme M střed hrany AC (obr. 78). Potom

$$|MD| = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ a } |MB| = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}.$$



Obr. 78

V trojúhelníku MBD platí

$$|MB| - |MD| < |BD| < |MB| + |MD|,$$

neboli

$$\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 < \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

a odtud

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} < a < \sqrt{2 + \sqrt{3}}. \tag{2}$$

Obráceně, je-li splněna podmínka (2), platí $a > \sqrt{2 - \sqrt{3}} > \frac{1}{2}$. Podmínka (2) tak umožňuje sestrojit trojúhelník ABC se stranami $|AB| = |BC| = a$, $|AC| = 1$, rovnostranný trojúhelník ACD a hledaný čtyřstěn dostaneme jejich otáčením kolem společné hrany AC, až bude $|BD| = 1$.

V případě protilehlých hran délky a zvolíme označení tak, aby $|AB| = |CD| = a$, $|AC| = |BC| = |AD| = |BD| = 1$. Je-li M střed hrany AB (obr. 79), je

$$|MC| = |MD| = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}},$$

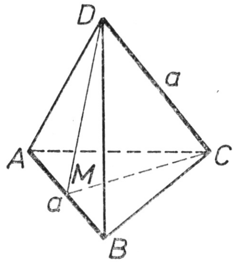
takže

$$a = |CD| < |MC| + |MD| = 2\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}},$$

neboli

$$a < \sqrt{2}. \tag{3}$$

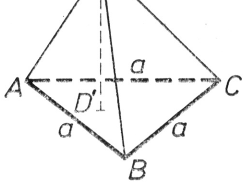
Podmínka (3) je zřejmě i postačující pro existenci čtyřstěnu $ABCD$ v tomto případě.



Obr. 79

Z podmínek (2) a (3) plyne, že pro $k = 2$ existuje požadovaný čtyřstěn, právě když $a < \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$.

c) $k = 3$. Pro hledaný čtyřstěn máme tři možnosti. Nechť nejprve hrany délky 1 vycházejí z jednoho vrcholu. Zvolme označení tak, aby $|AB| = |AC| = |BC| = a$, $|AD| = |BD| = |CD| = 1$ (obr. 80). Průmět D' bodu D do roviny ABC pak splývá se středem kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC. Poloměr této kružnice je roven $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Požadovaný čtyřstěn



Obr. 80

můžeme tedy sestrojit, právě když $\frac{a\sqrt{3}}{3} < 1$, tj. právě když

$$a < \sqrt{3}. \tag{4}$$

Nechť nyní vycházejí z jednoho vrcholu hrany délky a. Zvolme označení tak, aby $|AB| = |AC| = |BC| = 1$, $|AD| = |BD| = |CD| = a$. Čtyřstěn s těmito hranami existuje, právě když existuje čtyřstěn s hranami $|AB| = |AC| = |BC| = \frac{1}{a}$, $|AD| = |BD| = |CD| = 1$. Podle předcházejícího výsledku takovýto čtyřstěn existuje, právě když $\frac{1}{a} < \sqrt{3}$, tj. právě když

$$a > \frac{\sqrt{3}}{3}. \tag{5}$$

Protože pro každé $a > 0$ je splněna alespoň jedna z podmínek (4), (5), hledaný čtyřstěn existuje v případě $k = 3$ pro libovolné $a > 0$. Nemusíme už tedy vyšetřovat další případ (např. $|AB| = |BC| = |CD| = a$, $|AC| = |AD| = |BD| = 1$).

d) $k = 4$. Tento případ lehko převedeme na případ $k = 2$. Čtyřstěn se čtyřmi hranami délky a a dvěma hranami délky 1 existuje, právě když existuje čtyřstěn se čtyřmi hranami délky 1 a dvěma délky $\frac{1}{a}$. Užitím výsledku pro $k = 2$ dostáváme nutnou a postačující podmínku

$$\frac{1}{a} < \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2}), \text{ tj. } a > \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

e) $k = 5$ převedeme na případ $k = 1$ stejným způsobem. Ze vztahu (1) tak plyne nutná a postačující podmínka $\frac{1}{a} < \sqrt{3}$, tj.

$$a > \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Výsledky zapíšeme do tabulky:

k	Podmínka
1	$0 < a < \sqrt{3}$
2	$0 < a < \sqrt{2 + \sqrt{3}}$
3	$0 < a$
4	$\sqrt{2 - \sqrt{3}} < a$
5	$\frac{\sqrt{3}}{3} < a$

Poznámka. Pro $k = 3$ již nebylo nutné vyšetřovat třetí případ, kdy ze tří hran délky a jsou dvě protilehlé, např. $|AB| = |BC| = |CD| = a$, $|AC| = |AD| = |BD| = 1$. V tomto případě čtyřstěn existuje, právě když

$$\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} < a < \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}},$$

neboli

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} < a < \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

V případě $k = 3$ můžeme také postupovat následovně. Položme $M = \max(1, a)$, $m = \min(1, a)$. Sestrojíme rovnostranný trojúhelník ABC o straně m a v jeho středu sestrojíme kolmici k rovině ABC. Na ní pak najdeme bod D tak, aby $|AD| = M$. Pro každé $a > 0$ jsme tak sestrojili čtyřstěn s předepsanými vlastnostmi.

66. Označme O_1, O_2, O_3 středy a r_1, r_2, r_3 poloměry kružnic k_1, k_2, k_3. Dále označme H_1, H_2, H_3 jejich body dotyku s přeponou AB. Střed kružnice k označme O a poloměr r. Porovnáme velikosti úseček omezených body H_1, H_2, H_3 s poloměry r_1, r_2, r_3 a dokážeme tak, že středy O_1, O_2, O_3

leží v přímce. Přímka souměrně sdružená s AB podle osy procházející body O_1, O_2, O_3 je pak hledanou společnou tečnou kružnic k_1, k_2, k_3.

Označme ještě $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AD| = p$, $|BD| = q$, $\dfrac{a+b+c}{2} = s$. Body dotyku kružnice k_1 rozdělí strany trojúhelníku ABC na části o velikostech u, v, w (obr. 81), pro které zřejmě platí

$$u = s - a,\quad v = s - b,\quad w = s - c.$$

Odtud vidíme, že

$$|AH_1| = s - a,\quad r_1 = s - c.$$

Z trojúhelníku O_2H_2O je podle Pythagorovy věty (obr. 82)

$$\left(\frac{c}{2} - r_2\right)^2 = r_2^2 + \left(r_2 + q - \frac{c}{2}\right)^2,$$

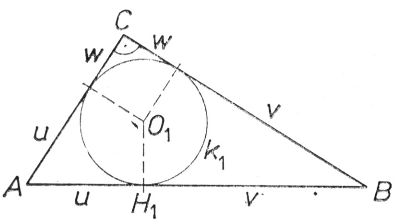
čili

$$(r_2 + q)^2 = qc$$

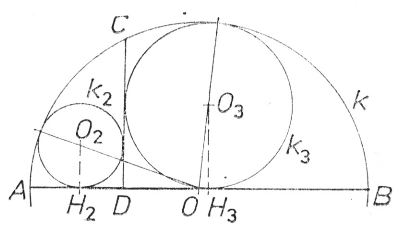
$\left(\text{to platí i v případě, kdy } O = H_2\text{, tj. } r_2 = q = \dfrac{c}{4}\right).$

Podle Euklidovy věty o odvěsně v trojúhelníku ABC je $qc = a^2$, takže

$$r_2 = a - q.$$



Obr. 81



Obr. 82

Analogicky dostaneme z trojúhelníku O_3H_3O, že

$$r_3 = b - p.$$

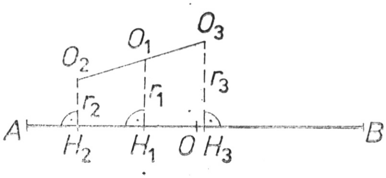
Dále je

$$|AH_2| = p - r_2 = p + q - a = c - a,$$
$$|AH_3| = p + r_3 = b.$$

Předpokládáme-li, že $a \geqq b$ (čímž neztratíme na obecnosti), nastane situace v obr. 83, kde

$$|AH_2| + |AH_3| = b + c - a = 2(s - a) = 2|AH_1|,$$
$$r_2 + r_3 = a + b - p - q = a + b - c = 2(s - c) = 2r_1.$$

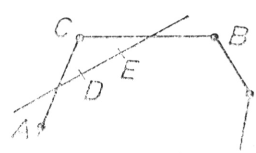
Bod H_1 je tedy středem úsečky H_2H_3 a bod O_1 středem úsečky O_2O_3.



Obr. 83

67. Konvexním obalem množiny bodů M rozumíme nejmenší konvexní množinu obsahující množinu M. Konvexním obalem konečné množiny bodů M v rovině, které neleží v jedné přímce, je mnohoúhelník, jehož každý vrchol je z množiny M.

Zvolme tři vrcholy A, B, C konvexního obalu daných n bodů. Další dva body D, E můžeme vybrat $\binom{n-3}{2}$ způsoby. Přitom vždy alespoň dva z bodů A, B, C leží v téže polorovině určené přímkou DE - zvolme označení tak, aby to byly body A, B (obr. 84). Potom A, B, D, E jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníku. Kdyby tomu tak nebylo, byl by konvexním obalem bodů A, B, D, E trojúhelník a jeden z bodů A, B by ležel uvnitř něho. To však odpo-

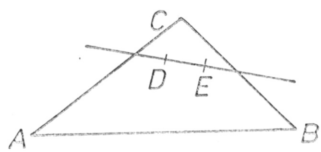


Obr. 84

ruje tomu, že body A, B, C jsme zvolili ve vrcholech konvexního obalu daných n bodů. Nalezli jsme tak $\binom{n-3}{2}$ různých konvexních čtyřúhelníků.

2. řešení. Vyšetříme nejprve případ $n = 5$. Máme dokázat, že existuje alespoň $\binom{5-3}{2} = 1$ konvexních čtyřúhelníků s vrcholy v daných bodech. Konvexní obal daných pěti bodů A, B, C, D, E může být trojúhelník, čtyřúhelník nebo pětiúhelník. Je-li to pětiúhelník, pak libovolná čtveřice jeho vrcholů tvoří konvexní čtyřúhelník. Případ, že konvexním obalem je čtyřúhelník, je rovněž jasný.

Dejme tomu, že konvexním obalem bodů A, B, C, D, E je trojúhelník ABC. Body D, E tedy leží uvnitř trojúhelníku ABC. Dva z bodů A, B, C (např. A, B) musí ležet ve stejné polorovině určené přímkou DE (obr. 85). Potom body A, B, D, E tvoří konvexní čtyřúhelník.



Obr. 85

Uvažujme nyní obecný případ $n \geqq 5$. V každé z $\binom{n}{5}$ pětic daných bodů vybereme čtveřici tvořící konvexní čtyřúhelník (existenci takovéto čtveřice jsme již dokázali). Každá čtveřice je obsažena v právě $n - 4$ pěticích, tedy libovolná čtveřice bodů tvořících konvexní čtyřúhelník mohla být vybrána nejvýše z $n - 4$ pětic. Máme tedy alespoň $\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}$ různých čtveřic daných bodů, které tvoří konvexní čtyřúhelník. Stačí nám nyní ukázat, že pro $n \geqq 5$

$$\frac{1}{n-4}\binom{n}{5} \geqq \binom{n-3}{2}.$$

Ekvivalentními úpravami dostáváme

$$n(n-1)(n-2) \geqq 60(n-4). \tag{1}$$

Zřejmě pro $n \geqq 9$ je $n(n-1) > 60$ a $n-2 > n-4$, nerovnost (1) tedy platí. Pro zbylé případy $n = 5, 6, 7, 8$ snadno ověříme pravdivost vztahu (1) dosazením.

Poznámka. Odhad, který jsme dokázali v 2. řešení, je značně lepší než odhad, který bylo třeba dokázat v úloze. Pro velká n je

$$\frac{\binom{n}{5}}{n-4} \sim \frac{n^4}{120},$$

zatímco

$$\binom{n-3}{2} \sim \frac{n^2}{2}.$$

68. Jmenovatele zlomků označíme postupně L, P_1 a P_2. Odhadneme L pomocí P_1, P_2. Platí

$$L = P_1 + P_2 + x_1y_2 + x_2y_1 - 2z_1z_2,$$

přičemž

$$x_1y_2 + x_2y_1 - 2z_1z_2 = \frac{x_1}{x_2}(P_2 + z_2^2) + \frac{x_2}{x_1}(P_1 + z_1^2) - 2z_1z_2 =$$

$$= \frac{x_1}{x_2}P_2 + \frac{x_2}{x_1}P_1 + \left(z_1\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} - z_2\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\right)^2 \geqq$$

$$\geqq \frac{x_1}{x_2}P_2 + \frac{x_2}{x_1}P_1 \geqq 2\sqrt{P_1P_2}.$$

Zde jsme užili (a ještě několikrát užijeme) nerovnost $a + b \geqq 2\sqrt{ab}$, která zřejmě platí pro všechna $a, b > 0$, a rovnost v ní nastane, právě když $a = b$. Je tedy

$$L \geqq P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1P_2} = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2 > 0$$

a rovnost nastane, právě když současně

$$z_1\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = z_2\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \quad \text{a} \quad \frac{x_1}{x_2}P_2 = \frac{x_2}{x_1}P_1. \tag{1}$$

Abychom dokázali danou nerovnost

$$\frac{8}{L} \leqq \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2},$$

stačí dokázat nerovnost

$$\frac{8}{(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2} \leqq \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2},$$

což není obtížné:

$$\frac{8}{P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1 P_2}} \leqq \frac{8}{4\sqrt{P_1 P_2}} = \frac{2\sqrt{P_1 P_2}}{P_1 P_2} \leqq \frac{P_1 + P_2}{P_1 P_2}.$$

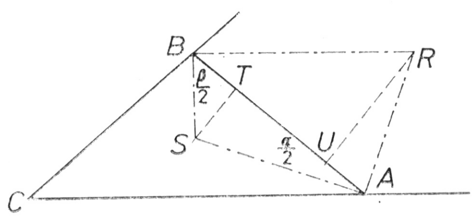
Zde nastane rovnost, právě když $P_1 = P_2$. Připojíme-li ještě podmínky (1), snadno zjistíme, že rovnost v zadané nerovnosti nastane, právě když $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ a $z_1 = z_2$.

69. Střed S kružnice vepsané trojúhelníku ABC dostaneme jako průsečík os úhlů BAC a ABC (jejich velikosti označme α a β), průsečík os příslušných úhlů vedlejších je středem R kružnice připsané (obr. 86). Z pravoúhlých trojúhelníků ATS, BTS, AUR a BUR pak dostaneme jednak

$$|AB| = |AT| + |TB| = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} + \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{r\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}},$$

jednak

$$|AB| = |AU| + |UB| = \varrho \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \varrho \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \varrho\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right),$$



Obr. 86

takže porovnáním obou vztahů máme

$$\frac{r}{\varrho} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

Je-li M vnitřní bod úsečky AB a označíme-li $\delta = |\sphericalangle AMC|$, dostaneme pro trojúhelníky AMC a MBC analogicky

$$\frac{r_1}{\varrho_1} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}, \quad \frac{r_2}{\varrho_2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\delta}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2},$$

takže

$$\frac{r_1 r_2}{\varrho_1 \varrho_2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{\varrho}.$$

70. Je

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n},$$

právě když

$$A_{n-1}B_n - A_nB_{n-1} < 0.$$

Přitom

$$A_{n-1}B_n - A_nB_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k a^k \sum_{k=0}^{n} x_k b^k - \sum_{k=0}^{n} x_k a^k \sum_{k=0}^{n-1} x_k b^k =$$
$$= x_n b^n \sum_{k=0}^{n-1} x_k a^k - x_n a^n \sum_{k=0}^{n-1} x_k b^k = x_n \sum_{k=0}^{n-1} x_k (a^k b^n - a^n b^k) =$$
$$= x_n \sum_{k=0}^{n-1} x_k a^k b^k (b^{n-k} - a^{n-k}),$$

odkud je hned patrna platnost dokazovaného tvrzení.

2. řešení. Označme $p(t) = x_n t^n + x_{n-1}t^{n-1} + \ldots + x_1 t + x_0$, $q(t) = 1 - \dfrac{x_n t^n}{p(t)}$. Pak je $A_n = p(a)$, $B_n = p(b)$, $\dfrac{A_{n-1}}{A_n} = q(a)$, $\dfrac{B_{n-1}}{B_n} = q(b)$. Protože $x_0, x_1, \ldots, x_{n-2} \geqq 0$, $x_{n-1}, x_n > 0$, pro $t > 0$ funkce $p(t)$ roste, funkce

$$\frac{p(t)}{t^n} = x_n + x_{n-1}\frac{1}{t} + x_{n-2}\frac{1}{t^2} + \ldots + x_0\frac{1}{t^n}$$

klesá, funkce $\dfrac{x_n t^n}{p(t)}$ roste a funkce $q(t)$ klesá. Je tedy

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n},$$

právě když $a > b$.

71. a) Především je $\dfrac{a_{k-1}}{a_k} \leqq 1$, takže $b_n \geqq 0$ pro každé $n \geqq 1$. Dále máme pro $k \geqq 1$

$$\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}} = \left(1 + \sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}}\right)\left(1 - \sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}} \leqq$$

$$\leqq 2\left(1 - \sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}} \leqq 2\left(1 - \sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}}\right)\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right).$$

Sečteme-li tyto nerovnosti pro $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, dostaneme

$$b_n \leqq 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) < 2.$$

b) Za a_n zvolme geometrickou posloupnost $\dfrac{1}{q^{2n}}$, kde $0 < q < 1$. Pak je $a_0 = 1$,

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} (1 - q^2)q^k = (1 - q^2)q\,\frac{1 - q^n}{1 - q} =$$

$$= q(1 + q)(1 - q^n) > 2q^2(1 - q^n).$$

Je-li $q < 1$ pevné, bude vždy pro dostatečně velká n (přesněji pro $n > \log_q(1 - q)$)

$$1 - q^n > q, \text{ tj. } b_n > 2q^3.$$

Je-li dáno číslo $c \in \langle 0, 2)$, položme $q = \sqrt[3]{\dfrac{c}{2}}$. Pak bude

$$b_n > 2q^3 = c$$

pro všechna dostatečně velká n.

72. Předpokládejme, že požadovaný rozklad množiny $M = \{n, \ldots, n + 5\}$ na dvě neprázdné podmnožiny M_1 a M_2 existuje. Mezi šesti čísly množiny M existuje aspoň jedno dělitelné pěti, musí tedy být v každé množině M_1 i M_2 číslo dělitelné pěti a mohou to být jen čísla n a $n + 5$. Je tedy $n \geqq 5$ a z nerovnosti

$$n(n + 1) - (n + 5) = n^2 - 5 > 0$$

vidíme, že pro libovolná tři čísla $a, b, c \in M$ platí $ab > c$. Odtud plyne, že každá z množin M_1, M_2 je tříprvková. Protože čísla n a $n + 5$ patří do různých podmnožin, máme jen $\binom{4}{2} = 6$ možných rozkladů, přičemž je zřejmě

$$\begin{aligned} n(n + 1)(n + 2) &< (n + 3)(n + 4)(n + 5), \\ n(n + 1)(n + 3) &< (n + 2)(n + 4)(n + 5), \\ n(n + 1)(n + 4) &< (n + 2)(n + 3)(n + 5), \\ n(n + 2)(n + 3) &< (n + 1)(n + 4)(n + 5), \\ n(n + 2)(n + 4) &< (n + 1)(n + 3)(n + 5) \end{aligned}$$

a snadno se přesvědčíme, že také

$$n(n + 3)(n + 4) < (n + 1)(n + 2)(n + 5).$$

Rozklad uvedených vlastností tedy neexistuje pro žádné přirozené n.

2. řešení. Nechť p je prvočinitel některého čísla $a \in N = \{n + 1, \ldots, n + 4\}$. Existuje-li uvažovaný rozklad $M = M_1 \cup M_2$, p dělí ještě aspoň jedno číslo $b \in M$, $b \neq a$, takže musí být $p = 2$ nebo $p = 3$, neboť $|a - b| \leqq 4$. Množina N obsahuje dvě za sebou jdoucí lichá čísla větší než 1, která by tedy byla obě dělitelná třemi, což není možné.

3. řešení. Existuje-li uvažovaný rozklad $M = M_1 \cup M_2$, je součin

$$s_n = n(n + 1) \ldots (n + 5)$$

čtvercem přirozeného čísla. Jak již víme, je n dělitelné pěti. Protože ze šesti po sobě jdoucích čísel je nejvýše jedno dělitelné sedmi, nemůže být žádné z čísel množiny M sedmi dělitelné a je proto $n = 7k + 1$, kde k je celé nezáporné číslo.

Nyní si uvědomme, že n dělí součin prvků té podmnožiny, která číslo n neobsahuje, takže dělí také součin $(n + 1) \ldots (n + 5) = An + 120$, tedy n je dělitelem čísla 120.

Vzhledem k uvedeným vlastnostem přicházejí v úvahu jen čísla $n = 15$ a $n = 120$, ani jedno z čísel s_{15}, s_{120} však není čtvercem přirozeného čísla.

4. řešení. Označme a_i součin prvků množiny M_i, $i \in \{1, 2\}$. Dokážeme, že neexistuje ani takový rozklad $M = M_1 \cup M_2$, pro který by platilo

$$a_1 \equiv a_2 \pmod 7.$$

Víme, že existuje-li takový rozklad, žádné z čísel množiny M není dělitelné sedmi. Součin všech šesti za sebou jdoucích čísel z M dává tedy stejný zbytek modulo 7 jako

$$6! \equiv -1 \pmod 7.$$

Kdyby $a_1 \equiv a_2 \pmod 7$, platilo by

$$a_1^2 \equiv a_1 a_2 \equiv 6! \equiv -1 \pmod 7.$$

Rovnice

$$x^2 \equiv -1 \pmod 7)$$

však nemá řešení, jak se snadno přesvědčíme prozkoumáním všech zbytků modulo 7, takže rozklad požadované vlastnosti neexistuje pro žádné přirozené n.

73. Řešení je založeno na tom, že všechny tři stěnové úhly při vrcholu D jsou pravé, jak ukážeme (obr. 87). Především je zřejmé, že $AB \perp CDE$, takže $CD \perp AB$. To ovšem platí, i když $C = E$. Protože je také $CD \perp BD$ podle předpokladu, je $CD \perp ABD$, tedy také $CD \perp AD$. Záměnou bodů B a C v předchozí úvaze dostaneme $BD \perp AD$.

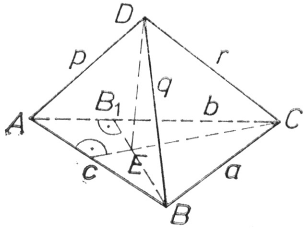
Při označení hran jako v obr. 87 platí podle Pythagorovy věty

$$2(p^2 + q^2 + r^2) = a^2 + b^2 + c^2.$$

Je tedy

$$6(p^2 + q^2 + r^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) =$$
$$= (a + b + c)^2 + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 \geqq (a + b + c)^2,$$

přičemž rovnost nastane, právě když $a = b = c$. Vidíme tedy, že rovnost v dokázané nerovnosti nastane pro jediný čtyřstěn (až na podobnost), jehož základnu tvoří rovnostranný trojúhelník ABC a $|AD| = |BD| = |CD| = \frac{\sqrt{2}}{2} |AB|$.



Obr. 87

2. řešení. Nad průměry BC a AB sestrojme kulové plochy. Ty se protínají v kružnici, která prochází body B a B_1 a leží v rovině kolmé k ABC, tj. v rovině $BB_1D = BED$. Bod D leží na první kulové ploše i v rovině BED, leží tedy i na druhé kulové ploše a úhel ADB je pravý. Provedeme-li stejnou úvahu pro kulovou plochu nad průměrem AC, zjistíme, že úhel ADC je pravý. Dále postupujeme jako v předcházejícím řešení.

3. řešení. Označme a, b, c, d vektory EA, EB, EC, ED. Bod E je průsečík výšek trojúhelníku ABC, takže

$$a.(b - c) = b.(c - a) = c.(a - b) = 0,$$

tj.

$$a.b = b.c = c.a. \tag{1}$$

Protože $DE \perp ABC$, je

$$a.d = b.d = c.d = 0. \tag{2}$$

Z rovnosti

$$(b - d).(c - d) = 0,$$

která vyjadřuje předpoklad $BD \perp CD$, a z (2) plyne

$$b.c + d.d = 0.$$

Podle (1) a (2) dostáváme odtud kolmost zbývajících dvojic hran ve vrcholu D

$$(b - d).(a - d) = 0, \qquad (a - d).(c - d) = 0.$$

Dále postupujeme jako v 1. řešení.

74. Každých n nekolineárních bodů určuje $T_n = \binom{n}{3}$ trojúhelníků. Označme O_n největší počet ostroúhlých trojúhelníků určených n nekolineárními body.

Uvažujme nyní určitých $n + 1$ nekolineárních bodů $A_1, \ldots, A_{n+1}$. Vynecháním k-tého z nich dostaneme n bodů, které určují o_{nk} ostroúhlých trojúhelníků. Pro celkový počet o_{n+1} ostroúhlých trojúhelníků určených těmito $n + 1$ body pak platí

$$o_{n+1} = \frac{o_{n1} + o_{n2} + \ldots + o_{n,n+1}}{n - 2},$$

neboť každý ostroúhlý trojúhelník jsme započetli $(n - 2)$-krát. Ze stejného důvodu je

$$T_{n+1} = \frac{n+1}{n-2} T_n. \qquad (1)$$

Je tedy pro každých $n + 1$ nekolineárních bodů

$$o_{n+1} \leqq \frac{n+1}{n-2} O_n,$$

takže i

$$O_{n+1} \leqq \frac{n+1}{n-2} O_n,$$

což spolu s (1) dává

$$\frac{O_{n+1}}{T_{n+1}} \leqq \frac{O_n}{T_n}.$$

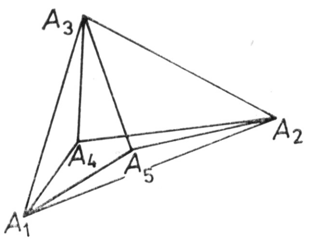
Podíl ostroúhlých trojúhelníků $\frac{O_n}{T_n}$ tvoří tedy nerostoucí posloupnost. Snadno zjistíme, že je $T_4 = 4$, $O_4 = 3$, takže $\frac{O_4}{T_4} = \frac{3}{4}$, dále je $T_5 = 10$, takže $O_5 \leqq \frac{3}{4} T_5 = 7{,}5$, tj. $O_5 \leqq 7$. Pro $n \geqq 5$ je tedy $\frac{O_n}{T_n} \leqq \frac{O_5}{T_5} = 0{,}7$.

Poznámka. Předcházející výsledek jsme mohli formulovat také takto: Existuje-li konstanta c taková, že pro nějaké n je $O_n \leqq cT_n$, pak je také $O_{n+1} \leqq cT_{n+1}$.

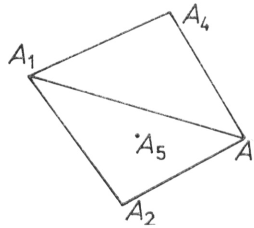
2. řešení. Nejprve ukážeme, že každá množina pěti nekolineárních bodů určuje aspoň tři neostroúhlé (tj. tupoúhlé nebo pravoúhlé) trojúhelníky.

a) Je-li konvexním obalem dané pětice bodů trojúhelník (obr. 88), pak leží dva body v jeho vnitřku (např. A_4, A_5). Každý z nich je společným vrcholem tří trojúhelníků s ostatními vrcholy v bodech A_1, A_2, A_3, z nichž aspoň dva a dva musí být tupoúhlé.

b) Je-li konvexním obalem dané pětice čtyřúhelník (obr. 89), pak aspoň v jednom z vrcholů čtyřúhelníku není ostrý úhel. Bod A_5, který leží uvnitř, musí ležet uvnitř jednoho z trojúhelníků, na které je čtyřúhelník rozdělen např. úhlopříčkou A_1A_3. Ten je však vrcholem aspoň dvou tupoúhlých trojúhelníků.

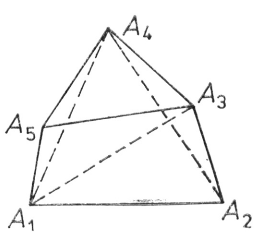


Obr. 88



Obr. 89

c) Je-li konvexním obalem dané pětice pětiúhelník, jsou aspoň ve dvou jeho vrcholech tupé úhly, protože součet vnitřních úhlů je 3π. Jsou-li ve zbývajících třech vrcholech úhly ostré, jsou aspoň dva z nich sousední, řekněme A_1, A_2 (obr. 90). Pak je ovšem ve čtyřúhelníku $A_1A_2A_3A_5$ aspoň jeden z úhlů při vrcholech A_3, A_5 neostrý.



Obr. 90

Každých pět nekolineárních bodů určuje 10 trojúhelníků, z nichž jak jsme ukázali, nejvýše 7 je ostroúhlých.

Množina 100 bodů obsahuje $\binom{100}{5}$ pětibodových podmnožin a ty určují nejvýš $7\binom{100}{5}$ ostroúhlých trojúhelníků, přitom ale každý takový trojúhelník započítáváme $\binom{97}{2}$-krát. Pro počet ostroúhlých trojúhelníků tak dostáváme odhad

$$\frac{O_{100}}{T_{100}} \leqq \frac{7\binom{100}{5}}{\binom{100}{3}\binom{97}{2}} = 0{,}7.$$

75. Označme A_n uvedenou funkci n proměnných $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Jak snadno zjistíme, je A_n symetrická (její hodnota se nezmění libovolnou permutací proměnných). Můžeme tedy při důkazu nerovnosti $A_3 \geqq 0$ předpokládat např. $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3$. Pak je

$$\begin{aligned} A_3 &= (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) = \\ &= (a_1 - a_2)^2 + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \geqq 0. \end{aligned}$$

Pro $n = 5$ předpokládejme vzhledem k symetrii $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq a_4 \geqq a_5$. Máme

$$\begin{aligned} A_5 = (a_1 - a_2)\,[(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5) - \\ - (a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5)] + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5) + \\ + (a_4 - a_5)[(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) - (a_5 - a_1)(a_5 - a_2)(a_5 - a_3)]. \end{aligned}$$

Zde je

$$a_1 - a_2 \geqq 0,$$
$$(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5) - (a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5) \geqq 0,$$
$$a_4 - a_5 \geqq 0,$$
$$\begin{aligned} (a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) - (a_5 - a_1)(a_5 - a_2)(a_5 - a_3) = \\ = (a_1 - a_5)(a_2 - a_5)(a_3 - a_5) - (a_1 - a_4)(a_2 - a_4)(a_3 - a_4) \geqq 0. \end{aligned}$$

Zbývá ještě člen $(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5)$, který je součinem dvou nekladných a dvou nezáporných činitelů. Je tedy $A_5 \geqq 0$.

Abychom ukázali, že pro ostatní $n > 2$ uvedené tvrzení neplatí, stačí najít takovou n-tici čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, že $A_n < 0$.

Všimněme si, že volbou $a_i = a_j$ vypadne v A_n i-tý a j-tý sčítanec. Zvolíme-li $a_1 = a_2 = a_3 \neq a_4 \neq a_5 = \ldots = a_n$, bude v případě $n > 5$ $A_n = (a_4 - a_1)^3(a_4 - a_n)^{n-4}$. Pro $a_1 = a_2 = a_3 > a_4 > a_5 = \ldots = a_n$ tedy bude $A_n < 0$. Uvedený příklad můžeme použít i pro $n = 4$: pro $a_4 < a_1 = a_2 = a_3$ je $A_4 = (a_4 - a_1)^3 < 0$.

Poznámky. Pro $n > 2$ sudé si stačí uvědomit, že

$$A_n(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n) = -A_n(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

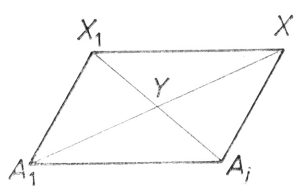
Protože A_n není identicky rovna nule, nemůže být $A_n \geqq 0$ pro každou n-tici reálných čísel.

Pro $n = 3$ jsme mohli také psát

$$\begin{aligned} A_3 &= (a_1 - a_2)^2 + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) = \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1a_2 - a_1a_3 - a_2a_3 = \\ &= \frac{1}{2}[(a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_3)^2] \geqq 0. \end{aligned}$$

76. Označme P mnohostěn, který dostaneme z mnohostěnu P_1 stejnolehlostí se středem A_1 a koeficientem 2. Zřejmě $P_1 \subset P$. Je však také $P_i \subset P$ pro $i \in \{2, 3, \ldots, 9\}$, jak nyní ukážeme.

Nechť X je libovolný bod mnohostěnu P_i. Označme X_1 jeho vzor při posunutí o vektor A_1A_i (obr. 91). Protože $X_1 \in P_1$ a P_1 je konvexní mnohostěn, leží také střed Y úsečky X_1A_i v P_1. V rovnoběžníku $A_1A_iXX_1$ je však $|A_1X| = 2|A_1Y|$, bod X je tedy obrazem bodu Y v uvažované stejnolehlosti, tj. $X \in P$.



Obr. 91

Pro objemy uvažovaných mnohostěnů platí

$$V(P_i) = V(P_1),\ i \in \{1, 2, \ldots, 9\},$$
$$V(P) = 2^3 V(P_1).$$

Aspoň dva z devíti mnohostěnů $P_1, P_2, \ldots, P_9$ musí mít společný vnitřní bod, protože jinak by platilo

$$V(P) \geqq V(P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_9) = 9V(P_1).$$

Poznámky. Analogické tvrzení platí pro libovolný konvexní mnohostěn s alespoň devíti vrcholy. Neplatí však pro mnohostěn s osmi vrcholy (např. pro krychli).

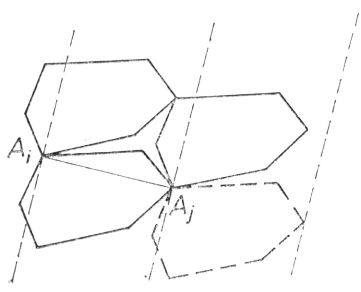
Obdobné tvrzení platí v rovině pro mnohoúhelníky s alespoň pěti vrcholy a vyplývá snadno ze skutečnosti, že pro $n \geqq 5$ je součet úhlů v n-úhelníku $(n - 2)\pi > 2\pi$.

Ukážeme ještě souvislost s následující úlohou:

Jaký je největší počet nekolineárních bodů v rovině, resp. v prostoru, aby ani jeden z trojúhelníků s vrcholy v těchto bodech nebyl tupoúhlý?

Jsou-li A_i, A_j libovolné dva z n-tice bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ majících požadovanou vlastnost, musí všechny body ležet v pásu Π_{ij} omezeném přímkami (resp. rovinami) procházejícími body A_i, A_j a kolmými k jejich spojnici. Odtud plyne, že body $A_1, \ldots, A_n$ jsou vrcholy konvexního obalu P_1 bodů $A_1, \ldots, A_n$.

Uvažujeme-li nyní mnohostěny P_i vzniklé z P_1 posunutím o A_1A_i, nemají žádné dva z nich společný vnitřní bod, protože při posunutí o A_iA_j přejde pás Π_{ij} v pás, který s ním nemá společný vnitřní bod (obr. 92).



Obr. 92

Z řešení úlohy 76 plyne, že největší počet bodů s požadovanou vlastností je v rovině 4 a v prostoru 8 (čtverec a krychle).

77. Předpokládejme, že jsme našli navzájem nesoudělná čísla

$$a_1 = 2^{n_1} - 3,\ a_2 = 2^{n_2} - 3,\ \ldots,\ a_k = 2^{n_k} - 3,$$

kde $2 \leqq n_1 < \ldots < n_k$, a označme $s = a_1 a_2 \ldots a_k$. Najdeme-li nyní takové číslo $n > n_k$, aby bylo

$$2^n - 3 = qs + 1,$$

pak zřejmě bude $2^n - 3$ nesoudělné s číslem s, tedy i s každým číslem a_i pro $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Chceme tedy najít n tak, aby s dělilo číslo

$$2^n - 4 = 4(2^{n-2} - 1).$$

Mezi $s + 1$ čísly $2^0, 2^1, \ldots, 2^s$ existují dvě čísla $2^a < 2^b$ taková, že dávají při dělení číslem s stejný zbytek, tj.

$$s \mid 2^b - 2^a = 2^a(2^{b-a} - 1),$$

neboli

$$s \mid 2^{b-a} - 1,$$

neboť s je liché. Vidíme, že stačí položit $n = b - a + 2$. Protože je $2^{b-a+2} > s \geqq a_k$, je $b - a + 2 > n_k$. Opakováním tohoto postupu dostaneme nekonečnou posloupnost navzájem nesoudělných čísel tvaru $2^n - 3$.

Poznámka. Tento postup je založen na stejné myšlence jako známý důkaz, že množina všech prvočísel je nekonečná: Mějme k prvočísel $p_1, p_2, \ldots, p_k$, pak existuje další prvočíslo p_{k+1}, které je dělitelem čísla $p_1 p_2 \ldots p_k + 1$.

2. řešení. V předcházejícím řešení jsme hledali takové n, aby s dělilo číslo $2^{n-2} - 1$. Takové n však existuje podle Eulerovy věty, která říká, že pro nesoudělná čísla a a r platí

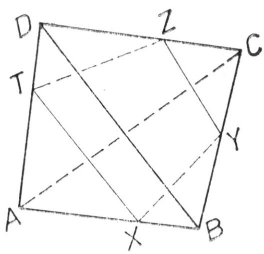
$$a^{\varphi(r)} \equiv 1 \pmod{r},$$

kde $\varphi(r)$ označuje počet přirozených čísel menších než r a s číslem r nesoudělných (tzv. Eulerova funkce). Je-li r prvočíslo, pak $\varphi(r) = r - 1$ a tomuto speciálnímu případu Eulerovy věty se obvykle říká Fermatova věta.

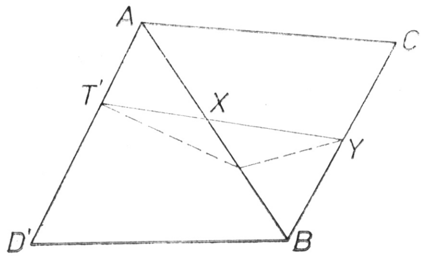
V našem případě je $a = 2$, $r = s$ a vyjde $n = \varphi(s) + 2$.

78. Uvažujme libovolnou lomenou čáru $XYZTX$ popsanou v úloze (obr. 93). Sklopením trojúhelníku ABD do roviny ABC (obr. 94) zjistíme, že pokud bude $|\sphericalangle T'XY| < \pi$, můžeme čáru TXY zkrátit změnou polohy bodu X. (Protože stěny čtyřstěnu jsou ostroúhlé trojúhelníky, je čtyřúhelník $BCAD'$ konvexní a úsečka $T'Y$ protíná stranu AB ve vnitřním bodě.) Stejnou úvahu můžeme ovšem provést i pro ostatní body Y, Z, T lomené čáry. Existuje-li tedy lomená čára minimální délky, musí pro ni platit

$$|\sphericalangle AXT| = |\sphericalangle BXY| = \xi, \ |\sphericalangle BYX| = |\sphericalangle CYZ| = \eta,$$
$$|\sphericalangle CZY| = |\sphericalangle DZT| = \zeta, \ |\sphericalangle DTZ| = |\sphericalangle ATX| = \tau.$$



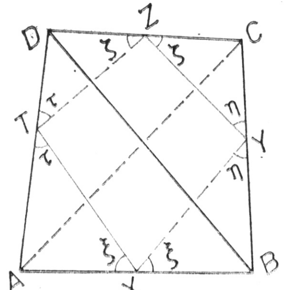
Obr. 93



Obr. 94

Z trojúhelníků ATX, BXY, CYZ a DZT pak plyne (obr. 95)

$$|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle BCD| = 2\pi - (\xi + \eta + \zeta + \tau) = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA|.$$



Obr. 95

Jinými slovy, je-li

$$|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle BCD| \neq |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA|,$$

neexistuje mezi lomenými čarami $XYZTX$ čára nejkratší.

Obráceně předpokládejme, že

$$|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA|. \qquad (1)$$

Pro součty rovinných úhlů α, β, γ, δ při vrcholech A, B, C, D pak platí

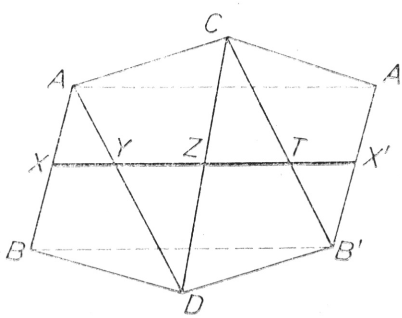
$$\alpha + \gamma = |\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle DAC| + |\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle BCD| + |\sphericalangle BCA| + \\ + |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle BCD| + \pi - |\sphericalangle ABC| + \pi - \\ - |\sphericalangle CDA| = 2\pi,$$

tedy také $\beta + \delta = 2\pi$.

Nechť je např. $\alpha \geqq \gamma$ a $\beta \geqq \delta$. Sestrojíme-li plášť čtyřstěnu rozříznutím podle hran AB, AC, BD (obr. 96), dostaneme šestiúhelník $P = ABDB'A'C$, který bude konvexní, neboť je $\gamma \leqq \pi$, $\delta \leqq \pi$ a všechny stěny jsou ostroúhlé trojúhelníky. Vzhledem k (1) je $AB \parallel A'B'$. Rovnoběžník $ABB'A'$ zřejmě leží celý v konvexním šestiúhelníku P a každé úsečce XX' rovnoběžné s BB' odpovídá lomená čára $XYZTX$ minimální délky. Z rovnoramenného trojúhelníku $AA'C$ pak plyne, že její délka je

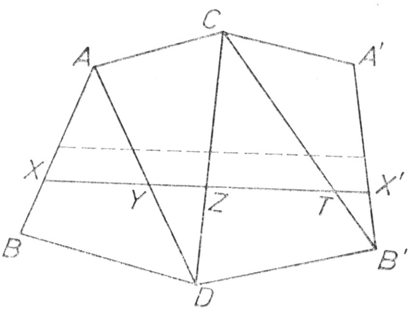
$$2|AC| \sin \frac{\gamma}{2} = 2|AC| \sin \frac{\alpha}{2},$$

neboť $\alpha + \gamma = 2\pi$.

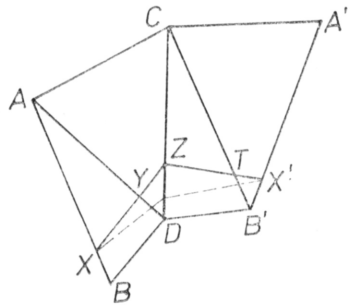


Obr. 96

Poznámka. Sestrojíme-li rovnou plášť čtyřstěnu $ABCD$ rozříznutím podle hran AB, AC, BD, dostaneme (ne nutně konvexní) šestiúhelník $ABDB'A'C$, v němž $|AB| = |A'B'|$. Lomené čáře $XYZTX$ odpovídá v rovině pláště čára $XYZTX'$ stejné délky, přičemž je $|XB| = |X'B'|$. Podmínka (1) je ekvivalentní s $AB \parallel A'B'$. Neplatí-li (1), tj. $AB \nparallel A'B'$, můžeme ke každé lomené čáře $XYZTX'$, kde body Y, Z, T jsou vnitřní body úseček DA, CD, $B'C$ a $0 < |XB| = |X'B'| < |AB|$, sestrojit kratší čáru s těmito vlastnostmi (obr. 97a, b). Podrobný důkaz vyžaduje prozkoumat několik případů a porovnávat délky lomených čar. Proto jsme v první části našeho řešení použili jiného postupu.



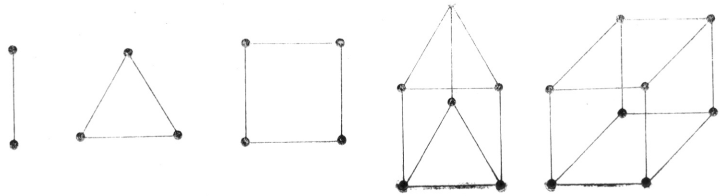
Obr. 97a



Obr. 97b

79. Na obr. 98 vidíme příklady množin S požadované vlastnosti pro $m = 1$, $m = 2$ a $m = 3$.

Předpokládejme nyní, že pro $m = k$ existuje konečná množina bodů splňující podmínku úlohy, a označme ji S_k. Posunutím množiny S_k o jednotkový vektor dostaneme množinu S'_k se stejnou vlastností. Je-li $S_k \cap S'_k = \emptyset$, existuje pro každý bod množiny $S_k \cup S'_k$ v této množině aspoň $k + 1$ bodů ve vzdálenosti 1. Najdeme-li navíc směr posunutí takový, aby pro každý bod množiny S'_k existoval v množině S_k právě jeden bod ve vzdálenosti 1 (jeho vzor v uvedeném posunutí), pak zřejmě bude množina $S_{k+1} = S_k \cup S'_k$ vyhovovat podmínce úlohy pro $m = k + 1$ a s důkazem matematickou indukcí budeme hotovi.



Obr. 98

Ukážeme, že takové posunutí můžeme vždy najít. Především pro každý bod množiny S_k existuje jen k jednotkových vektorů, že pro příslušné posunutí je $S_k \cap S_k' \neq \emptyset$. Dále pro libovolné dva různé body X, $Y \in S_k$ existují nejvýše dva body, které mají od X i Y vzdálenost 1. Množina nevhodných jednotkových vektorů, tj. takových, že je buď $S_k \cap S_k' \neq \emptyset$, nebo pro nějaký bod množiny S_k' existuje více bodů množiny S_k ve vzdálenosti 1, je tedy jen konečná.

80. Utvořme součty všech čísel v jednotlivých řádcích a sloupcích a označme p nejmenší z těchto součtů. Součet s všech čísel tabulky se nezmění výměnou libovolných dvou řádků nebo sloupců ani záměnou sloupců za řádky a obráceně. Takové přerovnání rovněž neovlivní platnost dané podmínky. Můžeme tedy předpokládat, že první řádek má součet p a že v něm na posledních $n-p$ místech jsou nuly. Součet čísel v každém z prvních p sloupců bude alespoň p, zatímco součet čísel v každém z $n-p$ posledních sloupců bude podle předpokladu úlohy alespoň $n-p$. Pro součet s všech čísel tabulky tak máme

$$s \geqq p^2 + (n-p)^2 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}(n^2 - 4np + 4p^2) =$$

$$= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}(n-2p)^2 \geqq \frac{1}{2}n^2.$$

2. řešení. Protože přerovnání sloupců a řádků neovlivní podmínku, kterou daná tabulka splňuje, ani nezmění součet všech čísel tabulky, můžeme předpokládat, že máme tabulku, která má na hlavní diagonále k nul ($k \geqq 0$), a že tento počet nemůžeme již žádným přerovnáním řádků a sloupců zvětšit.

Pro $a_{ii} = 0$ je podle předpokladu součet i-tého řádku a i-tého sloupce aspoň n. Je-li $a_{ii} \neq 0$ a pro nějaké j je $a_{ij} = 0$, pak nemůže být $a_{ji} = 0$, protože bychom výměnou i-tého a j-tého sloupce zvětšili počet nulových členů na hlavní diagonále. Je tedy i v tomto případě součet i-tého řádku a sloupce aspoň n a jsme hotovi, neboť pak je

$$2s \geqq n^2.$$

Poznámka. Pro $n = 2k$ a tabulku

$$\begin{array}{ccccc} k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k & \dots & 0 \\ & & \dots\dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k \end{array}$$

nastane rovnost $s = \frac{1}{2}n^2$.

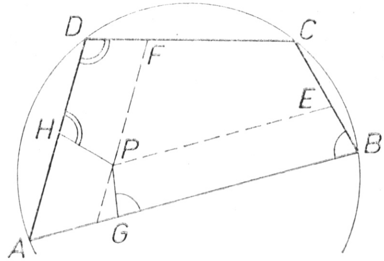
Pro tabulku, ve které jedničky a nuly odpovídají černým a bílým polím na šachovnici $n \times n$, je pro n sudé rovněž $s = \frac{1}{2}n^2$, pro n liché $s = \frac{1}{2}(n^2 + 1)$.

81. Desetiprvková množina má $2^{10} - 1 = 1\,023$ neprázdných podmnožin. Součet nejvýše deseti různých dvojciferných čísel je rozhodně menší než $10 . 99 = 990 < 1\,023$. Existují tedy dvě různé neprázdné podmnožiny dané množiny deseti čísel takové, že součty jejich prvků jsou stejné. Vynecháním případných společných prvků dostaneme dvě disjunktní neprázdné podmnožiny s požadovanou vlastností.

82. Nejprve si připomeňme, že $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník, právě když pro jeho vnitřní úhly α, β, γ, δ platí $\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi$.

1. řešení. Je-li $ABCD$ rovnoramenný lichoběžník (ten je tětivový), pak se dá rozdělit pomocí $n - 1$ příček rovnoběžných se základnami na n rovnoramenných lichoběžníků.

V obecném případě označme vrcholy tak, aby úhel α byl nejmenší a bylo $\beta \leqq \frac{\pi}{2} \leqq \delta$ (obr. 99). Vezměme nyní vnitřní bod P čtyřúhelníku $ABCD$ dostatečně blízký vrcholu A tak, aby rovnoběžky se stranami AB a AD vedené bodem P protínaly strany BC, CD ve vnitřních bodech E a F a aby-



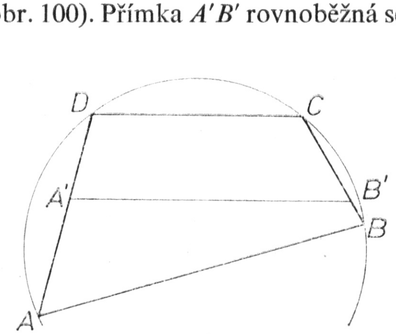
Obr. 99

chom mohli najít bod H uvnitř strany AD takový, že $|\sphericalangle PHD| = \delta$. A protože $\alpha < \beta$, najdeme uvnitř strany AB bod G tak, že $|\sphericalangle PGB| = \beta$. Rozdělili jsme tak čtyřúhelník $ABCD$ na dva rovnoramenné lichoběžníky $GBEP$, $PFDH$, čtyřúhelník $PECF$, který má stejné úhly jako $ABCD$, a čtyřúhelník $AGPH$. Ten je však rovněž tětivový, protože je

$$|\sphericalangle AGP| + |\sphericalangle AHP| = \pi - \beta + \pi - \delta = \pi.$$

Rozdělili jsme tedy $ABCD$ na čtyři tětivové čtyřúhelníky. Je-li $n > 4$, rozdělíme ještě jeden z rovnoramenných lichoběžníků na $n - 3$ rovnoramenných lichoběžníků.

2. řešení. Případ rovnoramenného lichoběžníku (sem počítáme i obdélník) již nebudeme zvlášť uvažovat, tj. budeme předpokládat, že každé dva sousední úhly jsou různé. Označme vrcholy čtyřúhelníku $ABCD$ tak, aby bylo $\gamma > \delta \geqq \dfrac{\pi}{2}$ (obr. 100). Přímka $A'B'$ rovnoběžná se stranou CD a pro-



Obr. 100

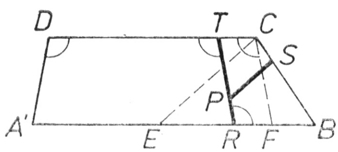
tínající strany AD a BC v bodech A', B' rozděluje čtyřúhelník $ABCD$ na tětivový čtyřúhelník $ABB'A'$ a lichoběžník $A'B'CD$.

Rozdělíme nyní lichoběžník $A'B'CD$ na tři tětivové čtyřúhelníky (obr. 101). Na přímce $A'B'$ najdeme body E, F tak, aby

$$|\sphericalangle DCE| = \gamma + \delta - \pi, \quad |\sphericalangle DCF| = \delta$$

(zřejmě $0 < \gamma + \delta - \pi < \delta$). Zvolme bod T uvnitř strany CD a sestrojme úsečku $TR \parallel CF$, kde $R \in A'B'$. Je-li T dostatečně blízko vrcholu C, existuje bod P uvnitř TR a bod S uvnitř $B'C$ tak, že $PS \parallel EC$. Potom je $A'RTD$ rovnoramenný lichoběžník a čtyřúhelníky $RB'SP$ a $PSCT$ jsou tětivové, neboť

$$|\sphericalangle PRB'| + |\sphericalangle B'SP| = \delta + \gamma - (\gamma + \delta - \pi) = \pi,$$
$$|\sphericalangle PSC| + |\sphericalangle CTP| = \delta + \pi - \delta = \pi.$$



Obr. 101

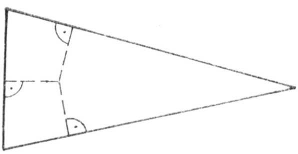
Rozdělili jsme tak původní čtyřúhelník $ABCD$ na čtyři tětivové čtyřúhelníky, z nichž jeden je rovnoramenný lichoběžník. Pro $n > 4$ stačí rozdělit rovnoramenný lichoběžník na $n - 3$ rovnoramenných lichoběžníků.

3. řešení. Dokážeme tvrzení úlohy pro $n = 4$, 5 a 6. Pro ostatní $n > 6$ odtud plyne uvedené tvrzení matematickou indukcí. Umíme-li totiž rozdělit čtyřúhelník $ABCD$ na n tětivových čtyřúhelníků, dostaneme rozdělením jednoho z nich na 4 tětivové čtyřúhelníky rozklad daného čtyřúhelníku na $n + 3$ tětivových.

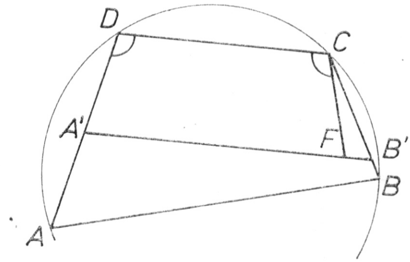
Všimněme si nejprve, že každý trojúhelník můžeme snadno rozdělit na tři tětivové čtyřúhelníky. Stačí vzít střed kružnice vepsané a spojit ho s příslušnými body dotyku (obr. 102). Vzniklé čtyřúhelníky mají vždy dva protější úhly pravé, jsou tedy tětivové.

Každý čtyřúhelník můžeme rozdělit úhlopříčkou na dva trojúhelníky, a tedy na 6 tětivových čtyřúhelníků.

Pro $n = 5$ předpokládejme opět, že je $\gamma > \delta \geqq \frac{\pi}{2}$ (případ $\gamma = \delta$ je triviální). Příčka $A'B'$ rovnoběžná se stranou CD rozdělí tětivový čtyřúhelník $ABCD$ (obr. 103) na tětivový čtyřúhelník $ABB'A'$ a lichoběžník $A'B'CD$, který rozdělíme na rovnoramenný lichoběžník $A'FCD$ a trojúhelník $FB'C$. Trojúhelník $FB'C$ lze ještě rozdělit na tři tětivové čtyřúhelníky.

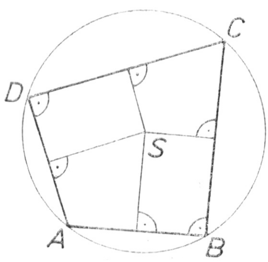


Obr. 102

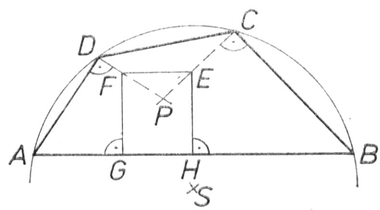


Obr. 103

Nakonec vyřešíme případ $n = 4$. Předpokládejme, že $\gamma \geqq \delta > \frac{\pi}{2}$. (Případ $\delta = \frac{\pi}{2}$ je triviální, stačí ze středu S kružnice opsané danému čtyřúhelníku spustit kolmice na jednotlivé strany (obr. 104).) Sestrojme ve vrcholech C a D kolmice ke stranám BC a AD (obr. 105), jejich průsečík označme P.



Obr. 104

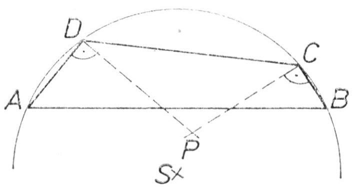


Obr. 105

Dále sestrojíme přímku EF rovnoběžnou se stranou AB tak, aby protínala úsečky CP a DP ve vnitřních bodech a přitom úsečka EF ležela uvnitř čtyřúhelníku $ABCD$. Konečně body G a H ležící na AB zvolíme tak, aby $EFGH$ byl obdélník. Čtyřúhelníky $AGFD$ a $HBCE$ jsou zřejmě tětivové stejně jako čtyřúhelník $FECD$, neboť

$$|\sphericalangle DFE| + |\sphericalangle DCE| = \alpha + \frac{\pi}{2} + \gamma - \frac{\pi}{2} = \alpha + \gamma = \pi.$$

Poznámka. Pokud leží střed S kružnice opsané uvnitř čtyřúhelníku $ABCD$, lze čtyřúhelník rozdělit na čtyři tětivové čtyřúhelníky podle obr. 104. Obecně však takový bod, který můžeme kolmo promítnout dovnitř všech stran čtyřúhelníku, nemusí existovat (obr. 106).



Obr. 106

83. Nejprve zjistíme, s jakou mocninou α vystupuje prvočíslo p v rozkladu čísla $n!$ na prvočinitele.

Mezi čísly 1, 2, ..., n je pro $k \geqq 1$ právě $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ čísel dělitelných p^k, takže je

$$\alpha = \sum_{k \geqq 1} k \left(\left[\frac{n}{p^k}\right] - \left[\frac{n}{p^{k+1}}\right]\right) = \sum_{k \geqq 1} \left[\frac{n}{p^k}\right],$$

přitom uvedený součet zřejmě obsahuje jen konečný počet nenulových členů.

Máme tedy pro libovolné prvočíslo p dokázat, že je

$$\sum_{k \geqq 1} \left(\left[\frac{2m}{p^k}\right] + \left[\frac{2n}{p^k}\right]\right) \geqq \sum_{k \geqq 1} \left(\left[\frac{m}{p^k}\right] + \left[\frac{n}{p^k}\right] + \left[\frac{m+n}{p^k}\right]\right).$$

Pro libovolná reálná čísla a, b však platí, jak snadno ověříme, nerovnost

$$[2a] + [2b] \geqq [a] + [b] + [a + b].$$

Položíme-li zde $a = \frac{n}{p^k}$, $b = \frac{m}{p^k}$ a sečteme pro všechna k přirozená, dostaneme požadovanou nerovnost.

Vyřešili jsme tak úlohu v případě, kdy m, n jsou přirozená čísla. Je-li některé z nich nula, dokazované tvrzení také zřejmě platí.

2. řešení. Označme

$$f(m, n) = \frac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!}.$$

Pro každé $m, n \geqq 0$ platí

$$f(m, n+1) = f(m, n)\,\frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)(m+n+1)} = \frac{2(2n+1)}{m+n+1}\,f(m, n)$$

a zároveň

$$f(m+1, n) = f(n, m+1) = \frac{2(2m+1)}{m+n+1}\,f(m, n).$$

Sečtením dostaneme rekurentní vztah

$$f(m, n+1) + f(m+1, n) = 4f(m, n). \tag{1}$$

Protože $f(m, 0) = \binom{2m}{m}$ je celé pro každé celé číslo $m \geqq 0$, plyne dokazované tvrzení z rekurentního vztahu (1) matematickou indukcí podle n.

84. Předpokládejme, že kladná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_5$ vyhovují dané soustavě nerovnic. Sečteme-li pět nerovností, které pro ně platí, dostaneme (indexy počítáme modulo 5)

$$0 \geqq \sum_{i<j} x_i^2 x_j^2 - \sum_{i=1}^{5} x_i^2 (x_{i+2}x_{i+4} + x_{i+1}x_{i+3}) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \sum_{j \neq i} x_j^2 - \sum_{i=1}^{5} x_i^2 (x_{i+2}x_{i+4} + x_{i+1}x_{i+3}) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{5} x_i^2 (x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 + x_{i+3}^2 + x_{i+4}^2 - 2x_{i+2}x_{i+4} - 2x_{i+1}x_{i+3}) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{5} x_i^2 ((x_{i+1} - x_{i+3})^2 + (x_{i+2} - x_{i+4})^2).$$

Poslední výraz je nezáporný, tedy nulový. Odtud plyne, že daná soustava nerovnic nemá jiné řešení než $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = a$, a to původní soustavě skutečně vyhovuje pro každé $a > 0$.

Poznámka. V oboru všech reálných čísel má soustava kromě řešení $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = a$ ještě řešení tvaru $x_1 = a$, $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$, kde a je libovolné reálné číslo, a další, která dostaneme cyklickou záměnou.

2. řešení. Snadno zjistíme, že daná soustava se nezmění, provedeme-li cyklickou záměnu neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_5$.

Předpokládejme tedy, že soustavě vyhovují kladná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_5$, přičemž $x_1 \geqq x_2, x_3, x_4, x_5 > 0$. Z první a páté nerovnosti pak plyne

$$x_2^2 \leqq x_3x_5 \text{ a } x_5^2 \leqq x_2x_4,$$

což znamená, že x_3 nebo x_4 je největší z čísel x_2, x_3, x_4, x_5.

Protože soustava se nezmění, zaměníme-li současně x_3 s x_4 a x_2 s x_5, můžeme předpokládat $x_1 \geqq x_3 \geqq x_2, x_4, x_5 > 0$. Ze čtvrté nerovnosti tak plyne

$$x_4^2 = x_1x_3 \text{ nebo } x_5^2 = x_1x_3,$$

což tedy znamená, že je

$$x_1 = x_3 = x_4 \text{ nebo } x_1 = x_3 = x_5.$$

Dosazením do třetí, resp. do páté nerovnosti dostaneme v obou případech $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$. Toto řešení původní soustavě nerovnic vyhovuje.

85. Z daného vztahu plyne pro libovolná x, y nerovnost

$$2|f(x)|\,|g(y)| \leqq |f(x+y)| + |f(x-y)|,$$

což znamená, že platí aspoň jedna z nerovností

$$|f(x)|\,|g(y)| \leqq |f(x+y)|$$

nebo

$$|f(x)|\,|g(y)| \leqq |f(x-y)|.$$

Můžeme tedy (při pevném y) ke každému x najít x' tak, že

$$|f(x)|\,|g(y)| \leqq |f(x')|.$$

Je-li dáno y takové, že $g(y) \neq 0$, zvolme x_0, aby $f(x_0) \neq 0$, a sestrojme na základě předchozí úvahy posloupnost $x_0, x_1, x_2, \ldots$ tak, že klademe $x_k = x'_{k-1}$. Pro všechna k přirozená tedy platí

$$|f(x_{k-1})|\,|g(y)| \leqq |f(x_k)|,$$

odkud plyne nerovnost

$$|f(x_0)|\,|g(y)|^k \leqq |f(x_k)|.$$

Protože podle předpokladu je $|f(x)| \leqq 1$, je pro všechna $k \geqq 1$

$$|g(y)|^k \leqq \frac{1}{|f(x_0)|}.$$

To je však možné, jen když $|g(y)| \leqq 1$.

2. řešení. Funkce f je omezená, označme

$$M = \sup |f(x)| > 0.$$

Je-li y libovolné reálné číslo, pro které $g(y) \neq 0$, pak z daného vztahu dostaneme pro každé x

$$2|f(x)g(y)| = |f(x+y) + f(x-y)| \leqq 2M,$$

takže
$$|f(x)| \leqq \frac{M}{|g(y)|}.$$

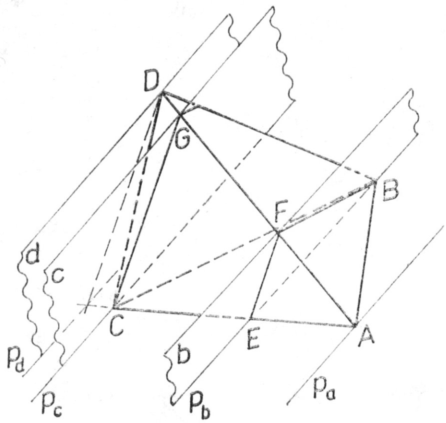
Z volby čísla M nyní plyne $M \leqq \dfrac{M}{|g(y)|}$, čili $|g(y)| \leqq 1$.

Poznámka. Místo nerovnosti $|f(x)| \leqq 1$ stačil předpoklad, že funkce f je omezená.

86. Označme dané čtyři roviny $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tak, že roviny β, γ a δ leží ve stejném poloprostoru určeném rovinou α a pro jejich vzdálenosti x, y, z od roviny α platí $0 < x < y < z$.

Vezměme nyní libovolný pravidelný čtyřstěn $ABCD$ a sestrojme čtyři rovnoběžné roviny a, b, c, d tak, aby $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, $D \in d$ (obr. 107), aby čtyřstěn $ABCD$ měl s rovinou a společný jen vrchol A a pro vzdálenosti u, v, w rovin b, c, d od roviny a platilo

$$u : v : w = x : y : z.$$



Obr. 107

Pak budeme hotovi, protože stačí provést stejnolehlost se středem A a koeficientem $\dfrac{x}{u} = \dfrac{y}{v} = \dfrac{z}{w}$ a vzniklý čtyřstěn přemístit.

Při konstrukci rovin a, b, c, d využijeme následující vlastnosti tří rovnoběžných rovin, která plyne z podobnosti: Protíná-li tři rovnoběžné roviny přímka p v bodech A, B, C a přímka p' v bodech A', B', C', pak

$$|AB| : |AC| = |A'B'| : |A'C'|.$$

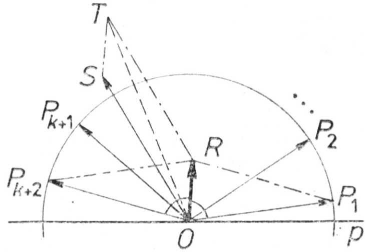
Nejprve určíme (obr. 107) na hraně AC bod E tak, aby $|AE| : |AC| = x : y$. Dále určíme na hraně AD dva body F, G tak, aby

$$|AF| : |AG| : |AD| = x : y : z.$$

Pak bude $GC \parallel EF$, rovinu EFB označíme jako b, roviny a, c, d sestrojíme jako roviny procházející body A, C, D a rovnoběžné s EFB.

87. Dokážeme tvrzení indukcí. Pro $n = 1$ je $|\boldsymbol{OP}_1| = 1$, předpokládejme tedy, že tvrzení platí pro $n = k$ liché a mějme $k + 2$ jednotkových vektorů $\boldsymbol{OP}_1$, $\boldsymbol{OP}_2$, ..., $\boldsymbol{OP}_{k+2}$, jejichž koncové body P_i leží na jednotkové polokružnici se středem O v uvedeném pořadí (obr. 108). Označme

$$\boldsymbol{OS} = \boldsymbol{OP}_2 + \boldsymbol{OP}_3 + \ldots + \boldsymbol{OP}_{k+1},$$
$$\boldsymbol{OR} = \boldsymbol{OP}_1 + \boldsymbol{OP}_{k+2},$$



Obr. 108

takže je

$$OT = OP_1 + OP_2 + \ldots + OP_{k+2} = OS + OR,$$

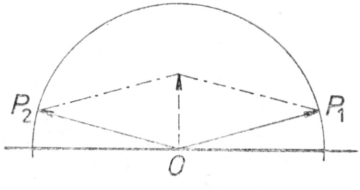
kde podle indukčního předpokladu $|OS| \geqq 1$.

Nyní je buď $OR = 0$, nebo je $|\sphericalangle\, P_1OP_{k+2}| < \pi$ a $P_1RP_{k+2}O$ je kosočtverec. Protože vektor OS leží v jednom z úhlů $|\sphericalangle\, P_1OR| = |\sphericalangle\, P_{k+2}OR|$, je úhel ROS ostrý. Vektor OT tvoří úhlopříčku rovnoběžníku $ORTS$, ve kterém je úhel ROS ostrý, takže

$$|OT| > |OS| \geqq 1$$

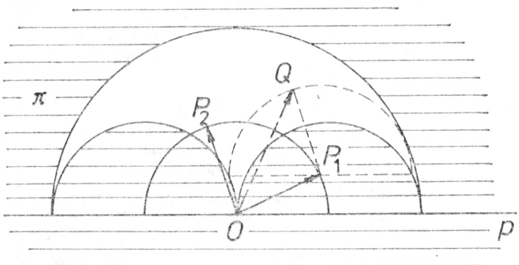
(to platí i v degenerovaném případě pro $|\sphericalangle\, ROS| = 0$). Tím je důkaz hotov.

Poznámka. Pro n sudé tvrzení zřejmě neplatí (obr. 109).



Obr. 109

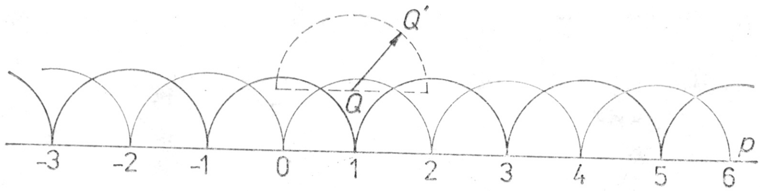
2. řešení. Zvolme jednu polorovinu omezenou přímkou p a označme ji π. V polorovině π sestrojme dva jednotkové polokruhy, které se dotýkají v bodě O, a polokruh se středem O o poloměru 2 (obr. 110). Jsou-li P_1, P_2 dva z uvažovaných bodů, pak koncový bod Q vektoru $OQ = OP_1 + OP_2$ nebude ležet uvnitř té části roviny, která je na obr. 110 vyšrafována.



Obr. 110

Označme nyní K_1 (resp. K_2) sjednocení poloroviny opačné k π a všech jednotkových kruhů, které mají středy v bodech $2k$ (resp. $2k + 1$), kde k probíhá všechna celá čísla (obr. 111). Posuneme-li libovolný bod Q, který neleží uvnitř jedné z množin K_1, K_2 o jednotkový vektor $\mathbf{OP}$, kde $P \in \pi$, dostaneme bod Q', který neleží uvnitř druhé z množin K_1, K_2. Vidíme tedy, že koncový bod Q vektoru $\mathbf{OQ} = \mathbf{OP}_1 + \mathbf{OP}_2 + \ldots + \mathbf{OP}_n$ neleží pro n liché uvnitř K_1 a pro n sudé uvnitř K_2. Speciálně pro liché n je

$$|\mathbf{OP}_1 + \mathbf{OP}_2 + \ldots + \mathbf{OP}_n| \geqq 1.$$



Obr. 111

Poznámka. Koncové body Q vektorů $\mathbf{OQ} = \mathbf{OP}_1 + \mathbf{OP}_2 + \ldots + \mathbf{OP}_n$, kde $\mathbf{OP}_1, \mathbf{OP}_2, \ldots, \mathbf{OP}_n$ jsou jednotkové vektory splňující podmínku úlohy, vyplní pro dané n množinu, kterou dostaneme odečtením příslušné množiny K_1 nebo K_2 (podle toho, je-li n liché nebo sudé) od kruhu se středem O a poloměrem n.

88. Množina s požadovanou vlastností existuje, jak doložíme na několika příkladech nejprve v rovině, a pak teprve v prostoru.

a) Vrcholy pravidelného pětiúhelníku.

b) Vrcholy pravidelného šestiúhelníku.

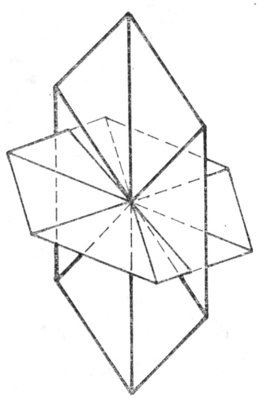
c) Množina vrcholů několika pravidelných šestiúhelníků se společným středem souměrnosti (obr. 112a, b).

d) Množina vrcholů krychle $ABCDEFGH$ doplněná body K, L souměrně sdruženými se středem krychle S podle stěn $ABCD$, $EFGH$ (obr. 113).

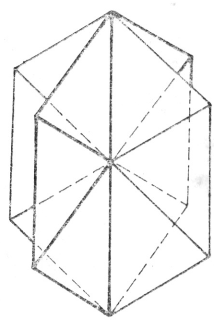
e) Množina vrcholů krychle $ABCDEFGH$ doplněná body K, L, M, N, P, Q souměrně sdruženými se středem krychle S podle všech jejích stěn (obr. 114).

f) Množina všech bodů s celočíselnými souřadnicemi (x, y, z), kde $0 \leqq x \leqq n$, $0 \leqq y \leqq n$, $0 \leqq z \leqq n$ (obr. 115) pro $n \geqq 2$.

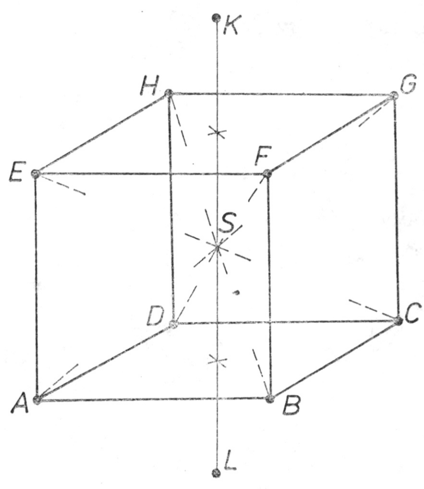
O tom, že uvedené množiny mají požadovanou vlastnost, se snadno přesvědčíme.



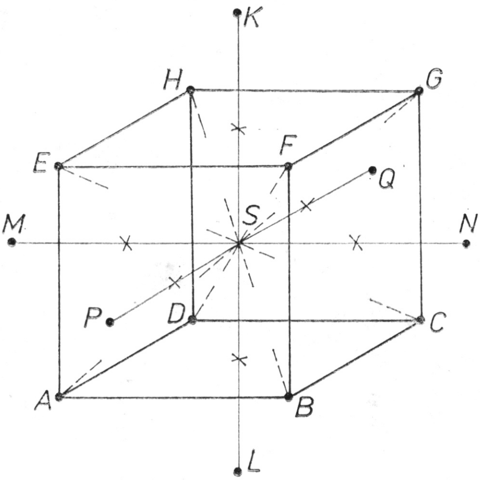
Obr. 112a



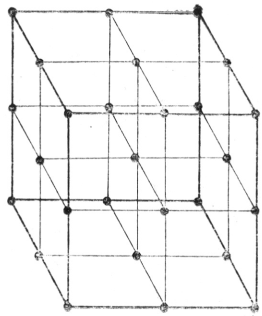
Obr. 112b



Obr. 113



Obr. 114



Obr. 115

Poznámka. Má-li množina bodů uvedenou vlastnost, má stejnou vlastnost každá množina, kterou z ní dostaneme afinním zobrazením. Tak např. desetibodové množiny z obr. 112b a 113 jsou ekvivalentní.

V rovině má nejmenší množina s uvedenou vlastností pět bodů. V prostoru jsme sestrojili desetiprvkovou množinu - vzniká otázka, existuje-li menší množina s uvedenou vlastností.

89. Je-li x kořen dané rovnice, je $x \neq 0$ a můžeme ji přepsat na tvar

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b - 2 = 0,$$

neboli

$$y^2 + ay + b - 2 = 0, \tag{1}$$

kde $y = x + \dfrac{1}{x}$.

Tato rovnice má reálné kořeny

$$y_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4(b-2)}}{2},$$

právě když

$$a^2 - 4(b - 2) \geqq 0. \tag{2}$$

Původní rovnice pak bude mít reálné řešení právě pro ta y, pro něž je $|y| \geqq 2$. Rovnice (1) má takové řešení, právě když kromě (2) je

$$|a| + \sqrt{a^2 - 4(b - 2)} \geqq 4. \tag{3}$$

V případě $|a| \leqq 4$ je tato nerovnost ekvivalentní nerovnosti

$$2|a| \geqq b + 2, \tag{4}$$

kterou dostaneme umocněním (3). V případě $|b| \leqq 2$ je zaručeno splnění podmínky (2) při jakémkoliv a a nerovnost (4) je ekvivalentní s nerovností

$$4a^2 \geqq b^2 + 4b + 4,$$

takže

$$4(a^2 + b^2) \geqq 5b^2 + 4b + 4 = 5\left(b + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}.$$

V uvažovaném případě má tedy daná rovnice reálný kořen, právě když

$$a^2 + b^2 \geqq \frac{4}{5}.$$

Pro $|a| > 4$ nebo $|b| > 2$ je zřejmě vždy $a^2 + b^2 > 4$, takže nejmenší hodnotou součtu $a^2 + b^2$, kdy má daná rovnice reálný kořen, jsou $\frac{4}{5}$.

2. řešení. Splňuje-li trojice (a, b, x) danou rovnici, splňuje ji i trojice $(-a, b, -x)$, takže můžeme předpokládat, že pro kořen x platí $x > 0$. Pak je

$$x^4 - |a|x^3 - |b|x^2 - |a|x + 1 \leqq x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0,$$

neboli

$$|a|(x^3 + x) + |b|x^2 \geqq x^4 + 1.$$

Použijeme-li nerovnosti

$$x^4 - x^3 - x + 1 = (x - 1)^2(x^2 + x + 1) \geqq 0,$$
$$x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 \geqq 0,$$

ve kterých nastane rovnost pro $x = 1$, dostaneme

$$x^4 + 1 \leqq |a|(x^3 + x) + |b|x^2 \leqq (x^4 + 1)\left(|a| + \frac{|b|}{2}\right),$$

tj.

$$|b| \geqq 2 - 2|a|.$$

Pokud $|a| \leqq 1$, plyne odtud umocněním

$$a^2 + b^2 \geqq 5a^2 - 8|a| + 4 = 5\left(|a| - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} \geqq \frac{4}{5}$$

s rovností pro $|a| = \frac{4}{5}$, zatímco pro $|a| > 1$ je $a^2 + b^2 > 1$.

Zjistili jsme tedy, že má-li daná rovnice reálný kořen, je nejmenší možnou hodnotou součtu $a^2 + b^2$ číslo $\frac{4}{5}$ $\left(a = \frac{4}{5}, b = \frac{2}{5}, x = 1\right)$.

3. řešení. Rovnici přepíšeme na tvar

$$y^2 + ay + b - 2 = 0, \tag{5}$$

kde $y = x + \frac{1}{x}$. Zvolme reálné číslo y, $|y| \geqq 2$ (jen pro taková y má rovnice $x + \frac{1}{x} = y$ reálný kořen). Množinou všech dvojic (a, b), pro které má rovnice (5) kořen y, je v kartézské soustavě souřadnic přímka s rovnicí

$$ya + b + y^2 - 2 = 0.$$

Přitom součet $a^2 + b^2$ má pro body této přímky minimální hodnotu rovnou druhé mocnině vzdálenosti této přímky od počátku, tj.

$$d(y) = \frac{(y^2 - 2)^2}{1 + y^2} = (y^2 - 2)\left(1 - \frac{3}{1 + y^2}\right).$$

Odtud vidíme, že ze všech $|y| \geqq 2$ má funkce $d(y)$ nejmenší hodnotu pro $|y| = 2$, a to $\frac{4}{5}$.

4. řešení. Uvažujme množinu S všech dvojic (a, b), pro něž má daná rovnice reálné řešení. Kořeny mnohočlenu jsou spojitou funkcí jeho koeficientů, takže nemá-li daná rovnice v bodě $(a, b) \notin S$ žádný reálný kořen, nemá reálné kořeny ani v jistém okolí bodu (a, b). Proto je množina S jakožto doplněk otevřené množiny uzavřená.

Protože $(0, 0) \notin S$, obsahuje množina S na své hranici bod, který má od počátku nejmenší vzdálenost, tj. součet $a^2 + b^2$ má nejmenší hodnotu. Ze spojitosti také plyne, že pokud má daná rovnice pro dvojici (a, b) jen jednoduché reálné kořeny, pak je (a, b) vnitřním bodem množiny S. V dostatečně malém okolí bodu (a, b) zůstane totiž každý jednoduchý kořen různým od ostatních kořenů. V každém bodě na hranici množiny S má tedy daná rovnice násobný reálný kořen.

Označme násobný kořen r, pak je $r \neq 0$ a $\frac{1}{r}$ je také kořenem dané rovnice.

a) Nechť $|r| \neq 1$. Protože součin kořenů je 1, má rovnice kořeny r, r, $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r}$, a vyjádříme-li koeficienty pomocí kořenů, dostaneme

$$a = -2\left(r + \frac{1}{r}\right) \leqq -4, \quad b = \left(r + \frac{1}{r}\right)^2 + 2 \geqq 6,$$

takže je $a^2 + b^2 \geqq 52$.

b) Nechť $r = 1$ nebo $r = -1$, pak je

$$2a + b + 2 = 0 \text{ nebo } -2a + b + 2 = 0$$

a vzdálenost obou těchto přímek od počátku je $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Nejmenší hodnotou součtu $a^2 + b^2$ je tedy číslo $\frac{4}{5}$.

90. Najdeme nejkratší cestu, při které ženista prověří všechny tři vrcholy trojúhelníku.

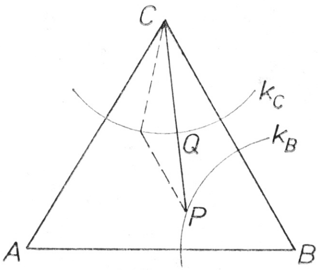
Nechť ženista vychází z vrcholu A rovnostranného trojúhelníku ABC. Aby prověřil oba vrcholy B, C, musí se dostat na kružnice k_B, k_C se středy B, C a poloměrem $\frac{h}{2}$, kde h je výška trojúhelníku ABC (obr. 116). Najdeme proto takové body $P \in k_B$ a $Q \in k_C$, aby spojnice APQ byla nejkratší. Body

P, Q, C zřejmě leží na přímce, takže stačí najít nejkratší spojnici APC, kde $P \in k_B$.

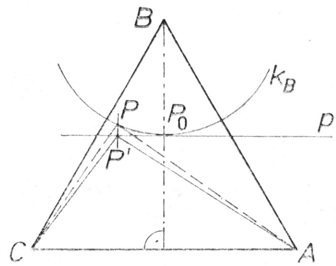
Požadovanou vlastnost má bod P_0, který dostaneme jako průsečík kružnice k_B s osou strany AC (obr. 117). Bod P_0 má totiž ze všech bodů přímky $p \parallel AC$ nejmenší součet vzdáleností od vrcholů A a C, jak snadno plyne z osové souměrnosti podle p a z trojúhelníkové nerovnosti (obr. 118). Přitom ke každému jinému bodu $P \in k_B$, $P \neq P_0$, najdeme bod $P' \in p$, pro který je (obr. 117)

$$|AP'| + |P'C| < |AP| + |PC|.$$

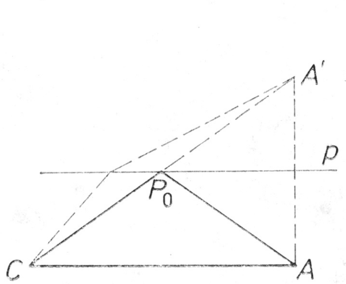
Označíme-li Q_0 průsečík kružnice k_C s úsečkou P_0C, bude spojnice AP_0Q_0 (obr. 119) nejkratší cesta, při které ženista prověří všechny tři vrcholy trojúhelníku.



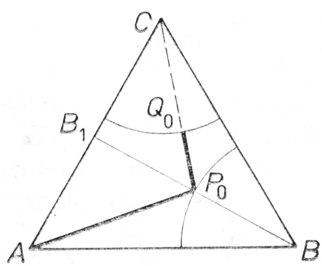
Obr. 116



Obr. 117



Obr. 118



Obr. 119

Zbývá ještě ověřit, že libovolný bod trojúhelníku ABC má od čáry AP_0Q_0 vzdálenost nejvýše $\frac{h}{2}$. Množina, kterou ženista během svého pohybu po úsečce prověří, je konvexní, a protože z bodu P_0 obsáhne jeho detektor celou výšku BB_1 (obr. 119), prověří při cestě po AP_0 celý trojúhelník ABB_1 a při cestě po P_0Q_0 celý trojúhelník B_1BC.

Je tedy AP_0Q_0 hledanou nejkratší cestou (jiné řešení dostaneme souměrností podle osy strany BC).

91. Nechť $f \in$ G, do množiny G zřejmě náleží funkce

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x.$$

Z podmínky c) je zároveň zřejmé, že funkce tvaru $x + c$ pro $c \neq 0$ do G nepatří.

Pro funkci $i(x) = x$ má každý bod x vlastnost c), zatímco pro funkci $f(x) = ax + b$, $a \neq 1$, je bod x_f jednoznačně určen:

$$x_f = \frac{b}{1 - a}.$$

Předpokládejme, že G obsahuje aspoň dvě takové funkce $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$, kde $a \neq 1$, $c \neq 1$ (jinak je tvrzení úlohy triviální). Pak je

$$(g^{-1} \circ f \circ g \circ f^{-1})(x) = \frac{1}{c}\left(ac\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}\right) + ad + b\right) - \frac{d}{c} =$$

$$= x - b + \frac{ad}{c} + \frac{b}{c} - \frac{d}{c}.$$

Protože $g^{-1} \circ f \circ g \circ f^{-1} \in$ G, je

$$-b + \frac{ad}{c} + \frac{b}{c} - \frac{d}{c} = 0,$$

čili

$$b(1 - c) = d(1 - a).$$

Poslední rovnost však znamená, že $x_f = x_g$. Protože $f, g \in$ G byly libovolné, je tvrzení dokázáno.

2. řešení. Je-li $f \in$ G, $f(x) = ax + b$, nazveme číslo a směrnicí funkce f. Z vlastnosti c) je zřejmé, že $i(x) = x$ je jediná funkce v G se směrnicí 1.

Nechť f, $g \in \mathsf{G}$, z definice $f \circ g$ plyne, že směrnice této funkce je součinem směrnic funkcí f a g. Označme $m = f \circ g$, $n = g \circ f$. Směrnice funkcí m a n jsou stejné a podle b) má funkce $n^{-1} \circ m$ směrnici 1, takže

$$n^{-1} \circ m = i \text{ a } m = n \circ n^{-1} \circ m = n \circ i = n,$$

tedy

$$f \circ g = g \circ f$$

pro každé dvě funkce f, $g \in \mathsf{G}$. Odtud plyne

$$f(g(x_f)) = (f \circ g)(x_f) = (g \circ f)(x_f) = g(f(x_f)) = g(x_f),$$

takže $g(x_f)$ je také pevným bodem funkce f. Pokud tedy množina G obsahuje aspoň jednu funkci $f \neq i$, je pro každou funkci $g \in \mathsf{G}$

$$g(x_f) = x_f,$$

protože pevný bod funkce $f \neq i$ je určen jednoznačně.

Poznámka. Z vlastností a) a b) plyne, že množina G uvažovaných lineárních funkcí je grupa (operace $\circ$ je asociativní). Mimo jiné jsme dokázali, že z podmínky c) plyne komutativita G. Obecně však grupa všech nekonstantních lineárních funkcí komutativní není.

92. Úlohu si nejdříve trochu zjednodušíme tím, že připustíme v podmínkách a) a b) rovnost a nebudeme vylučovat nulová a_k. Při jejím řešení vyjdeme z následující skutečnosti: Je-li vektor $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ řešením úlohy pro vektor $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a $(b_1', b_2', \ldots, b_n')$ řešením pro vektor $(a_1', a_2', \ldots, a_n')$, je $(b_1 + b_1', b_2 + b_2', \ldots, b_n + b_n')$ řešením úlohy pro vektor $(a_1 + a_1', a_2 + a_2', \ldots, a_n + a_n')$ a $(cb_1, cb_2, \ldots, cb_n)$ řešením pro vektor $(ca_1, ca_2, \ldots, ca_n)$, kde c je libovolné kladné číslo. Že je splněna také podmínka b), je zřejmé, upravíme-li ji na tvar

$$qb_k < b_{k+1} < \frac{1}{q} b_k. \tag{1}$$

Protože každý vektor $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je lineární kombinací

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n$$

n jednotkových vektorů

$$u_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),$$
$$u_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_n = (0, 0, \ldots, 0, 1),$$

stačí řešit úlohu pro vektory u_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Obecné řešení pak bude lineární kombinací takto získaných řešení.

Pro vektor u_1 můžeme vzít

$$b_1 = 1,\ b_2 = q,\ b_3 = q^2,\ \ldots,\ b_n = q^{n-1}.$$

Podobně pro vektor u_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, najdeme řešení

$$b_i = 1,\ b_k = q^{k-i}\ (k > i) \text{ a } b_k = q^{i-k}\ (k < i).$$

Přitom je pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$q^{i-1} + \ldots + q + 1 + q + \ldots + q^{n-i} < 1 + 2(q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) <$$
$$< 1 + \frac{2q}{1-q} = \frac{1+q}{1-q}(0 + \ldots + 0 + 1 + 0 + \ldots + 0),$$

takže podmínka c) je vždy splněna.

Pro libovolný vektor $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nezáporných čísel jsme tak nalezli řešení

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n) = a_1(1, q, \ldots, q^{n-1}) + a_2(q, 1, q, \ldots, q^{n-2}) + \ldots +$$
$$+ a_n(q^{n-1}, \ldots, q, 1),$$

tj.

$$b_k = \sum_{i=1}^{n} a_i q^{|k-i|},\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{2}$$

Jsou-li všechna čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kladná, zřejmě je $b_k > a_k$ pro všechna $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a snadno zjistíme, že je také splněna podmínka (1). Je totiž

$$b_{k+1} - qb_k = \sum_{i=k+1}^{n} a_i(q^{i-k-1} - q^{i-k+1}) = \sum_{i=k+1}^{n} a_i q^{i-k-1}(1 - q^2) > 0$$

a

$$\frac{1}{q} b_k - b_{k+1} = \sum_{i=1}^{k-1} a_i q^{k-i-1}(1 - q^2) > 0.$$

Vidíme tedy, že čísla (2), která jsou řešením zjednodušené úlohy, splňují i původní podmínky úlohy.

93. Protože $N(p + q + r) = 39 = 3 . 13$ a součet tří různých přirozených čísel $p + q + r$ je aspoň 6, je

$$N = 3 \quad \text{a} \quad p + q + r = 13.$$

Hráč B dostal ve třetím kole r kuliček a celkem jen $10 < p + q + r = 13$, získal tedy v prvním i druhém kole vždy p kuliček. Kdyby hráč C dostal v prvním kole r kuliček, dostal by celkem aspoň $r + q + p = 13$ kuliček, ve skutečnosti jich však získal jen 9. V prvním kole tedy dostal q kuliček hráč C.

Můžeme ještě určit přesný průběh hry. Pro čísla $1 \leqq p < q < r$ máme soustavu

$$\begin{aligned} p + q + r &= 13, \\ 2p + r &= 10, \\ 2q + p &\leqq 9. \end{aligned}$$

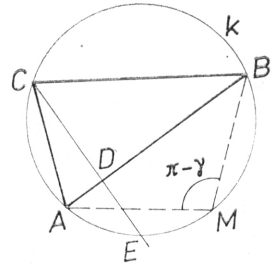
Z prvních dvou rovnic plyne $q = 3 + p$ a nerovnost pak dává $p = 1$, $q = 4$, $r = 8$. Zisk kuliček v jednotlivých kolech ukazuje tabulka

	1.	2.	3.	Celkem
A	8	8	4	20
B	1	1	8	10
C	4	4	1	9

94. Opišme trojúhelníku ABC kružnici k a nechť D je libovolný vnitřní bod strany AB. Přímka CD protne kružnici k v bodě $E \neq C$ (obr. 120). Z mocnosti bodu D ke kružnici k plyne

$$|CD| \,.\, |DE| = |AD| \,.\, |BD|.$$

Odtud je vidět, že délka CD bude geometrickým průměrem délek AD a BD, právě když bude bod E vzdálen od přímky AB stejně jako vrchol C. Bod D



Obr. 120

tedy najdeme právě tehdy, když pro obsahy trojúhelníků ABC a ABM, kde M je střed oblouku AB ležícího v polorovině opačné k ABC, bude platit

$$P_{ABM} \geqq P_{ABC}. \tag{1}$$

Snadno však spočteme, že je (r je poloměr kružnice k)

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} 2r \sin \alpha \, 2r \sin \beta \sin \gamma,$$

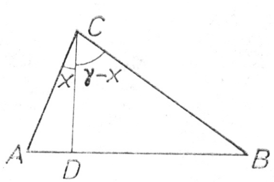
$$P_{ABM} = \frac{1}{2} |AM|^2 \sin (\pi - \gamma) = \frac{1}{2} \left(2r \sin \frac{\gamma}{2}\right)^2 \sin \gamma,$$

takže z (1) dostáváme nutnou a postačující podmínku

$$\sin \alpha \sin \beta \leqq \sin^2 \frac{\gamma}{2}.$$

2. řešení. Nechť D je vnitřní bod strany AB trojúhelníku ABC a označme x velikost úhlu ACD (obr. 121). Ze sinové věty plyne

$$\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{\sin \alpha}{\sin x}, \quad \frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sin (\gamma - x)}{\sin \beta},$$



Obr. 121

takže pro bod D platí $|CD|^2 = |AD| . |BD|$, právě když

$$\sin\alpha \sin\beta = \sin x \sin(\gamma - x). \tag{2}$$

Bod D s uvedenou vlastností bude tedy existovat, právě když rovnice (2) má řešení x, kde $0 < x < \gamma$.

Protože

$$\sin x \sin(\gamma - x) = \sin x (\sin\gamma \cos x - \sin x \cos\gamma) =$$

$$= \frac{1}{2} \sin\gamma \sin 2x - \frac{1 - \cos 2x}{2} \cos\gamma =$$

$$= -\frac{1}{2} \cos\gamma + \frac{1}{2} (\cos 2x \cos\gamma + \sin 2x \sin\gamma) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cos\gamma + \frac{1}{2} \cos(2x - \gamma),$$

je rovnice (2) ekvivalentní rovnici

$$\cos(2x - \gamma) = 2\sin\alpha \sin\beta + \cos\gamma.$$

Ta má řešení x, právě když

$$2 \sin\alpha \sin\beta + \cos\gamma \leqq 1,$$

tj. právě když

$$\sin\alpha \sin\beta \leqq \frac{1 - \cos\gamma}{2} = \sin^2 \frac{\gamma}{2}.$$

Přitom je vždy $0 < x < \gamma$, neboť

$$\cos(2x - \gamma) = 2 \sin\alpha \sin\beta + \cos\gamma > \cos\gamma.$$

Poznámka. Funkce $f(x) = \sin x \sin(\gamma - x)$ v rovnici (2) je spojitá a z následujícího odhadu

$$\sin x \sin(\gamma - x) \leqq \left(\frac{\sin x + \sin(\gamma - x)}{2}\right)^2 =$$

$$= \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos^2 \frac{2x - \gamma}{2} \leqq \sin^2 \frac{\gamma}{2}$$

s rovností pro $x = \dfrac{\gamma}{2}$ plyne, že funkce $f(x)$ nabývá v intervalu $(0, \gamma)$ libovolné hodnoty mezi 0 a $\sin^2 \frac{\gamma}{2}$. Je tedy nerovnost

$$\sin \alpha \sin \beta \leqq \sin^2 \frac{\gamma}{2}$$

nutnou a postačující podmínkou pro to, aby rovnice (2) měla v intervalu $(0, \gamma)$ řešení.

95. Z binomické věty plyne rozklad

$$(\sqrt{8} + 1)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} 2^{3k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k} . 2^{3/2}.$$

Označíme-li

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} 2^{3k}, \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}, \tag{1}$$

je pro $n \geqq 0$

$$\begin{aligned} (\sqrt{8} + 1)^{2n+1} &= a_n + \sqrt{8}\, b_n, \\ (\sqrt{8} - 1)^{2n+1} &= -a_n + \sqrt{8}\, b_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Vynásobením obou rovností dostaneme pro $n \geqq 0$ vztah

$$7^{2n+1} = 8b_n^2 - a_n^2.$$

Kdyby bylo pro nějaké $n \geqq 0$ číslo b_n dělitelné pěti, bylo by

$$-a_n^2 \equiv 7^{2n+1} = 7 . 49^n \equiv 2 . (-1)^n \pmod 5,$$

ale rovnice

$$x^2 \equiv \pm 2 \pmod 5$$

nemá řešení, jak se snadno přesvědčíme prozkoumáním všech pěti zbytků modulo 5. Číslo b_n tedy není dělitelné pěti pro žádné celé číslo $n \geqq 0$.

2. řešení. Podle binomické věty je

$$(\sqrt{8} + 1)^{2n+1} = a_n + \sqrt{8}\, b_n,$$

kde a_n, b_n jsou určeny vztahem (1). Můžeme tedy pro $n \geqq 1$ psát

$$a_n + \sqrt{8}\, b_n = (\sqrt{8} + 1)^2 (\sqrt{8} + 1)^{2n-1} =$$

$$= (9 + 2\sqrt{8})(\sqrt{8}\, b_{n-1} + a_{n-1}) =$$
$$= 9a_{n-1} + 16b_{n-1} + \sqrt{8}(2a_{n-1} + 9b_{n-1}),$$

odkud plynou pro $n \geqq 1$ rekurentní vztahy

$$\begin{aligned} a_n &\equiv -a_{n-1} + b_{n-1} \pmod 5, \\ b_n &\equiv 2a_{n-1} - b_{n-1} \pmod 5, \end{aligned} \tag{3}$$

přičemž $a_0 = b_0 = 1$.

Jejich sečtením dostaneme

$$a_n + b_n \equiv a_{n-1} \pmod 5$$

a dosazením do prvního z nich

$$2a_n \equiv -b_n + b_{n-1} \pmod 5,$$

takže máme jednodušší rekurentní vztah

$$b_n \equiv (-b_{n-1} + b_{n-2}) - b_{n-1} \equiv -2b_{n-1} + b_{n-2} \pmod 5,$$

kde $b_0 \equiv b_1 \equiv 1 \pmod 5$. Podle tohoto rekurentního vzorce dostáváme dále pro $b_2, b_3, \ldots$ zbytky modulo 5

$$-1, -2, -2, 2, -1, -1, 1, 2, 2, -2, 1, 1, \ldots$$

a dále se zbytky periodicky opakují. Vidíme, že pro žádné $n \geqq 0$ není $b_n \equiv 0 \pmod 5$.

3. řešení. Vyjdeme z rekurentních vztahů, které jsme odvodili v předcházejícím řešení. Z nich postupně dostáváme

$$(a_0, b_0) \equiv (1, 1), \quad (a_1, b_1) \equiv (0, 1), \quad (a_2, b_2) \equiv (1, -1),$$
$$(a_3, b_3) \equiv (-2, 3) \equiv (3, 3) \equiv (3a_0, 3b_0) \pmod 5.$$

Jak snadno dokážeme ze vztahu (3),

$$(a_{n+3}, b_{n+3}) \equiv (3a_n, 3b_n) \pmod 5.$$

Protože žádné z čísel b_0, b_1, b_2 není dělitelné pěti, není b_n dělitelné pěti pro žádné přirozené n.

4. řešení. Sečtením rovností (2) dostaneme

$$b_n = \frac{(\sqrt{8} + 1)^{2n+1} + (\sqrt{8} - 1)^{2n+1}}{2\sqrt{8}} =$$
$$= \frac{\sqrt{8} + 1}{2\sqrt{8}} (9 + 2\sqrt{8})^n + \frac{\sqrt{8} - 1}{2\sqrt{8}} (9 - 2\sqrt{8})^n.$$

Protože čísla $9 + 2\sqrt{8}$, $9 - 2\sqrt{8}$ jsou kořeny kvadratické rovnice

$$\lambda^2 - 18\lambda + 49 = 0,$$

platí pro posloupnost $\{b_n\}$ rekurentní vztah (srov. poznámku k řešení úlohy 128)

$$b_n = 18b_{n-1} - 49b_{n-2},$$

tj.

$$b_n \equiv -2b_{n-1} + b_{n-2} \pmod 5.$$

Dále pokračujeme jako v 2. řešení, případně můžeme odvodit rovnost

$$b_{n+3} \equiv 3b_n \pmod 5$$

tak jako ve 3. řešení.

96. Označme a_k počet bílých polí v k-tém obdélníku, $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_p$. Protože šachovnice má 32 bílá pole, je

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_p = 32.$$

Poněvadž $a_1 \geqq 1$, $a_2 \geqq 2$, ..., $a_p \geqq p$, je

$$32 \geqq 1 + 2 + \ldots + p = \frac{1}{2} p(p + 1),$$

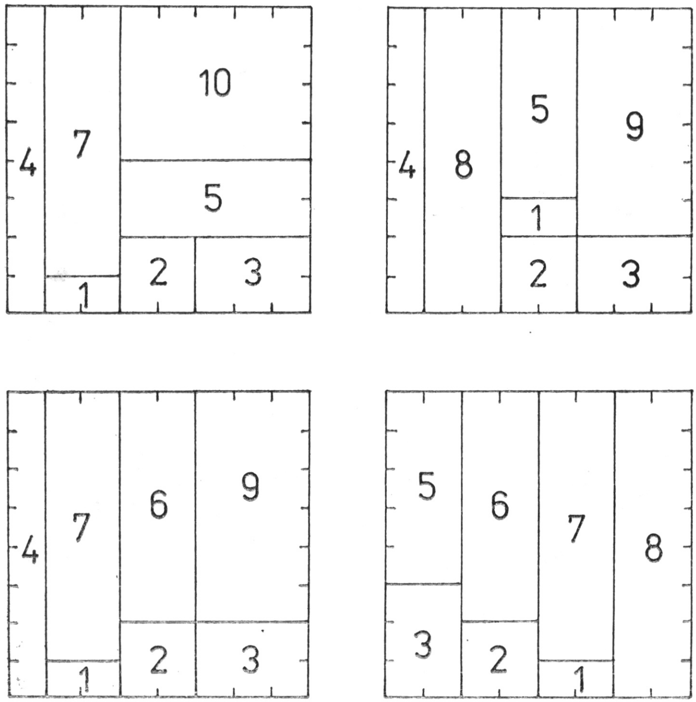
takže

$$p \leqq 7.$$

Pro rozdělení šachovnice na sedm obdélníků uvedených vlastností uvažme všechny rozklady čísla 32 na sedm různých přirozených sčítanců

a) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 11$,
b) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 10$,
c) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 8 + 9$,
d) $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 9$,
e) $1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8$.

První rozklad není možný, protože na šachovnici 8×8 nenajdeme obdélník s $2 \times 11 = 22$ poli. Pro ostatní případy b) až e) ukazuje příslušný rozklad obr. 122 (číslo v obdélníku udává počet bílých polí).



Obr. 122

97. Zřejmě je pro libovolná čísla $a, b, c, d > 0$

$$S > \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = 1$$

a

$$S < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d} = 2,$$

takže

$$1 < S < 2.$$

Je-li $a = b \neq c = d$, pak je

$$S = \frac{2a}{2a + c} + \frac{2c}{a + 2c}$$

a pro $c \to 0$ je $S \to 1$.

Pro $a = c \neq b = d$ zase dostaneme

$$S = \frac{2a}{a + 2b} + \frac{2b}{2a + b},$$

takže pro $b \to 0$ je $S \to 2$. Protože S je spojitou funkcí kladných čísel a, b, c, d, nabývá S všech hodnot otevřeného intervalu $(1, 2)$.

2. řešení. Protože výraz S se nezmění, vezmeme-li místo čísel a, b, c, d čísla ta, tb, tc, td pro libovolné kladné t, můžeme předpokládat, že $a + b + c + d = 1$. Označíme-li $x = a + c$, $y = b + d$, bude $x, y > 0$, $x + y = 1$. Potom je

$$S = \frac{a}{1 - c} + \frac{c}{1 - a} + \frac{b}{1 - d} + \frac{d}{1 - b} =$$
$$= \frac{x - a^2 - c^2}{ac + 1 - x} + \frac{y - b^2 - d^2}{bd + 1 - y} =$$
$$= \frac{2ac + x - x^2}{ac + 1 - x} + \frac{2bd + y - y^2}{bd + 1 - y}.$$

Jak známo, pro $a + c = x$ pevné probíhá součin ac všechny hodnoty intervalu $\left(0, \frac{x^2}{4}\right\rangle$, takže výraz

$$\frac{2ac + x - x^2}{ac + 1 - x} = 2 + \frac{-x^2 + 3x - 2}{ac + 1 - x} = 2 - \frac{(x - 1)(x - 2)}{ac + 1 - x}$$

probíhá hodnoty intervalu $\left(x, \frac{2x}{2 - x}\right\rangle$, podobně druhý výraz pro $b + d = y$ pevné probíhá interval $\left(y, \frac{2y}{2 - y}\right\rangle$. Součet S tedy probíhá všechny hodnoty intervalu

$$\left(x + y, \frac{2x}{2 - x} + \frac{2y}{2 - y}\right\rangle = \left(1, \frac{4 - 4xy}{2 + xy}\right\rangle.$$

Protože $x + y = 1$, probíhá součin xy interval $\left\langle 0, \frac{1}{4} \right\rangle$ a výraz

$$\frac{4 - 4xy}{2 + xy} = 4\left(-1 + \frac{3}{2 + xy}\right)$$

interval $\left\langle \frac{4}{3}, 2 \right)$. Odtud konečně plyne, že hodnoty S probíhají interval $(1, 2)$.

98. Dokážeme-li, že jedna z rovnic $P(x) = 1$, $P(x) = -1$ má nejvýše dva celočíselné kořeny, bude daná nerovnost dokázána, neboť každá z těchto rovnic má nanejvýš $\deg(P)$ kořenů.

Dejme tomu, že každý z mnohočlenů $P(x) - 1$, $P(x) + 1$ má aspoň tři různé celočíselné kořeny (žádný kořen jednoho mnohočlenu zřejmě není kořenem druhého). Označme nejmenší z těchto čísel a. Nechť je např.

$$P(x) + 1 = (x - a)\, Q(x),$$

kde Q je také mnohočlen s celočíselnými koeficienty. Pak pro tři kořeny p, q, r druhého mnohočlenu $P(x) - 1 = (x - a)\, Q(x) - 2$ platí

$$2 = (p - a)\, Q(p) = (q - a)\, Q(q) = (r - a)\, Q(r),$$

což je ve sporu s tím, že číslo 2 má jen dva kladné dělitele.

2. řešení. Pokud má celočíselné kořeny jen jedna z rovnic $P(x) = 1$, $P(x) = -1$, pak je zřejmě $n(P) \leqq \deg(P)$ a daná nerovnost je splněna.

Nechť k, m jsou libovolná celá čísla, pro něž $P(k) = 1$, $P(m) = -1$. Protože $k - m$ dělí číslo $P(k) - P(m) = 2$, je $|k - m| \leqq 2$. To však znamená, že vzdálenost libovolných dvou kořenů rovnice $(P(x))^2 = 1$ je nejvýše 4, tj. $n(P) \leqq 5$. Dokazovaná nerovnost je tedy splněna pro každý mnohočlen aspoň 3. stupně.

Pro mnohočleny nižšího stupně je $\deg(P) \leqq 2$,

$$n(P) \leqq 2 \deg(P) \leqq \deg(P) + 2.$$

Tím je důkaz hotov.

Poznámka. Mají-li obě rovnice $P(x) = 1$, $P(x) = -1$ celočíselný kořen, je dokonce $n(P) \leqq 4$. Kdyby totiž bylo $n(P) = 5$, tak je z předcházejícího řešení patrno, že rovnice

$$(P(x))^2 = 1$$

by měla celočíselné kořeny

$$k,\ k+1,\ k+2,\ k+3,\ k+4,$$

přičemž jedna z rovnic $P(x)=1$, $P(x)=-1$ by měla jediný celočíselný kořen $k+2$ a druhá ostatní čtyři. Bylo by tedy např.

$$P(x)-1=(x-k)(x-k-1)(x-k-3)(x-k-4)\,Q(x),$$

kde Q je mnohočlen s celočíselnými koeficienty, a

$$-2=P(k+2)-1=2.1.(-1).(-2)\,Q(k+2),$$

což není možné.

99. Protože

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^2=\sum_{i=1}^{n} y_i^2,$$

je daná nerovnost ekvivalentní nerovnosti

$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \leqq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{1}$$

Pro $n=1$ je tvrzení triviální. Jsou-li $1 \leqq r < s \leqq n$ dva indexy takové, že $z_r < z_s$, je

$$(x_r-x_s)(z_r-z_s) \leqq 0,$$

tj.

$$x_r z_r + x_s z_s \leqq x_r z_s + x_s z_r,$$

takže výměnou z_r a z_s součet na levé straně (1) nezmenšíme.

Protože po konečném počtu takovýchto výměn dojdeme k pořadí $y_1, y_2, \ldots, y_n$, je nerovnost (1) dokázána.

2. řešení. Označme pro $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$Y_k=\sum_{i=1}^{k} y_i,\quad Z_k=\sum_{i=1}^{k} z_i$$

a položme $Y_0=Z_0=0$. Pak je pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$y_k=Y_k-Y_{k-1},\quad z_k=Z_k-Z_{k-1},$$

tedy

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} x_k(Y_k - Y_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} x_k Y_k - \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} Y_k =$$
$$= x_n Y_n + \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) Y_k$$

a podobně

$$\sum_{k=1}^{n} x_k z_k = x_n Z_n + \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) Z_k.$$

Platnost nerovnosti (1) je nyní zřejmá, neboť $Y_n = Z_n$ a pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ je

$$Y_k \geqq Z_k, \; x_k - x_{k+1} \geqq 0.$$

100. Můžeme předpokládat, že $a_1 > 1$ (jinak první člen vynecháme). Členy posloupnosti $a_2, a_3, \ldots$ rozdělíme do a_1 tříd podle zbytků při dělení číslem a_1. V každé neprázdné třídě vezměme nejmenší číslo a_p, všechny ostatní členy posloupnosti patřící do stejné třídy jako a_p se od něho liší o kladný násobek čísla a_1, takže

$$a_m = a_p + y a_1, \; y > 0.$$

Poněvadž všech zbytkových tříd je a_1, vidíme, že nejen nekonečně mnoho členů dané posloupnosti, ale dokonce všechny až na nejvýše $a_1 + 1$ jich lze vyjádřit v požadovaném tvaru, přičemž $x = 1$ a $q = 1$.

2. řešení. Nejprve ukážeme, že jsou-li a, b dvě čísla nesoudělná a $c > ab$ libovolné, existují přirozená čísla x, y taková, že

$$c = xa + yb.$$

Protože $(a, b) = 1$, patří b čísel $a, 2a, \ldots, ba$ do různých zbytkových tříd modulo b, takže existuje x, pro něž

$$1 \leqq x \leqq b, \quad b \mid c - xa.$$

Poněvadž $c > xa$, existuje kladné y, pro něž

$$c - xa = yb.$$

Pokud existují dva členy a_p, a_q, pro něž $(a_p, a_q) = 1$, jsme hotovi, neboť každé $a_m > a_p a_q$ má požadované vyjádření. V opačném případě označme d

největší společný dělitel všech členů posloupnosti a najděme a_p, a_q tak, že $\left(\frac{a_p}{d}, \frac{a_q}{d}\right) = 1$. Pak pro každé $a_m > \frac{a_p a_q}{d}$ je

$$\frac{a_m}{d} = x\frac{a_p}{d} + y\frac{a_q}{d}$$

a důkaz je hotov.

101. Označme strany a úhly v trojúhelníku ABC obvyklým způsobem. Použijeme-li na trojúhelníky ABR, BCP, CAQ sinovou větu, dostaneme (obr. 123)

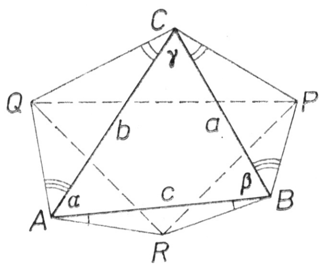
$$|AR| = |BR| = c\frac{\sin 15°}{\sin 150°} = 2c \sin 15°,$$

$$|AQ| = b\frac{\sin 30°}{\sin 105°} = \frac{2b \sin 15° \cos 15°}{\cos 15°} = 2b \sin 15°,$$

$$|BP| = 2a \sin 15°,$$

$$|CQ| = b\frac{\sin 45°}{\sin 105°} = \sqrt{2}\,b\frac{\sin 30°}{\cos 15°} = 2\sqrt{2}\, b \sin 15°,$$

$$|CP| = 2\sqrt{2}\, a \sin 15°.$$



Obr. 123

Strany trojúhelníku PQR vyjádříme pomocí kosinové věty, takže po dosazení z předchozích vztahů je

$$|QR|^2 = 4 \sin^2 15° \,(b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha + 60°)),$$
$$|PR|^2 = 4 \sin^2 15° \,(c^2 + a^2 - 2ca \cos(\beta + 60°)),$$
$$|PQ|^2 = 8 \sin^2 15° \,(b^2 + a^2 - 2ba \cos(\gamma + 60°)).$$

Dokážeme nyní, že $|PR| = |QR|$. Pro libovolný trojúhelník ABC máme

$$\frac{|QR|^2 - |PR|^2}{4 \sin^2 15^\circ} = b^2 - a^2 + 2c(a \cos(\beta + 60^\circ) - b \cos(\alpha + 60^\circ)). \qquad (1)$$

Dosadíme-li do (1)

$$b^2 - a^2 = 2bc \cos \alpha - c^2,$$

$$a = b \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

dostaneme

$$\frac{|QR|^2 - |PR|^2}{4 \sin^2 15^\circ} = -c^2 +$$

$$+ 2bc\left[\cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}\left(\frac{1}{2} \cos \beta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \beta\right) - \left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha\right)\right] =$$

$$= -c^2 + \frac{bc}{\sin \beta}(\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta) = -c^2 + \frac{bc}{\sin \beta} \sin \gamma = 0,$$

neboť

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{c}{b}.$$

Zbývá ukázat, že $|\sphericalangle PRQ| = 90^\circ$, tj. že

$$|PQ|^2 = |PR|^2 + |QR|^2 = 2|PR|^2.$$

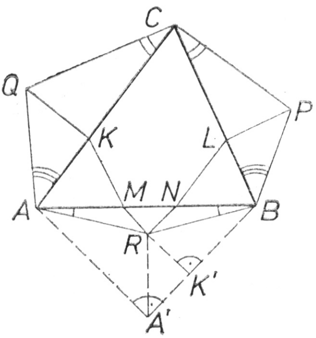
Máme

$2|PR|^2 - |PQ|^2 = 8 \sin^2 15^\circ [c^2 - b^2 + 2a(b \cos(\gamma + 60^\circ) - c \cos(\beta + 60^\circ))]$.

Výraz v hranaté závorce vznikne z (1) cyklickou záměnou a je proto roven nule. Tím je důkaz hotov.

2. řešení. Sestrojme v trojúhelnících AQC a BPC (obr. 124) výšky QK a PL, takže je $|QK| = |AK|$, $|PL| = |BL|$. Jsou-li M, N body na straně AB takové, že $MK \parallel BC$, $LN \parallel AC$, dostaneme z podobnosti trojúhelníků $NBL \sim ABC$ a $AQC \sim BPC$ rovnosti

$$\frac{|LN|}{|AC|} = \frac{|BL|}{|BC|} = \frac{|AK|}{|AC|}.$$



Obr. 124

Je tedy $|LN| = |AK|$ a podobně také $|MK| = |BL|$ a trojúhelníky AMK a NBL jsou shodné. Navíc je zřejmě $|RM| = |RN|$. Protože je $PL \perp MK$, $|PL| = |MK|$ a $QK \perp LN$, $|QK| = |LN|$, stačí ukázat, že je také $RM \perp RN$. Sečtením vektorů QK, KM, MR a PL, LN, NR pak dostaneme $|QR| = |PR|$ a zároveň $QR \perp PR$.

Sestrojíme-li rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ABA' (obr. 124), bude trojúhelník $A'RB$ s výškou RK' podobný trojúhelníku AQC, takže ze vztahu

$$\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|AK|}{|AC|} = \frac{|A'K'|}{|A'B|}$$

máme $MK' \parallel AA'$, tj. $MR \parallel AA'$, podobně $NR \parallel A'B$, tj. $RM \perp RN$.

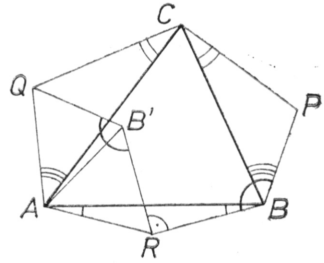
3. řešení. Označme úhly v trojúhelníku ABC obvyklým způsobem. Uvnitř úhlu ARB najděme bod B' tak, aby trojúhelník ARB' byl rovnostranný. Pak je $B'R \perp BR$ (obr. 125) a $|\sphericalangle B'AQ| = \alpha$.

Jak jsme již zjistili v 1. řešení, je

$$\frac{|AR|}{|AB|} = \frac{|AQ|}{|AC|}, \text{ takže } \frac{|AB'|}{|AB|} = \frac{|AQ|}{|AC|}$$

a trojúhelníky $AB'Q$, ABC jsou podobné. Je tedy $|\sphericalangle AB'Q| = \beta$ a $|\sphericalangle RB'Q| = \beta + 60° = |\sphericalangle RBP|$. Z této podobnosti a z podobnosti trojúhelníků $ACQ \sim BCP$ dále plyne

$$|B'Q| = |BC| \frac{|AQ|}{|AC|} = |BC| \frac{|BP|}{|BC|} = |BP|.$$

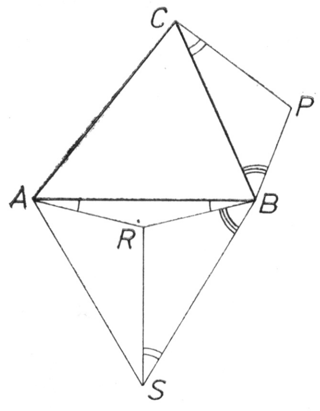


Obr. 125

Trojúhelník $RB'Q$ dostaneme tedy z trojúhelníku RBP otočením o $90°$, takže $|PR| = |QR|$ a $|\sphericalangle\, PRQ| = 90°$.

4. řešení. Uvažujme zobrazení π_1 složené z otočení kolem bodu B o úhel $45°$ a ze stejnolehlosti se středem B a koeficientem $\dfrac{|BC|}{|BP|} = \dfrac{\sin 105°}{\sin 30°}$, takže $\pi_1(P) = C$. Dále uvažujme zobrazení π_2 složené z otočení kolem bodu A o úhel $45°$ a ze stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\dfrac{|AQ|}{|AC|} = \dfrac{\sin 30°}{\sin 105°}$, takže $\pi_2(C) = Q$. Složením zobrazení π_1 a π_2 je otočení o $90°$. Ukážeme, že bod R je středem tohoto otočení.

Označme S vrchol rovnostranného trojúhelníku ABS ležícího v polorovině ABR (obr. 126). Protože trojúhelníky BPC, BRS jsou podobné, je



Obr. 126

$\pi_1(R) = S$ a podobně $\pi_2(S) = R$, bod R je tedy samodružným bodem složeného zobrazení $\pi_1 \circ \pi_2$.

Protože bod Q je obrazem bodu P v otočení o $90°$ kolem středu R, je $|\sphericalangle PRQ| = 90°$, $|PR| = |QR|$.

102. Nejprve ciferný součet čísla B odhadneme. Číslo 4444^{4444} má nejvýše 4.4444 číslic, takže

$$A < 9.20\,000 = 180\,000.$$

Pro ciferný součet čísla A tak máme odhad $B \leqq 5.9 = 45$, takže ciferný součet čísla B je nejvýše 12.

Každé číslo dává při dělení 9 stejný zbytek jako jeho ciferný součet. Zjistíme, jaký zbytek dává číslo 4444^{4444}. Je

$$4444 = 4.11.101 \equiv 4.2.2 \equiv 7 \pmod 9,$$

a protože

$$7^3 = 343 \equiv 1 \pmod 9,$$

dostaneme

$$4444^{4444} \equiv 7^{3\cdot 1481+1} \equiv 7 \pmod 9.$$

Odtud plyne, že hledaný součet číslic čísla B je 7.

103. Délka tětivy jednotkové kružnice, která odpovídá středovému úhlu α, je

$$d = 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Je-li δ takový úhel, že $\cos \delta$ i $\sin \delta$ jsou čísla racionální, je podle Moivreovy věty

$$\cos k\delta + \mathrm{i} \sin k\delta = (\cos \delta + \mathrm{i} \sin \delta)^k,$$

takže $\sin k\delta$ je racionální pro každé k přirozené. Ze vztahu

$$\sin^2 \delta + \cos^2 \delta = 1$$

plyne, že $\sin \delta$ a $\cos \delta$ jsou racionální, právě když pro celá p, q, r je

$$\sin \delta = \frac{p}{q}, \ \cos \delta = \frac{r}{q} \ \text{a} \ p^2 + r^2 = q^2.$$

Poslední rovnici vyhovují čísla

$$p = 2tu,\ r = t^2 - u^2,\ q = t^2 + u^2$$

pro každá dvě přirozená čísla t, u.

Položíme-li tedy

$$\sin\delta = \frac{2t}{t^2+1},\quad \cos\delta = \frac{t^2-1}{t^2+1},$$

kde t je dostatečně velké, aby $1974\,\delta < \pi$, budou body $A_1, A_2, \ldots, A_{1975}$ umístěné na jednotkové kružnici se středem S tak, aby pro $k \in \{1, 2, \ldots, 1974\}$ bylo $|\sphericalangle A_kSA_{k+1}| = 2\delta$, vyhovovat požadavkům úlohy, protože tětiva spojující dva body A_j, A_k $(j > k)$ bude mít racionální délku $2\sin(j-k)\delta$.

Zároveň je vidět, že na jednotkové kružnici můžeme rozmístit libovolný konečný počet bodů tak, aby jejich spojnice měly racionální délku.

2. řešení. Dokážeme, že na jednotkové kružnici existuje nekonečně mnoho bodů takových, že jejich spojnice mají racionální délku.

Sestrojme nad průměrem AB pravoúhlý trojúhelník ABC s racionálními stranami. Takových trojúhelníků existuje nekonečně mnoho - jsou to všechny trojúhelníky se stranami

$$|AB| = 2,\ |BC| = \frac{4mn}{m^2+n^2},\ |AC| = \frac{2(m^2-n^2)}{m^2+n^2},$$

kde $m > n$ jsou přirozená čísla.

Přitom jsou-li C_1, C_2 vrcholy libovolných dvou takovýchto trojúhelníků ABC_1, ABC_2 (obr. 127), má tětiva C_1C_2 racionální délku, protože pro tětivový čtyřúhelník ABC_2C_1 platí podle Ptolemaiovy věty

$$|AB|\,.\,|C_1C_2| + |AC_1|\,.\,|BC_2| = |AC_2|\,.\,|BC_1|,$$

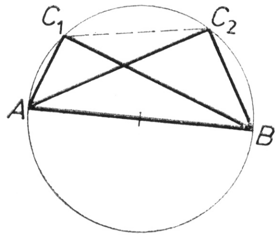
tj.

$$|C_1C_2| = \frac{1}{2}(|AC_2|\,.\,|BC_1| - |AC_1|\,.\,|BC_2|).$$

Poznámka. Pro úplnost ještě uvedeme řešení neurčité rovnice

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

v přirozených číslech. Trojice přirozených čísel (x, y, z), které jí vyhovují, se nazývají pythagorejské trojúhelníky.



Obr. 127

Budeme hledat jen taková řešení, že $(x, y, z) = 1$, protože všechna ostatní dostaneme vynásobením libovolným přirozeným číslem. Navíc je z rovnice (1) vidět, že čísla x, y, z jsou v tom případě po dvou nesoudělná.

Snadno zjistíme, že obě čísla x, y nemohou být současně lichá, pak by totiž bylo z^2 dělitelné dvěma a nutně tedy i čtyřmi, zatímco čtverec lichého čísla dá při dělení čtyřmi vždy zbytek 1.

Předpokládejme tedy, že x je sudé, $x = 2l$, pak dostaneme

$$4l^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y).$$

Je tedy pro $j > k$

$$z + y = 2j, \qquad z - y = 2k,$$
$$z = j + k, \qquad y = j - k,$$

a odtud $l^2 = jk$. Čísla j, k jsou nesoudělná, protože jinak by čísla y, z měla společného dělitele. A protože $jk = l^2$, musí být

$$j = m^2, \ k = n^2, \ l = mn,$$

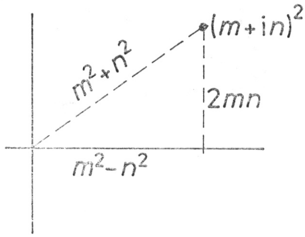
kde $m > n$ jsou nesoudělná přirozená čísla. Vyhovují-li tedy nesoudělná čísla x, y, z rovnici (1), mají tvar

$$x = 2mn, \ y = m^2 - n^2, \ z = m^2 + n^2. \tag{2}$$

Navíc je $2 \nmid mn$, protože jinak by byla obě čísla y, z rovněž sudá. Obráceně, pro každou dvojici přirozených čísel m, n takových, že $m > n$, $(m, n) = 1$ a $2 \nmid mn$, dostaneme řešení rovnice (1).

Je zajímavé, že všechna řešení tvaru (2) jsou generována body $(m + \mathrm{i}n)^2$ v komplexní rovině pro m, n celá - je totiž (obr. 128)

$$(m + \mathrm{i}n)^2 = m^2 - n^2 + 2mn\,\mathrm{i},$$
$$|(m + \mathrm{i}n)^2| = m^2 + n^2.$$



Obr. 128

104. Vyřešme úlohu nejprve pro $n = 1$. Hledaný lineární homogenní mnohočlen bude mít tvar

$$P(x, y) = Ax + By.$$

Z podmínek b), c) dostaneme pro $a = 1$, $b = c = 0$

$$P(0, 1) = -2P(1, 0) = -2.$$

Je tedy $A = P(1, 0) = 1$, $B = P(0, 1) = -2$ a

$$P(x, y) = x - 2y$$

je jediný mnohočlen stupně 1, který vyhovuje daným podmínkám.

Nechť $n > 1$. Platí opět $P(1, 0) = 1$, $P(0, 1) = -2$ a pro $a = 2$, $b = c = -1$ dostaneme z podmínky b)

$$P(-2, 2) = -2P(1, -1),$$

přičemž podle a)

$$P(-2, 2) = (-2)^n P(1, -1).$$

Pro $n > 1$ to znamená, že je $P(1, -1) = 0$ a vzhledem k homogenitě mnohočlenu P

$$P(x, -x) = 0$$

pro všechna reálná x. Pro každé x má tedy mnohočlen jedné reálné proměnné y

$$p_x(y) = P(x, y)$$

kořen $y = -x$. Odtud plyne, že mnohočlen P má tvar

$$P(x, y) = (x + y)\, Q(x, y),$$

kde Q je také mnohočlen. Ukážeme, že mnohočlen Q stupně $n - 1$ rovněž splňuje podmínky úlohy. Pro $x + y \neq 0$ je

$$Q(tx, ty) = \frac{P(tx, ty)}{t(x + y)} = t^{n-1}Q(x, y),$$

pro $a + b + c \neq 0$

$$Q(a + b, c) + Q(a + c, b) + Q(b + c, a) =$$
$$= \frac{1}{a + b + c}(P(a + b, c) + P(a + c, b) + P(b + c, a)) = 0$$

a také $Q(1, 0) = P(1, 0) = 1$. Pro $x + y = 0$, resp. $a + b + c = 0$ plynou uvedené vlastnosti ze spojitosti mnohočlenu Q.

Poněvadž řešení pro $n = 1$ už známe, vidíme, že pro $n \geqq 1$ je jediným řešením úlohy mnohočlen

$$P(x, y) = (x + y)^{n-1}(x - 2y).$$

2. řešení. Nechť mnohočlen P splňuje dané podmínky. Z podmínky b) pro libovolné $a = b = c = y$ plyne

$$3P(2y, y) = 0.$$

Pro každé y má tedy mnohočlen jedné proměnné x

$$p_y(x) = P(x, y)$$

kořen $x = 2y$. To znamená, že

$$P(x, y) = (x - 2y)\, Q(x, y),$$

kde Q je homogenní mnohočlen stupně $n - 1$. Zřejmě $Q(1, 0) = P(1, 0) = 1$. Pro $b = c$ z podmínky b) plyne

$$2\,P(a + b, b) + P(2b, a) = 0,$$

což pro mnohočlen Q dává

$$2(a - b)\, Q(a + b, b) + 2(b - a)\, Q(2b, a) = 0,$$

neboli pro $a \neq b$

$$Q(a + b, b) = Q(2b, a).$$

Odtud postupně dostaneme

$$Q(x, y) = Q(2y, x - y) = Q(2x - 2y, 3y - x) = Q(6y - 2x, 3x - 5y) = \ldots,$$

tj.

$$Q(x, y) = Q(x + (2y - x), y - (2y - x)) = Q(x + (x - 2y), y - (x - 2y)) = \\ = Q(x + 3(2y - x), y - 3(2y - x)) = \dots .$$

Protože Q je mnohočlen a rovnost $Q(x, y) = Q(x + d, y - d)$ je při $x \neq 2y$ splněna pro nekonečně mnoho různých $d = 2y - x$, $x - 2y$, $3(2y - x), \dots$, je

$$Q(x, y) = Q(x + d, y - d)$$

pro libovolné reálné d, což platí díky spojitosti i pro všechna $x = 2y$. Speciálně je $Q(x, y) = Q(x + y, 0)$, a protože Q je homogenní mnohočlen stupně $n - 1$, je

$$Q(x, y) = c(x + y)^{n-1},$$

přičemž $Q(1, 0) = 1$, takže $c = 1$. Jediným mnohočlenem, který splňuje dané podmínky, je tedy

$$P(x, y) = (x - 2y)(x + y)^{n-1}.$$

3. řešení. Nechť mnohočlen P splňuje uvedené podmínky. Z podmínky b) plyne pro $c = 1 - a - b$

$$P(a + b, 1 - a - b) + P(1 - b, b) + P(1 - a, a) = 0,$$

což pro $b = 0$ dává vztah

$$P(1 - a, a) = -P(a, 1 - a) - 1.$$

Dohromady je tedy

$$P(a + b, 1 - a - b) = P(a, 1 - a) + P(b, 1 - b) + 2.$$

Položme $Q(x) = P(x, 1 - x) + 2$, pak je pro libovolná reálná a, b

$$Q(a + b) = Q(a) + Q(b).$$

Protože $Q(1) = P(1, 0) + 2 = 3$, plyne odtud $Q(a + 1) = Q(a) + 3$, čili

$$Q(n) = 3n$$

pro všechna přirozená n. Poněvadž Q je mnohočlen, je $Q(x) = 3x$ pro všechna reálná x. Je tedy $P(x, 1 - x) = 3x - 2$ a podle a) pro $x + y \neq 0$

$$P(x, y) = (x + y)^n P\left(\frac{x}{x + y}, \frac{y}{x + y}\right) = (x + y)^n P\left(\frac{x}{x + y}, 1 - \frac{x}{x + y}\right) =$$

$$= (x + y)^n \left(\frac{3x}{x + y} - 2\right) = (x + y)^{n-1}(x - 2y).$$

Snadno zjistíme, že tento mnohočlen splňuje všechny dané podmínky.

Poznámka. Je-li Q spojitá reálná funkce, má funkcionální rovnice

$$Q(x + y) = Q(x) + Q(y)$$

jediné řešení $Q(x) = kx$, kde k je libovolná reálná konstanta. Z předchozího řešení tedy vidíme, že bylo zbytečné předpokládat, že P je mnohočlen - stačila např. spojitost funkce P. Z rovnosti $Q(1) = 3$ pak rovnou plyne $Q(x) = 3x$.

105. Uvažujme čtyřúhelník $ABCD$, v němž $|AB| + |BD| + |CD| = 16$ a jehož obsah je 32. Je tedy

$$32 = \frac{1}{2}|AB|.|BD| \sin |\sphericalangle ABD| + \frac{1}{2}|BD|.|CD| \sin |\sphericalangle BDC| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2}|AB|.|BD| + \frac{1}{2}|BD|.|CD| = \frac{1}{2}|BD|(|AB| + |CD|) = \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2}|BD|(16 - |BD|).$$

Z (1) dostáváme

$$|BD|^2 - 16|BD| + 64 \leqq 0,$$

neboli

$$(|BD| - 8)^2 \leqq 0.$$

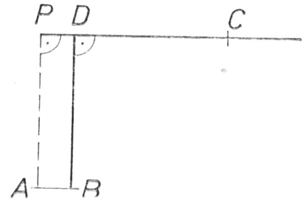
Z poslední nerovnosti plyne $|BD| = 8$, tedy $|AB| + |CD| = 16 - |BD| = 8$. Dále v (1) platí rovnost, musí tedy být $AB \perp BD$, $BD \perp CD$.

Označme P patu kolmice spuštěné z bodu A na přímku CD (obr. 129). Potom

$$|AC|^2 = |AP|^2 + |PC|^2 = |BD|^2 + (|AB| + |CD|)^2 = 2.8^2,$$

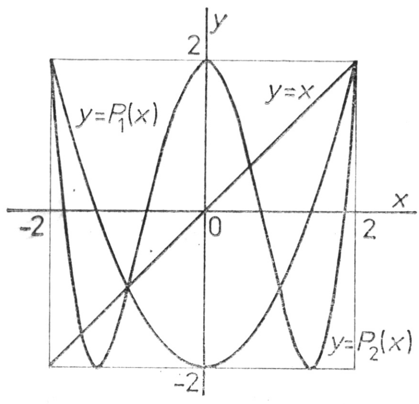
tedy $|AC| = 8\sqrt{2}$.

Dokázali jsme, že v každém čtyřúhelníku splňujícím podmínky úlohy je délka druhé úhlopříčky rovna $8\sqrt{2}$ cm.



Obr. 129

106. Probíhá-li x interval $\langle -2, 2\rangle$, hodnoty funkce x^2 proběhnou dvakrát interval $\langle 0, 4\rangle$ (nejprve klesají od 4 k 0 a pak rostou od 0 do 4) a hodnoty funkce $P_1(x) = x^2 - 2$ proběhnou dvakrát interval $\langle -2, 2\rangle$. Hodnoty funkce $(P_1(x))^2$ proběhnou čtyřikrát interval $\langle 0, 4\rangle$ a hodnoty funkce $P_2(x) = (P_1(x))^2 - 2$ čtyřikrát interval $\langle -2, 2\rangle$ (obr. 130). Odtud plyne indukcí: Proběhne-li x interval $\langle -2, 2\rangle$, proběhne funkce $P_n(x)$ 2^n-krát interval $\langle -2, 2\rangle$.



Obr. 130

Funkce $P_n(x)$ je spojitá a protne tedy úsečku spojující body $(-2, -2)$, $(2, 2)$ alespoň v 2^n různých bodech, tj. rovnice

$$P_n(x) = x \qquad (1)$$

má alespoň 2^n různých reálných řešení. Protože funkce $P_n(x)$ i funkce $P_n(x) - x$ jsou mnohočleny stupně 2^n, jsou to všechna řešení rovnice (1).

2. řešení. Budeme hledat kořeny rovnice $P_n(x) = x$ v intervalu $\langle -2, 2\rangle$. Každé reálné číslo x z tohoto intervalu lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru $x = 2\cos y$, kde $y \in \langle 0, \pi\rangle$. To nám umožní jednoduše vyjádřit hodnoty funkce $P_n(x)$. Dokážeme indukcí, že pro každé reálné y platí

$$P_n(2\cos y) = 2\cos 2^n y. \tag{2}$$

Pro $n = 1$ je

$$P_1(2\cos y) = 4\cos^2 y - 2 = 2(2\cos^2 y - 1) = 2\cos 2y.$$

Předpokládejme, že vztah (2) platí pro přirozené číslo k, potom

$$P_{k+1}(2\cos y) = P_1(P_k(2\cos y)) = P_1(2\cos 2^k y) = 2\cos 2^{k+1} y\,.$$

Vztah (2) tedy platí pro každé přirozené číslo n.

Úlohu o rovnici $P_n(x) = x$ jsme tak převedli na úlohu o rovnici

$$2\cos 2^n y = 2\cos y$$

a ta má v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ 2^n řešení

$$y = 0,$$

$$y = \frac{2k\pi}{2^n - 1},\quad k \in \{1, 2, \ldots, 2^{n-1} - 1\},$$

$$y = \frac{2k\pi}{2^n + 1},\quad k \in \{1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}.$$

Přitom všechny tyto hodnoty jsou navzájem různé. Kdyby totiž bylo

$$\frac{2k\pi}{2^n - 1} = \frac{2j\pi}{2^n + 1},$$

bylo by $k + j = 2^n(j - k)$, což pro $k \leqq 2^{n-1} - 1$ a $j \leqq 2^{n-1}$ nemůže nastat, neboť $0 < k + j < 2^n$. Protože stupeň mnohočlenu P_n je 2^n, jsme s důkazem hotovi.

107. Označme a, b, c rozměry krabice, $a \leqq b \leqq c$. Podle podmínek úlohy jsou a, b, c přirozená čísla. Krychle o objemu 2 má hrany délky $\sqrt[3]{2}$, tedy maximální počet krychlí tohoto objemu, které můžeme do krabice vložit, je

$$\left[\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right].$$

Tyto krychle zaplní 40 % objemu krabice, tedy

$$2\left[\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right] = 0{,}4\ abc.$$

Zavedeme-li označení $p_n = \dfrac{n}{\left[\dfrac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]}$, dostaneme vztah

$$p_a p_b p_c = 5. \tag{1}$$

Hodnoty $\left[\dfrac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]$ a p_n pro $n \leqq 8$ sestavíme do tabulky:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]$	0	1	2	3	3	4	5	6
p_n	–	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{4}{3}$

Všimněme si, že pro každé přirozené číslo n je

$$p_n = \frac{n}{\left[\dfrac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]} \geqq \frac{n}{\dfrac{n}{\sqrt[3]{2}}} = \sqrt[3]{2}. \tag{2}$$

Pro $n \geqq 8$ je naopak

$$p_n \leqq \frac{n}{\dfrac{n}{\sqrt[3]{2}} - 1} = \frac{n\sqrt[3]{2}}{n - \sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2}\left(1 + \frac{\sqrt[3]{2}}{n - \sqrt[3]{2}}\right) \leqq$$

$$\leqq \sqrt[3]{2}\left(1 + \frac{\sqrt[3]{2}}{8 - \sqrt[3]{2}}\right) = \frac{8\sqrt[3]{2}}{8 - \sqrt[3]{2}} \leqq \frac{8 \,.\, 1{,}26}{8 - 1{,}26} =$$

$$= \frac{10{,}08}{6{,}74} < \frac{3}{2}.$$

Odtud a z tabulky plyne, že pro $n \geqq 3$ je $p_n \leqq \frac{5}{3}$, takže pro $a \geqq 3$ máme

$$p_a p_b p_c \leqq \left(\frac{5}{3}\right)^3 < 5$$

a rovnice (1) není splněna. Nutně tedy $a = 2$ a rovnice (1) dostává tvar

$$p_b p_c = \frac{5}{2}, \tag{3}$$

takže musí být aspoň jedna z hodnot p_b, p_c větší než $\frac{3}{2}$. Z tabulky zjistíme, že takové jsou jen hodnoty 2 a $\frac{5}{3}$. Zbývající číslo z dvojice p_b, p_c je pak podle (3) rovno $\frac{5}{4}$ nebo $\frac{3}{2}$. První možnost vyloučíme podle (2), neboť $\frac{5}{4} < \sqrt[3]{2}$. Dvojici $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{2}$ odpovídají řešení $b = 3$, $c = 5$ nebo $b = 5$, $c = 6$.

Rozměry krabice jsou tedy buď $2 \times 3 \times 5$, nebo $2 \times 5 \times 6$.

108. Jsou-li $a_1, a_2, \ldots, a_n$ přirozená čísla, jejichž součet je 1976 a jejichž součin je maximální, potom platí:

(1) Žádné z čísel a_i není větší než 4. Číslo $a_i \geqq 5$ bychom mohli nahradit čísly 2 a $a_i - 2$. Součet by se nezměnil a součin by se zvětšil, protože pro $a_i \geqq 5$ je $2(a_i - 2) > a_i$.

(2) Mezi čísly a_i jsou nejvýše dvě dvojky. Kdyby tři z čísel a_i byly dvojky, nahradili bychom je dvěma trojkami, součet by se tím nezměnil, ale součin by se zvětšil, neboť $3 . 3 > 2 . 2 . 2$.

(3) Žádné z čísel a_i není jednička. Kdyby $a_i = 1$, nahradili bychom dvojici 1, a_j (pro nějaké $j \neq i$) číslem $a_j + 1$, přičemž by se součet nezměnil, ale součin zvětšil.

Čísla a_i tedy nabývají pouze hodnot 2, 3, 4. Je-li některé z čísel a_i rovno čtyřem, můžeme je nahradit dvěma dvojkami. Tím nezměníme součet ani součin. Maximální hodnotu součinu čísel a_i můžeme tedy dosáhnout, volíme-li za čísla a_i pouze dvojky a trojky, přičemž dvojky smějí být nejvýše dvě.

Protože $1976 = 3.658 + 2$, maximálního součinu dosáhneme, volíme-li $a_1 = a_2 = \ldots = a_{658} = 3$, $a_{659} = 2$. Příslušný maximální součin je pak 2.3^{658}.

Poznámka. Číslo 1976 můžeme nahradit libovolným přirozeným číslem $m > 1$. Maximální hodnota součinu je

$$\begin{aligned} 3^k &\text{ pro } m = 3k, \\ 2.3^k &\text{ pro } m = 3k + 2, \\ 4.3^{k-1} &\text{ pro } m = 3k + 1. \end{aligned}$$

2. řešení. Jsou-li $a_1, a_2, \ldots a_n$ přirozená čísla, jejichž součet je 1976 a jejichž součin je maximální, pak platí

$$|a_i - a_j| \leqq 1 \tag{1}$$

pro libovolná dvě $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Jinak bychom totiž čísla a_i, a_j, je-li např. $a_i > a_j + 1$, nahradili čísly $a_i - 1$, $a_j + 1$, součet by se nezměnil a součin by se zvětšil:

$$(a_i - 1)(a_j + 1) = a_i a_j + a_i - a_j - 1 > a_i a_j.$$

Protože pro libovolné přirozené číslo $m \neq 3$ platí nerovnost

$$3^m > m^3, \tag{2}$$

nemůže se žádné číslo $m \neq 3$ vyskytovat mezi čísly $a_1, a_2, \ldots, a_n$ více než dvakrát. Libovolnou trojici čísel m bychom totiž nahradili m trojkami, přičemž by součet zůstal stejný a součin by se zvětšil podle (2).

Mezi čísly $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou tedy podle (1) nejvýše dvě různá, a je-li $n \geqq 5$, musí být všechna až nejvýše na dvě rovna třem. Zbylá nejvýše dvě čísla musí být pak podle (1) rovna buď dvěma nebo čtyřem.

Z rozkladu $1976 = 3.658 + 2 = 3.656 + 4.2$ plyne, že hledaný maximální součin je $2.3^{658} > 4^2.3^{656}$. Možnost $n \leqq 4$ snadno vyloučíme, protože podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem je uvažovaný součin shora omezen číslem $\left(\frac{1976}{n}\right)^n$ a pro $n \leqq 4$ je

$$\left(\frac{1976}{n}\right)^n < (3^7)^4 < 2.3^{658}.$$

109. Pro každé dvě q-tice

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_q) \text{ a } v = (v_1, v_2, \ldots, v_q)$$

takové, že

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{q} a_{1i}u_i &= \sum_{i=1}^{q} a_{1i}v_i, \\ \sum_{i=1}^{q} a_{2i}u_i &= \sum_{i=1}^{q} a_{2i}v_i, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdot \\ \sum_{i=1}^{q} a_{pi}u_i &= \sum_{i=1}^{q} a_{pi}v_i, \end{aligned} \tag{1}$$

vyhovuje zřejmě q-tice

$$u - v = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots, u_q - v_q)$$

dané soustavě rovnic. Jestliže q-tice u, v jsou složeny z celých čísel, jsou různé a je $|u_i| \leqq p$, $|v_i| \leqq p$ pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$, pak jsou splněny i podmínky a), b), c). Stačí tedy ukázat, že takové dvě q-tice u, v existují.

Označme T množinu všech q-tic $t = (t_1, t_2, \ldots, t_q)$ celých čísel takových, že $|t_i| \leqq p$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$. Množina T obsahuje $(2p + 1)^q$ q-tic. Každé q-tici $t \in$ T přiřaďme p-tici

$$\left(\sum_{i=1}^{q} a_{1i}t_i, \sum_{i=1}^{q} a_{2i}t_i, \ldots, \sum_{i=1}^{q} a_{pi}t_i\right).$$

Tyto p-tice vytvoří množinu R. Protože

$$\left|\sum_{i=1}^{q} a_{ki}t_i\right| \leqq \sum_{i=1}^{q} |a_{ki}|\,|t_i| \leqq \sum_{i=1}^{q} |t_i| \leqq pq,$$

má množina R nanejvýš $(2pq + 1)^p$ prvků. Je však
$|R| \leqq (2pq + 1)^p = (4p^2 + 1)^p < ((2p + 1)^2)^p = (2p + 1)^{2p} = (2p + 1)^q = |T|$.
V množině T tedy existují dvě q-tice u, v, pro které platí (1). Tím je důkaz proveden.

110. Vypočteme několik členů posloupnosti $\{u_n\}$. Je

$$u_0 = 2,\ u_1 = \frac{5}{2},\ u_2 = \frac{5}{2},\ u_3 = \frac{65}{8},\ u_4 = \frac{1025}{32}$$

a všechny tyto členy jsou tvaru $\dfrac{2^{2k}+1}{2^k} = 2^k + 2^{-k}$. To nás vede k domněnce, že je

$$u_n = 2^{f(n)} + 2^{-f(n)}, \tag{1}$$

přičemž pro $f(n) > 0$ bude

$$[u_n] = 2^{f(n)}.$$

Matematickou indukcí dokážeme, že pro

$$f(n) = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$$

vyhovuje posloupnost $\{u_n\}$ vztahu (1), a dostaneme tak tvrzení úlohy.

Pro $n = 0$ a $n = 1$ je $u_0 = 2^0 + 2^0 = 2$, $u_1 = 2^1 + 2^{-1} = \dfrac{5}{2}$.
Předpokládejme tedy, že pro $n = k - 1$, $n = k$ vztah (1) platí. Potom je

$$u_{k-1}^2 - 2 = 2^{2f(k-1)} + 2^{-2f(k-1)},$$

$$u_{k+1} = (2^{f(k)} + 2^{-f(k)})\,(2^{2f(k-1)} + 2^{-2f(k-1)}) - \frac{5}{2} =$$

$$= 2^{f(k)+2f(k-1)} + 2^{f(k)-2f(k-1)} + 2^{-f(k)+2f(k-1)} + 2^{-f(k)-2f(k-1)} - \frac{5}{2},$$

přičemž

$$f(k) + 2f(k-1) = \frac{1}{3}(2^k - (-1)^k + 2^k + 2(-1)^k) =$$

$$= \frac{1}{3}(2^{k+1} - (-1)^{k+1}) = f(k+1),$$

$$f(k) - 2f(k-1) = (-1)^{k+1},$$

takže je dále

$$u_{k+1} = 2^{f(k+1)} + 2^{(-1)^{k+1}} + 2^{-(-1)^{k+1}} + 2^{-f(k+1)} - \frac{5}{2} = 2^{f(k+1)} + 2^{-f(k+1)}.$$

Tím je důkaz hotov.

111. Označme P střed úsečky KL, Q střed úsečky DN a S střed čtverce $ABCD$ (obr. 131). Vzhledem k souměrnosti stačí dokázat, že $|SP| = |SQ|$, $|\sphericalangle PSQ| = 30°$ a $|\sphericalangle QSK| = 15°$.

Nejprve si všimněme, že přímka AN je osa úsečky BK, takže $|KN| = |BN|$. Je tedy také $|MN| = |BN|$ a trojúhelník MBN je rovnostranný (délku jeho strany označme s) a $|\sphericalangle\ CBN| = 15°$. Úsečka SQ je střední příčka v trojúhelníku BDN, takže $|SQ| = \frac{s}{2}$, $|\sphericalangle\ QSK| = 15°$. Dále pak

$$|\sphericalangle\ PSQ| = |\sphericalangle\ PSK| - |\sphericalangle\ QSK| = 45° - 15° = 30°,$$

$$|SP| = \frac{|KN|}{2} = \frac{s}{2}.$$

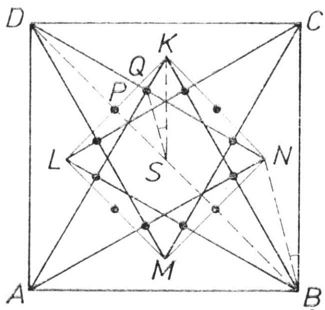
2. řešení. Ze souměrnosti je vidět (obr. 132), že čtyřúhelníky $P_1P_4P_7P_{10}$, $P_2P_5P_8P_{11}$, $P_3P_6P_9P_{12}$ jsou čtverce se společným středem, přičemž přímka P_1P_4 je rovnoběžná se stranou AB a přímky P_2P_5 a P_3P_6 s ní svírají úhly 30° a 60°. Poslední dva čtverce jsou zřejmě shodné, stačí ukázat, že i první je s nimi shodný.

Skutečně, je

$$|P_2P_5| = |AP_5| - |AP_2| = \frac{\sqrt{3}}{2}|AB| - \frac{1}{2}|AD| = \frac{\sqrt{3}-1}{2}|AB|,$$

$$|P_1P_4| = \frac{1}{2}|NL| = \frac{1}{2}(2|NQ| - |AB|) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2}|AB|.$$



Obr. 131

3. řešení (obr. 132). Vzhledem k souměrnosti stačí dokázat, že $|P_1P_2| = |P_2P_3|$ a $|SP_1| = |SP_2|$. Zaveďme soustavu souřadnic, v níž bude

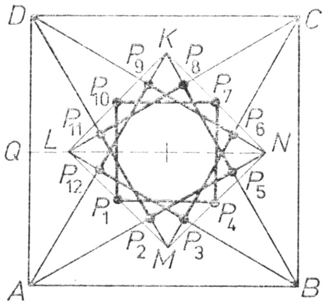
$$A = (-1, -1),\ B = (1, -1),\ D = (-1, 1),$$

$$K = (0, \sqrt{3} - 1),\ L = (1 - \sqrt{3}, 0),\ M = (0, 1 - \sqrt{3}),\ N = (\sqrt{3} - 1, 0),$$

$$P_1 = \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right),\ P_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1, -\frac{1}{2}\right), P_3 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Odtud dostaneme

$$|P_1P_2|^2 = |P_2P_3|^2 = 7 - 4\sqrt{3},$$
$$|SP_1|^2 = |SP_2|^2 = 2 - \sqrt{3}.$$



Obr. 132

112. Uvažujme posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a označme

$$s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Posloupnost splňuje dané podmínky, právě když

$$s_7 < 0,\ s_{11} > 0,$$
$$s_{k+7} < s_k \text{ pro všechna } k \in \{1, 2, \ldots, n - 7\}$$

a

$$s_{k+11} > s_k \text{ pro všechna } k \in \{1, 2, \ldots, n - 11\}.$$

Ukážeme, že $n \leqq 16$. Kdyby $n \geqq 17$, platilo by

$$0 > s_7 > s_{14} > s_3 > s_{10} > s_{17} > s_6 > s_{13} > s_2 >$$
$$> s_9 > s_{16} > s_5 > s_{12} > s_1 > s_8 > s_{15} > s_4 > s_{11} > 0,$$

což není možné. Existuje však nekonečně mnoho šestnáctic $s_1, s_2, \ldots, s_{16}$, pro které platí

$$s_6 > s_{13} > s_2 > s_9 > s_{16} > s_5 > s_{12} > s_1 > s_8 >$$
$$> s_{15} > s_4 > s_{11} > 0 > s_7 > s_{14} > s_3 > s_{10}.$$

Položíme-li

$$a_1 = s_1,$$
$$a_{k+1} = s_{k+1} - s_k \text{ pro každé } k \in \{1, 2, \ldots, 15\},$$

dostaneme šestnáctičlennou posloupnost, která vyhovuje podmínkám úlohy. Např. pro

$$s_6 = 12, s_{13} = 11, s_2 = 10, s_9 = 9, s_{16} = 8, s_5 = 7,$$
$$s_{12} = 6, s_1 = 5, s_8 = 4, s_{15} = 3, s_4 = 2, s_{11} = 1,$$
$$s_7 = -1, s_{14} = -2, s_3 = -3, s_{10} = -4$$

vyjde posloupnost

$$5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5$$

vyhovující daným podmínkám.

2. řešení. Předpokládejme, že posloupnost má alespoň 17 členů. Zvolme si libovolné 4 po sobě následující členy. Pak před nimi nebo za nimi je ještě aspoň 7 členů, tj. existuje 11 po sobě následujících členů, které začínají nebo končí zvolenou čtveřicí. Z podmínek úlohy plyne, že součet zvolených čtyř členů je kladný. Je tedy součet libovolných čtyř po sobě jdoucích členů kladný.

Zvolme si dále libovolné 3 po sobě následující členy a uvažujme 7 po sobě následujících členů, které začínají nebo končí zvolenou trojicí. Součet ostatních čtyř členů je, jak víme, kladný. Z podmínek úlohy plyne, že zvolená trojice má záporný součet. Součet libovolných tří po sobě následujících členů je tedy záporný.

Nakonec zvolme libovolný člen uvažované posloupnosti. Čtveřice, která jím začíná nebo končí, má kladný součet a trojice ostatních členů má záporný součet, takže zvolený člen je kladný. Uvažovaná posloupnost má tedy všechny členy kladné, což odporuje jedné z podmínek úlohy. Členů je tedy nejvýše šestnáct.

Poznámka. Všimněte si souvislosti metody 2. řešení s Euklidovým algoritmem pro hledání největšího společného dělitele dvou přirozených čísel. To vede k zobecnění:

Je-li v konečné posloupnosti reálných čísel součet každých m za sebou jdoucích členů záporný a součet každých n za sebou jdoucích členů kladný, je maximální počet členů posloupnosti $m + n - d - 1$, kde d je největší společný dělitel čísel m a n.

3. řešení. Má-li posloupnost alespoň 17 členů, sestavme z nich tabulku o 11 řádcích a 7 sloupcích:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \end{array}$$

Kdyby posloupnost splňovala podmínky úlohy, byly by všechny řádkové součty záporné a sloupcové součty kladné, což není možné - součet všech řádkových součtů je totiž roven součtu všech sloupcových součtů.

113. Ukážeme, že číslo

$$r = (n - 1)^2 (2n - 1)^2 = [(n - 1)(2n - 1)]^2 \tag{1}$$

lze ve V_n rozložit dvěma různými způsoby na součin nerozložitelných čísel. Především si všimněme, že každé z čísel

$$r,\ (n - 1)^2,\ (2n - 1)^2,\ (n - 1)(2n - 1)$$

patří do množiny V_n. Prozkoumejme dále rozložitelnost těchto čísel.

Kdyby číslo $(n - 1)^2$ bylo rozložitelné, existovala by přirozená čísla c, d tak, že

$$(n - 1)^2 = (cn + 1)(dn + 1).$$

To však není možné, protože pravá strana by byla větší než n^2. Číslo $(n - 1)^2$ je tedy nerozložitelné pro každé $n > 2$.

Je-li číslo $(2n - 1)^2$ rozložitelné, existují přirozená čísla c, d tak, že

$$(2n - 1)^2 = (cn + 1)(dn + 1) = cdn^2 + (c + d)n + 1,$$

neboli

$$4n - 4 = cdn + c + d.$$

Platí tedy $cd < 4$ a ze tří možností $c = 1$, $d = 3$; $c = 1$, $d = 2$; $c = 1$, $d = 1$ vyhovuje jen první v případě $n = 8$. Pro $n = 8$ je tedy

$$(2n - 1)^2 = (2.8 - 1)^2 = (8 + 1)(3.8 + 1)$$

a pro $n \neq 8$ je číslo $(2n - 1)^2$ nerozložitelné.

Analogicky zjistíme, že pro $n = 5$ je

$$(n - 1)(2n - 1) = (5 - 1)(2.5 - 1) = (5 + 1)^2$$

a pro $n \neq 5$ je číslo $(n - 1)(2n - 1)$ nerozložitelné.

Pro $5 \neq n \neq 8$ dává tedy (1) dva různé rozklady čísla r na nerozložitelné činitele

$$(n - 1)^2 \text{ a } (2n - 1)^2, \text{ resp. } (n - 1)(2n - 1) \text{ a } (n - 1)(2n - 1).$$

Pro $n = 5$ máme dva rozklady

$$16.81 = 6.6.6.6$$

a pro $n = 8$ dva rozklady

$$9.25.49 = 105.105.$$

2. řešení. Stejně jako v předcházejícím řešení zjistíme, že číslo $(n - 1)^2$ je nerozložitelné. Toto číslo nedělí součin $(n - 1)(2n - 1)$, protože číslo

$$\frac{(n - 1)(2n - 1)}{(n - 1)^2} = \frac{2n - 1}{n - 1} = 2 + \frac{1}{n - 1}$$

není pro žádné $n > 2$ přirozené. Rozložíme-li tedy obě strany (1) dále až na nerozložitelné činitele, bude na levé straně činitel $(n - 1)^2$, a na pravé straně nebude. Půjde tedy o dva různé rozklady.

3. řešení se opírá o hlubokou Dirichletovu větu: Jsou-li první člen a diference aritmetické posloupnosti nesoudělná přirozená čísla, obsahuje posloupnost nekonečně mnoho prvočísel. Podle této věty obsahuje posloupnost

$$n - 1,\ 2n - 1,\ 3n - 1,\ \ldots$$

nekonečně mnoho prvočísel. Vezmeme-li dvě z nich, p a r, jsou čísla p^2, r^2, pr, p^2r^2 z množiny V_n a číslo p^2r^2 má dva rozklady na nerozložitelné činitele:

$$p^2.r^2 \quad \text{a} \quad pr.pr.$$

Můžeme také vzít čtyři prvočíselné členy p, q, r, s zmíněné posloupnosti. Jejich součin má pak tři rozklady

$$pq.rs, \quad pr.qs, \quad ps.qr.$$

Poznámka. Předpoklad $n > 2$ je podstatný. V_2 je množina všech lichých čísel větších než 2 a nerozložitelná čísla ve V_2 jsou právě lichá prvočísla. V_1 je množina všech přirozených čísel větších než 1 a nerozložitelná čísla ve V_1 jsou právě prvočísla. Z jednoznačnosti rozkladu na prvočinitele je vidět, že pro $n \leqq 2$ tvrzení úlohy neplatí.

114. Je-li alespoň jedno z čísel a, b nenulové, platí

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$$

a existuje tedy reálné číslo y tak, že

$$\sqrt{a^2+b^2}\cos y = a, \quad \sqrt{a^2+b^2}\sin y = b.$$

Tyto vztahy platí i v případě $a = b = 0$, dokonce pro každé y. Existuje tedy číslo y tak, že

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos x\cos y + \sqrt{a^2+b^2}\sin x\sin y =$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-y).$$

Analogicky najdeme číslo Y, pro které platí

$$A\cos 2x + B\sin 2x = \sqrt{A^2+B^2}\cos 2(x-Y).$$

Pro každé reálné x je pak

$$f(x) = 1 - \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-y) - \sqrt{A^2+B^2}\cos 2(x-Y).$$

Nyní snadno zjistíme, že

$$f\left(y+\frac{\pi}{4}\right) + f\left(y-\frac{\pi}{4}\right) = 2 - \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2},$$

$$f(Y) + f(Y+\pi) = 2 - 2\sqrt{A^2+B^2},$$

odkud plyne dokazované tvrzení.

Poznámka. Obrácené tvrzení neplatí. Např. pro $a = \sqrt{2}$, $b = 0$, $A = 0$, $B = 0$ je $a^2 + b^2 \leqq 2$, $A^2 + B^2 \leqq 1$, $f(0) = 1 - \sqrt{2} < 0$.

115. Nechť dvojice přirozených čísel a, b splňuje podmínky úlohy. Pak je

$$q^2 + r = 1977,$$

kde

$$0 \leqq r < a + b,$$

takže

$$q^2 \leqq 1977 < q^2 + a + b. \tag{1}$$

Protože

$$a^2 + b^2 = q(a + b) + r < (q + 1)(a + b)$$

a pro každá dvě reálná čísla x, y platí

$$(x + y)^2 \leqq 2(x^2 + y^2),$$

je

$$(a + b)^2 < 2(q + 1)(a + b)$$

a odtud

$$a + b \leqq 2q + 1.$$

Podle (1) dostáváme

$$q^2 \leqq 1977 < q^2 + 2q + 1 = (q + 1)^2.$$

Této podmínce vyhovuje jedině $q = 44$. Pak je $r = 1\,977 - 44^2 = 41$ a platí

$$a^2 + b^2 = 44(a + b) + 41,$$

neboli

$$(a - 22)^2 + (b - 22)^2 = 1\,009.$$

Zbývá rozložit číslo 1 009 na součet dvou čtverců

$$1009 = u^2 + v^2.$$

Probereme-li všechny možnosti pro koncové číslice čísel u, v, zjistíme, že jedno z nich musí končit nulou nebo pětkou, a najdeme jediný rozklad

$$1009 = 15^2 + 28^2.$$

Odtud pak dostaneme čtyři dvojice (a, b) vyhovující podmínkám úlohy:

$$(7,50),\ (37, 50),\ (50, 7),\ (50, 37).$$

116. Pro libovolné $k > 1$ je

$$f(k) > f(f(k - 1)), \tag{1}$$

takže $f(k)$ není nejmenší ze všech hodnot funkce f. Protože hodnoty funkce f jsou přirozená čísla, nejmenší hodnota existuje a není jiná možnost, než že je to $f(1)$. Je tedy

$$f(1) < f(n) \text{ a } f(n) \geqq 2$$

pro každé $n \geqq 2$.

Pro libovolné $k > 2$ je pak $f(k-1) \geqq 2$ a z (1) vidíme, že $f(k)$ není nejmenší z hodnot $f(2), f(3), \ldots$. Nejmenší z těchto hodnot je $f(2)$, takže

$$f(1) < f(2) < f(n) \text{ a } f(n) \geqq 3$$

pro každé $n \geqq 3$.

Tak pokračujeme dále indukcí a zjistíme, že $f(i) < f(j)$ pro každé dvě hodnoty $i < j$ a že $f(n) \geqq n$ pro každé n.

Kdyby pro některé n bylo

$$f(n) > n, \text{ tj. } f(n) \geqq n + 1,$$

bylo by pak

$$f(f(n)) \geqq f(n + 1),$$

a to odporuje dané podmínce.

2. řešení. Množinu všech funkcí f splňujících podmínky úlohy označme F. Matematickou indukcí dokážeme, že množina F obsahuje jedinou funkci, totiž identitu $f(n) = n$.

Nejprve ukážeme, že pro každou funkci $f \in \mathsf{F}$ je $f(1) = 1$. Pro každé $k > 1$ je

$$f(k) > f(f(k-1)) \geqq 1,$$

takže pokud pro některé k je $f(k) = 1$, je to jen pro $k = 1$. Kdyby pro každé k bylo $f(k) > 1$, platilo by pro každé $n_1 > 1$

$$f(n_1) > f(f(n_1 - 1)) = f(n_2) > f(f(n_2 - 1)) = f(n_3) > f(f(n_3 - 1)) \ldots,$$

tj. existovala by nekonečná klesající posloupnost přirozených čísel $f(n_1) > > f(n_2) > f(n_3) > \ldots$, kde

$$n_2 = f(n_1 - 1) > 1, \; n_3 = f(n_2 - 1) > 1, \; \ldots,$$

což není možné. Je tedy $f(1) = 1$ pro každou $f \in \mathsf{F}$.

Buď nyní k přirozené číslo a předpokládejme, že pro každou funkci $f \in \mathsf{F}$ je $f(k) = k$. Uvažujme funkci g definovanou předpisem

$$g(n) = f(n + 1) - 1$$

pro každé n. Ukážeme, že pokud $f \in \mathsf{F}$, je i $g \in \mathsf{F}$. Jak už víme, je $f(n + 1) > 1$, tedy $g(n)$ je přirozené číslo pro každé n. Dále je

$$g(g(n)) = g(f(n + 1) - 1) = f(f(n + 1)) - 1 < f(n + 2) - 1 = g(n + 1).$$

Je tedy skutečně $g \in \mathsf{F}$ a podle indukčního předpokladu je $g(k) = k$, jinými slovy

$$f(k + 1) - 1 = k,$$

tj. $f(k + 1) = k + 1$ pro každou $f \in \mathsf{F}$. Tím je důkaz proveden.

117. Přirozená čísla $m < n$ (zatím ne nutně s minimálním součtem) vyhovují podmínce úlohy, právě když číslo

$$1978^n - 1978^m = 1978^m(1978^{n-m} - 1)$$

je dělitelné tisícem. To nastane, právě když $m \geqq 3$ a číslo $1978^{n-m} - 1$ je dělitelné 125.

Snadno zjistíme, že $1978^{n-m} - 1$ je dělitelné pěti, jen když $n - m$ je dělitelné čtyřmi. Při dělení 125 dává 1978 zbytek 103 a 103^4 dává zbytek 6. Číslo $1978^{n-m} - 1$ je tedy dělitelné 125, právě když $n - m = 4k$ a $6^k - 1$ je dělitelné 125. Podle binomické věty

$$6^k - 1 = (5 + 1)^k - 1 = 5k + 25\frac{k(k - 1)}{2} + 125\,(\ldots),$$

takže $6^k - 1$ je dělitelné 125, právě když

$$5k + 25\frac{k(k - 1)}{2} = \frac{5k(5k - 3)}{2}$$

je dělitelné 125, tj. právě když k je dělitelné 25.

Čísla m, n tedy vyhovují podmínce, právě když je pro $j \geqq 1$

$$n - m = 100j \text{ a } m \geqq 3.$$

Nejmenší součet

$$n + m = 100j + 2m$$

dostaneme pro $j = 1$ a $m = 3$, tj. 106.

118. Označme S střed dané kulové plochy, r její poloměr a $d = |SP|$. Ukážeme, že hledanou množinou je kulová plocha se středem S a poloměrem $\sqrt{3r^2 - 2d^2}$.

Buď Q libovolný bod popsaný v úloze a určeme vzdálenost SQ. Bude se nám hodit, když si uvědomíme, že pro bod X a obdélník $TUVW$ v prostoru vždy platí

$$|TX|^2 + |VX|^2 = |UX|^2 + |WX|^2. \tag{1}$$

Tuto rovnost snadno dostaneme např. promítnutím bodu X na přímky TU, VW. Můžeme ji ale ověřit také tak, že zavedeme soustavu souřadnic, aby

$$T = (-p, -q, 0),\ U = (p, -q, 0),\ V = (p, q, 0),\ W = (-p, q, 0),$$
$$X = (x, y, z).$$

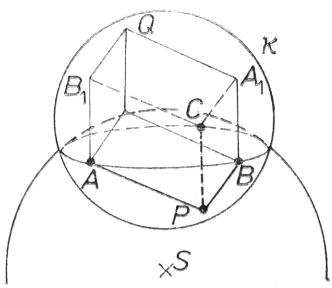
Pak bude

$$\begin{aligned}
|TX|^2 &= (x + p)^2 + (y + q)^2 + z^2,\\
|UX|^2 &= (x - p)^2 + (y + q)^2 + z^2,\\
|VX|^2 &= (x - p)^2 + (y - q)^2 + z^2,\\
|WX|^2 &= (x + p)^2 + (y - q)^2 + z^2
\end{aligned}$$

a rovnost (1) skutečně platí.

Použijeme-li ji na obdélník $PAQA_1$ a bod S (obr. 133), dostaneme

$$|SQ|^2 = |SA|^2 + |SA_1|^2 - |SP|^2 = r^2 + |SA_1|^2 - d^2.$$



Obr. 133

Pro obdélník PBA_1C a bod S vyjde

$$|SA_1|^2 = |SB|^2 + |SC|^2 - |SP|^2 = 2r^2 - d^2,$$

takže

$$|SQ|^2 = 3r^2 - 2d^2.$$

Bod Q tedy leží na kulové ploše se středem S a poloměrem $\sqrt{3r^2-2d^2}$.

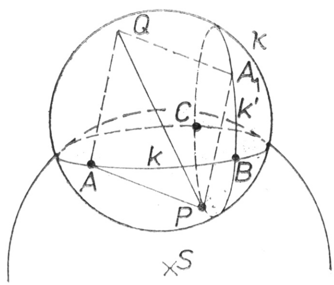
Obráceně, zvolme libovolný bod Q na kulové ploše se středem S a poloměrem $|SQ| = \sqrt{3r^2 - 2d^2}$. Je $d = |SP| < r$, a tedy $|SQ| > r$, takže bod P leží uvnitř a bod Q vně dané kulové plochy. Kulová plocha $\varkappa$ s průměrem PQ proto protíná danou kulovou plochu v kružnici k (obr. 134). Zvolme libovolný bod A na kružnici k a body A, P, Q doplňme na obdélník APA_1Q. Rovina vedená přímkou PA_1 kolmo k přímce PA protne kulovou plochu $\varkappa$ v kružnici k' s průměrem PA_1. Podle (1) zjistíme, že

$$|SA_1|^2 = |SP|^2 + |SQ|^2 - |SA|^2 = d^2 + (3r^2 - 2d^2) - r^2 =$$
$$= 2r^2 - d^2 > r^2, \tag{2}$$

takže bod A_1 leží vně dané kulové plochy. Odtud plyne, že kružnice k, k' se protnou ve dvou bodech B, C. Zřejmě $AP \perp BP$, $AP \perp CP$. Zbývá ukázat, že $BP \perp CP$. Doplňme body P, B, A_1 na obdélník PBA_1C_0. Pak je podle (1) a (2)

$$|SC_0|^2 = |SP|^2 + |SA_1|^2 - |SB|^2 = d^2 + (2r^2 - d^2) - r^2 = r^2,$$

a tedy bod C_0 leží na dané kulové ploše, takže $C_0 = C$ a PBA_1C je obdélník.



Obr. 134

Ke každému bodu Q kulové plochy se středem S a poloměrem $\sqrt{3r^2-2d^2}$ existují tedy na dané kulové ploše se středem S a poloměrem r body A, B, C tak, že úsečka PQ je tělesovou úhlopříčkou kvádru určeného navzájem kolmými hranami PA, PB, PC.

Poznámky. Rovinná analogie úlohy: Je dána kružnice k se středem S a poloměrem r a bod P uvnitř ní. Množinou všech bodů Q roviny takových, že PQ je úhlopříčkou obdélníku, jehož ostatní dva vrcholy leží na kružnici k, je kružnice se středem S a poloměrem $\sqrt{2r^2 - |SP|^2}$. Odtud plyne, že vrcholy A_1, B_1, C_1 kvádru $APBC_1B_1CA_1Q$ leží na kulové ploše se středem S a poloměrem $\sqrt{2r^2 - d^2}$.

119. Budeme postupně probírat přirozená čísla a rozhodovat, do které z podmnožin $\{f(1), f(2), \ldots\}$, $\{g(1), g(2), \ldots\}$ patří. Zřejmě je pro každé přirozené číslo n

$$g(n) = f(f(n)) + 1 > f(f(n)) \geqq f(n),$$

takže $g(n)$ je až za $f(n)$ a bezprostředně za $f(f(n))$.
Dostáváme tedy

$$\begin{aligned}
1 &= f(1) = f(f(1)),\\
2 &= g(1),\\
3 &= f(2),\\
4 &= f(3) = f(f(2)),\\
5 &= g(2),\\
6 &= f(4) = f(f(3)),\\
7 &= g(3),\\
8 &= f(5),\\
9 &= f(6) = f(f(4)),\\
10 &= g(4),
\end{aligned}$$

atd. až

$$388 = f(240).$$

2. řešení. Uvažujme množinu prvních $g(n)$ přirozených čísel a rozložme ji na dvě disjunktní podmnožiny

$$\{1, 2, \ldots, f(f(n)), g(n)\} = \{f(1), f(2), \ldots, f(f(n))\} \cup \{g(1), g(2), \ldots, g(n)\}.$$

Odtud vidíme, že pro každé přirozené číslo n platí

$$g(n) = f(n) + n. \tag{1}$$

Postupně dostáváme

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \\ g(1) &= 1 + 1 = 2, \\ f(2) &= 3, \\ g(2) &= 3 + 2 = 5, \\ f(3) &= 4, \\ g(3) &= 4 + 3 = 7, \\ f(4) &= 6, \\ g(4) &= 6 + 4 = 10, \\ f(5) &= 8, \\ g(5) &= 8 + 5 = 13, \\ f(6) &= 9, \end{aligned}$$

atd. až

$$f(240) = 388.$$

3. řešení. Vyjdeme opět ze vztahu (1), který tentokrát napíšeme ve tvaru

$$f(f(n)) = f(n) + n - 1. \tag{2}$$

Vyjdeme od hodnot $f(1) = 1, f(2) = 3$ a dále pak dostáváme

$$\begin{aligned} f(3) &= 3 + 2 - 1 = 4, \\ f(4) &= 4 + 3 - 1 = 6, \\ f(6) &= 6 + 4 - 1 = 9, \\ f(9) &= 9 + 6 - 1 = 14, \\ f(14) &= 14 + 9 - 1 = 22, \\ f(22) &= 22 + 14 - 1 = 35, \\ f(35) &= 35 + 22 - 1 = 56, \\ f(56) &= 56 + 35 - 1 = 90, \\ f(90) &= 90 + 56 - 1 = 145, \\ f(145) &= 145 + 90 - 1 = 234, \\ f(234) &= 234 + 145 - 1 = 378. \end{aligned}$$

Abychom doplnili zbývající členy, uvědomme si, že pro $n \in \mathsf{F} = \{f(1), f(2), \ldots\}$ je

$$f(n + 1) = f(n) + 2$$

a pro $n \in \mathsf{G} = \{g(1), g(2), \ldots\}$ je

$$f(n + 1) = f(n) + 1.$$

Je-li totiž $n \in \mathsf{F}$, $n = f(k)$, je

$$f(n) + 1 = f(f(k)) + 1 = g(k) \in \mathsf{G}.$$

Následující číslo $f(n) + 2$ pak nemůže být také v G, neboť každému číslu z G bezprostředně předchází číslo z F, takže $f(n) + 2 \in \mathsf{F}$. Je-li $n \in \mathsf{G}$, $n = g(k)$, je

$$f(n) + 1 = f(g(k)) + 1 \notin \mathsf{G},$$

tj. $f(n) + 1 \in \mathsf{F}$.

Vraťme se k rovnosti

$$145 = f(90) = f(f(56)),$$

ze které plyne

$$145 \in \mathsf{F},\ 146 \in \mathsf{G},\ 147 \in \mathsf{F}.$$

Dále máme $f(145) = 234$, $f(146) = 234 + 2 = 236$, $f(147) = 236 + 1 = 237$, $f(148) = 237 + 2 = 239$, takže

$$234 \in \mathsf{F},\ 235 \in \mathsf{G},\ 236 \in \mathsf{F},\ 237 \in \mathsf{F},\ 238 \in \mathsf{G},\ 239 \in \mathsf{F}.$$

Konečně

$$\begin{aligned} f(234) &= 378, \\ f(235) &= 378 + 2 = 380, \\ f(236) &= 380 + 1 = 381, \\ f(237) &= 381 + 2 = 383, \\ f(238) &= 383 + 2 = 385, \\ f(239) &= 385 + 1 = 386, \\ f(240) &= 386 + 2 = 388. \end{aligned}$$

4. řešení. Postupujeme stejně jako v předešlém řešení až k rovnosti $f(56) = 90$. Protože $56 \in \mathsf{F}$, je podle předchozí úvahy

$$f(57) = f(56) + 2 = 92$$

a podle (2) dále dostáváme

$$\begin{aligned} f(92) &= 92 + 57 - 1 = 148, \\ f(148) &= 148 + 92 - 1 = 239, \\ f(239) &= 239 + 148 - 1 = 386. \end{aligned}$$

Protože $239 \in \mathsf{F}$, je

$$f(240) = f(239) + 2 = 388.$$

5. řešení. Sledujeme-li hodnoty posloupností $\{f(n)\}$ a $\{g(n)\}$, vidíme, že rostou poměrně rovnoměrně, a to nás vede k domněnce, že pro každé přirozené n je

$$f(n) = [n\varphi],\ g(n) = [n\gamma],$$

kde φ, γ jsou nějaká kladná reálná čísla, která nejsou celá.

Platí-li tato domněnka, je podle (1) pro každé přirozené n

$$[n\gamma] = [n\varphi] + n,$$

neboli

$$\frac{[n\gamma]}{n} = \frac{[n\varphi]}{n} + 1. \tag{3}$$

Přitom pro každé reálné α a přirozené n je

$$n\alpha - 1 < [n\alpha] \leqq n\alpha,$$

neboli

$$\alpha - \frac{1}{n} < \frac{[n\alpha]}{n} \leqq \alpha.$$

Pro každé reálné α je tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[n\alpha]}{n} = \alpha. \tag{4}$$

Přejdeme-li ve (3) k limitě, dostaneme pro koeficienty φ, γ podmínku

$$\gamma = \varphi + 1. \tag{5}$$

Platí-li naše domněnka, je každé přirozené číslo obsaženo právě jednou mezi členy dvou posloupností $\{[n\varphi]\}$, $\{[n\gamma]\}$. Označíme-li tedy F_k (resp. G_k) počet těch členů posloupnosti $\{[n\varphi]\}$ (resp. $\{[n\gamma]\}$), které jsou nejvýše rovny číslu k, bude pro každé přirozené k platit

$$F_k + G_k = k. \tag{6}$$

Přitom

$$F_k = \left[\frac{k+1}{\varphi}\right],\quad G_k = \left[\frac{k+1}{\gamma}\right],$$

neboť nerovnost

$$[n\varphi] \leqq k$$

je ekvivalentní nerovnosti

$$n\varphi < k + 1, \text{ tj. } n < \frac{k+1}{\varphi}$$

(a analogicky pro γ).

Rovnost (6) má tedy tvar

$$\left[\frac{k+1}{\varphi}\right] + \left[\frac{k+1}{\gamma}\right] = k,$$

neboli

$$\frac{\left[\frac{k+1}{\varphi}\right]}{k+1} + \frac{\left[\frac{k+1}{\gamma}\right]}{k+1} = \frac{k}{k+1}$$

a limitním přechodem pro $k \to \infty$ dostaneme podle (4) další podmínku

$$\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\gamma} = 1. \tag{7}$$

Snadno zjistíme, že podmínkám (5) a (7) vyhovuje jediná dvojice kladných čísel

$$\varphi = \varepsilon, \ \gamma = \varepsilon + 1,$$

kde $\varepsilon = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ je kladný kořen rovnice

$$\varepsilon^2 - \varepsilon - 1 = 0.$$

Platí-li tedy naše domněnka, je

$$f(n) = [n\varepsilon], \ g(n) = [n(\varepsilon + 1)]. \tag{8}$$

Dokážeme, že tyto dvě posloupnosti skutečně vyhovují všem požadavkům úlohy.

Především je zřejmé, že hodnoty posloupnosti $\{f(n)\}$ jsou přirozená čísla a že $f(n + 1) > f(n)$ pro každé přirozené n, neboť $\varepsilon > 1$, stejně pro $g(n)$.

Pro žádná dvě přirozená m, n není $f(m) = g(n)$. Kdyby totiž

$$[m\varepsilon] = [n(\varepsilon + 1)] = k,$$

bylo by

$$k \leqq m\varepsilon < k + 1,$$
$$k \leqq n(\varepsilon + 1) < k + 1,$$

a protože ε je iracionální, dokonce

$$k < m\varepsilon < k + 1,$$
$$k < n(\varepsilon + 1) < k + 1.$$

Odtud

$$k\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon + 1}\right) < m + n < (k + 1)\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon + 1}\right).$$

Protože, jak víme,

$$\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon + 1} = 1,$$

platilo by pro nějaká tři přirozená čísla k, m, n

$$k < m + n < k + 1,$$

a to není možné.

Dále ukážeme, že každé přirozené číslo je členem některé z posloupností $\{f(n)\}$, $\{g(n)\}$. Pro každé přirozené číslo k je totiž při stejném značení jako v (6)

$$\frac{k+1}{\varepsilon} - 1 < F_k = \left[\frac{k+1}{\varepsilon}\right] < \frac{k+1}{\varepsilon},$$
$$\frac{k+1}{\varepsilon+1} - 1 < G_k = \left[\frac{k+1}{\varepsilon+1}\right] < \frac{k+1}{\varepsilon+1}$$

(vpravo je ostrá nerovnost opět díky iracionalitě čísla ε), takže

$$k - 1 < F_k + G_k < k + 1,$$

tj.

$$F_k + G_k = k.$$

Zbývá dokázat, že

$$f(f(n)) + 1 = g(n)$$

pro každé přirozené n, tj.

$$[[n\varepsilon]\varepsilon] + 1 = [n(\varepsilon + 1)].$$

Vyjdeme z nerovnosti

$$[n\varepsilon] < n\varepsilon < [n\varepsilon] + 1.$$

Po vynásobení číslem ε dostaneme

$$[n\varepsilon]\varepsilon < n\varepsilon^2 < ([n\varepsilon] + 1)\varepsilon < [n\varepsilon]\varepsilon + 2\,,$$

poněvadž $\varepsilon < 2$. Přejdeme-li k celým částem, máme

$$[[n\varepsilon]\varepsilon] \leqq [n\varepsilon^2] \leqq [([n\varepsilon] + 1)\varepsilon] \leqq [[n\varepsilon]\varepsilon] + 2\,,$$

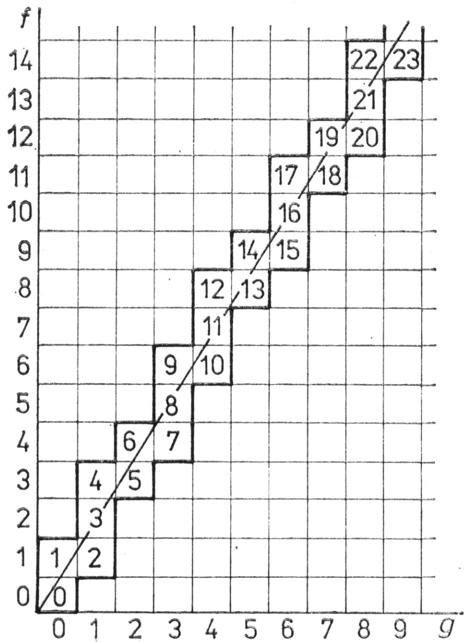
což můžeme psát jako

$$f(f(n)) \leqq g(n) \leqq f(f(n) + 1) \leqq f(f(n)) + 2\,,$$

neboť $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$. Jak už víme, posloupnosti $\{f(n)\}$, $\{g(n)\}$ nemají žádný společný člen, takže je $f(f(n)) < g(n) < f(f(n)) + 2$, a vidíme, že

$$g(n) = f(f(n)) + 1\,.$$

Tím je důkaz hotov.



Obr. 135

Vyjádření (8) umožňuje počítat pohodlně numerické hodnoty posloupností $\{f(n)\}$, $\{g(n)\}$. Tak máme

$$f(240) = [240\varepsilon] = [388{,}3\ldots] = 388\,.$$

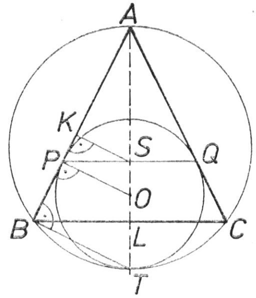
Poznámka. Poslední řešení má názorný geometrický význam: Na čtverečkovaném papíru zvolme dvě kolmé linky jako osy souřadnic a za jednotku délky vezměme stranu čtverečku. Počátkem veďme přímku se směrnicí $\varepsilon = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ta nebude vzhledem k iracionalitě ε procházet žádným průsečíkem linek kromě počátku. Začneme od počátku, postupujeme po přímce a průběžně číslujeme čtverečky, kterými přímka prochází (obr. 135). Pak bude $f(n)$ rovno číslu levého krajního očíslovaného čtverečku v n-tém řádku a $g(n)$ rovno číslu spodního očíslovaného čtverečku v n-tém sloupci (číslujeme od nuly).

120. Střed úsečky PQ označme S a patu kolmice vedené z bodu S k rameni AB označme K (obr. 136). Střed kružnice procházející body P, Q a dotýkající se opsané kružnice v bodě T označme O. Střed strany BC označme L. Zřejmě stačí dokázat, že $|SK| = |SL|$.

Z podobných pravoúhlých trojúhelníků $AKS \sim APO \sim ABT \sim ASP \sim ALB$ máme

$$\frac{|SK|}{|AS|} = \frac{|OP|}{|AO|},$$

$$\frac{|SL|}{|AS|} = \frac{|PB|}{|AP|} = \frac{|OT|}{|AO|} = \frac{|OP|}{|AO|},$$



Obr. 136

neboť $|OT| = |OP|$. Je tedy $|SK| = |SL|$ a bod S je středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

2. řešení. Označme L střed strany BC, S střed úsečky PQ a T bod, v němž se kružnice procházející body P, Q dotýká kružnice opsané trojúhelníku ABC. Stejnolehlost se středem A a koeficientem $\dfrac{|AL|}{|AT|}$ převede trojúhelník $AB'C'$ (obr. 137) na trojúhelník ABC a střed O kružnice vepsané trojúhelníku $AB'C'$ na střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Z podobných pravoúhlých trojúhelníků APO a ABT s výškami PS, BL máme

$$\frac{|AS|}{|AO|} = \frac{|AL|}{|AT|}.$$

Bod O tedy přejde v bod S a důkaz je hotov.

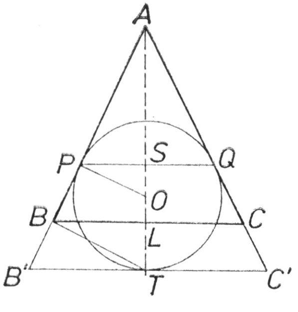
3. řešení. Označme S střed úsečky PQ a L střed úsečky BC. Stačí ukázat, že přímka BS je osou úhlu ABC (obr. 138). Ve čtyřúhelníku $PSTB$ jsou úhly při protilehlých vrcholech S, B pravé, takže mu lze opsat kružnici. Odtud vidíme, že

$$|\sphericalangle PBS| = |\sphericalangle PTS|,$$

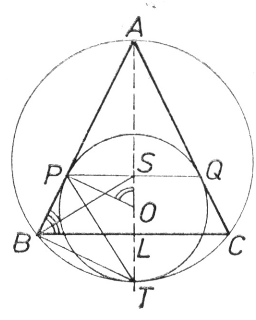
neboť jde o obvodové úhly příslušné témuž oblouku této kružnice. Dále je

$$|\sphericalangle PTS| = \frac{1}{2}\,|\sphericalangle POS|,$$

neboť jde o obvodový a středový úhel příslušný témuž oblouku kružnice



Obr. 137



Obr. 138

procházející body P, Q, T. Konečně z podobných pravoúhlých trojúhelníků APO a ALB máme

$$|\sphericalangle POS| = |\sphericalangle ABC|.$$

Je tedy

$$|\sphericalangle PBS| = \frac{1}{2}\,|\sphericalangle ABC|.$$

121. Zvolme přirozené číslo n. Je-li

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n,$$

pak pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je $a_k \geqq k$, takže

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geqq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Pokud pro některé dva indexy $i < j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, je $a_i > a_j$, pak

$$\left(\frac{a_i}{i^2} + \frac{a_j}{j^2}\right) - \left(\frac{a_i}{j^2} + \frac{a_j}{i^2}\right) = (a_i - a_j)\left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{j^2}\right) > 0.$$

Vyměníme-li tedy mezi sebou čísla a_i, a_j, součet $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2}$ se zmenší. Konečným počtem takových výměn dojdeme od n-tice

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

k n-tici

$$a_1' < a_2' < \ldots < a_n',$$

přičemž

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} > \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k'}{k^2} \geqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

122. Předpokládejme, že dokazované tvrzení neplatí, tj. že rozdíl čísel dvou členů z jedné země není nikdy roven číslu jejich krajana.

Protože $6 . 329 < 1\,978$, je z některé země A zapsáno aspoň 330 členů pod čísly

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{330}.$$

Uvažujme 329 rozdílů

$$a_{330} - a_1,\ a_{330} - a_2,\ \ldots,\ a_{330} - a_{329}.$$

Podle našeho předpokladu to jsou čísla členů z ostatních pěti zemí. Protože $5.65 < 329$, je mezi nimi aspoň 66 z jedné země B. Jejich pořadová čísla označme

$$b_1 < b_2 < \ldots < b_{66}$$

a uvažujme 65 rozdílů

$$b_{66} - b_1,\ b_{66} - b_2,\ \ldots,\ b_{66} - b_{65}.$$

Tyto rozdíly nejsou čísla členů z B a nemohou to být ani čísla členů z A, neboť

$$b_{66} - b_k = (a_{330} - a_i) - (a_{330} - a_j) = a_j - a_i.$$

Jsou to čísla členů z ostatních čtyř zemí. Protože $4.16 < 65$, je mezi nimi aspoň 17 z jedné země C a mají čísla

$$c_1 < c_2 < \ldots < c_{17}.$$

Ze 16 čísel

$$c_{17} - c_1,\ c_{17} - c_2,\ \ldots,\ c_{17} - c_{16}$$

nepatří žádné členům ze zemí A, B, C a aspoň 6 jich patří členům ze země D s čísly

$$d_1 < d_2 < \ldots < d_6.$$

Z 5 čísel

$$d_6 - d_1,\ d_6 - d_2,\ \ldots,\ d_6 - d_5$$

patří aspoň tři

$$e_1 < e_2 < e_3$$

členům z další země E. Oba rozdíly

$$f_1 = e_3 - e_1,\ f_2 = e_3 - e_2$$

pak patří členu z poslední země F. Člen s číslem

$$f_2 - f_1$$

není tedy občanem žádné z uvedených zemí, a to je spor.

Poznámka. Touto metodou by se nám podařilo dokázat tvrzení úlohy i v případě, kdy má společnost jen 1957 členů. V obecném případě pak metoda funguje, má-li společnost alespoň

$$k!\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{k!}\right)=[k!\,\mathrm{e}]$$

členů (e je známá konstanta $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=2{,}718\ldots$) z k zemí.

Tvrzení úlohy však platí i v dalších případech. Tak pro $k = 3$ platí pro 14 členů a pro 13 členů neplatí, pro $k = 4$ platí pro 45 členů a pro 44 členů neplatí. Přitom je $[3!\mathrm{e}] = 16$, $[4!\mathrm{e}] = 65$.

123. Daný součet upravíme

$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}-$$

$$-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{1318}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{1319}-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{659}\right)=$$

$$=\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\ldots+\frac{1}{1319}=$$

$$=\left(\frac{1}{660}+\frac{1}{1319}\right)+\left(\frac{1}{661}+\frac{1}{1318}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{989}+\frac{1}{990}\right)=$$

$$=\frac{1979}{660.1319}+\frac{1979}{661.1318}+\ldots+\frac{1979}{989.990}=\frac{1979k}{660.661\ldots1319},$$

kde k je nějaké přirozené číslo. Uvedeme-li ještě poslední zlomek na základní tvar, zůstane v čitateli prvočinitel 1 979, který tedy dělí číslo p.

Poznámka. Stejným způsobem bychom dokázali obecnější výsledek: Je-li $s = 3k + 2$ prvočíslo a

$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1},$$

pak je číslo p dělitelné číslem s.

124. Nejprve ukážeme, že všechny hrany téže základny mají stejnou barvu. Kdyby tomu tak nebylo, existovaly by dvě sousední hrany různých barev, např. červená A_1A_2 a zelená A_2A_3. Z pěti úseček A_2B_1, A_2B_2, ..., A_2B_5 mají aspoň tři stejnou barvu - aniž bychom ztratili na obecnosti, můžeme předpokládat, že červenou. Ze tří vrcholů, do kterých tyto červené úsečky vedou, jsou dva sousední B_i, B_j. Hrana B_iB_j je pak zelená (jinak by byl trojúhelník $A_2B_iB_j$ jednobarevný). Zelené jsou i úsečky A_1B_i a A_1B_j (jinak by trojúhelníky $A_1A_2B_i$, $A_1A_2B_j$ byly jednobarevné). Vidíme, že trojúhelník $A_1B_iB_j$ by měl všechny strany zelené, a to není možné.

Kdyby byly hrany jedné základny červené a druhé zelené, pak by z pěti úseček A_iB_j vycházejících z libovolného vrcholu červené základny byly nanejvýš dvě zelené (jinak by aspoň dvě končily v sousedních vrcholech zelené základny a dostali bychom zelený trojúhelník). Z 25 úseček A_iB_j by jich tedy bylo zelených nanejvýš 10. Uvažujeme-li analogicky pro druhou základnu, zjistíme, že nanejvýš 10 úseček A_iB_j by bylo červených, a to není možné.

Poznámka. Tvrzení úlohy platí pro libovolný hranol s lichým počtem vrcholů podstavy. Pro hranoly se sudým počtem vrcholů podstavy tvrzení neplatí.

Ještě obecněji: Ve dvou různých rovnoběžných rovinách mějme dva mnohoúhelníky $A_1A_2\ldots A_{2k+1}$, $B_1B_2\ldots B_{2m+1}$. Všechny strany těchto mnohoúhelníků a všechny úsečky A_iB_j, $i \in \{1, 2, \ldots, 2k+1\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, 2m+1\}$, obarvíme dvěma barvami tak, aby nevznikl jednobarevný trojúhelník. Pak mají všechny strany obou mnohoúhelníků tutéž barvu.

125. Sestrojíme-li osy několika úseček omezených dvojicemi odpovídajících si poloh bodů B_1, B_2, shledáme, že se protínají v bodě P, který je souměrně sdružený s bodem A podle osy spojnice středů S_1, S_2 kružnic k_1, k_2. Dokážeme, že tento bod má požadovanou vlastnost (obr. 139).

Pro každou polohu bodů B_1, B_2 je

$$|\sphericalangle AS_1B_1| = |\sphericalangle AS_2B_2|.$$

Z osové souměrnosti bodů A, P a S_1, S_2 plyne

$$|\sphericalangle AS_1P| = |\sphericalangle AS_2P|.$$

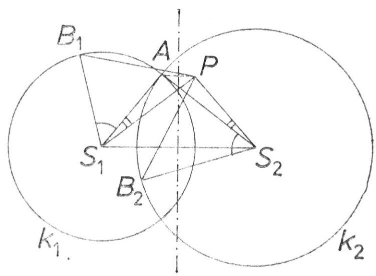
Je tedy

$$|\sphericalangle B_1S_1P| = |\sphericalangle B_2S_2P|$$

pro každou polohu bodů B_1, B_2. Trojúhelníky B_1S_1P, PS_2B_2 jsou shodné, neboť

$$|B_1S_1| = |AS_1| = |PS_2|, \; |B_2S_2| = |AS_2| = |PS_1|,$$

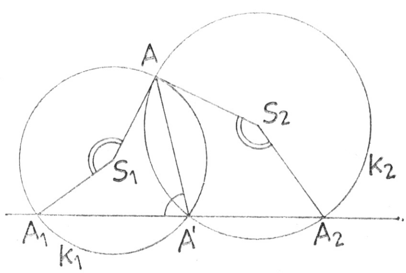
takže $|B_1P| = |B_2P|$ pro každou polohu bodů B_1, B_2. (Vše zůstává v platnosti i v případě, kdy body S_1, B_1, P a zároveň S_2, B_2, P leží v přímce.)



Obr. 139

Poznámka. Pokud by se body pohybovaly v opačných smyslech, měl by uvedenou vlastnost bod souměrně sdružený s bodem A podle středu úsečky S_1S_2.

2. řešení. Sestrojíme-li několik poloh bodů B_1, B_2, shledáme, že body B_1, B_2, A', kde A' je druhý průsečík kružnic k_1, k_2, leží vždy v přímce. Tuto vlastnost bodů B_1, B_2 si nejprve dokážeme a pak ji využijeme k řešení úlohy.



Obr. 140

Veďme bodem A' přímku, která neprochází bodem A, a její další společný bod s kružnicí k_1, resp. k_2, označme A_1, resp. A_2. Odděluje-li bod A' body A_1, A_2 (obr. 140), platí pro obvodové úhly

$$|\sphericalangle AA'A_1| + |\sphericalangle AA'A_2| = 180°,$$

takže příslušné středové úhly mají součet 360°, odkud vyplývá

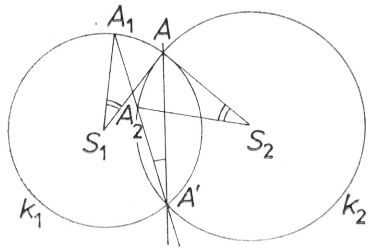
$$|\sphericalangle AS_1A_1| = |\sphericalangle AS_2A_2|.$$

Neodděluje-li bod A' body A_1, A_2 (obr. 141), platí pro obvodové úhly

$$|\sphericalangle AA'A_1| = |\sphericalangle AA'A_2|,$$

a tedy i pro středové úhly

$$|\sphericalangle AS_1A_1| = |\sphericalangle AS_2A_2|.$$



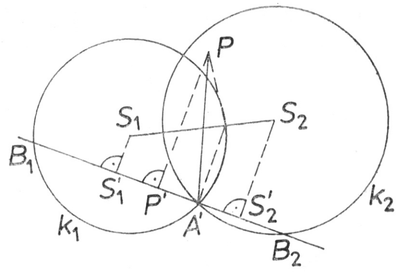
Obr. 141

V obou případech souhlasí i orientace a průsečíky A_1, A_2 jsou tedy jednou z poloh bodů B_1, B_2.

Vezměme nyní přímku procházející bodem A' a neprocházející bodem A a její další společné body s kružnicemi k_1, k_2 označme B_1, B_2 (obr. 142). Ukážeme, že osa úsečky B_1B_2 prochází bodem P souměrně sdruženým s bodem A' podle středu úsečky S_1S_2. Promítněme body S_1, S_2, P kolmo na přímku B_1B_2, dostaneme tak body S_1', S_2', P'. Vzhledem ke středové souměrnosti je $|S_1'A'| = |S_2'P'|$, $|S_2'A'| = |S_1'P'|$. Odděluje-li bod A' body B_1, B_2 (obr. 142), máme

$$|B_2P'| = |B_2S_2'| + |S_2'P'| = |B_2S_2'| + |S_1'A'| = \frac{1}{2}(|B_2A'| + |B_1A'|) =$$

$$= \frac{1}{2}\,|B_1B_2|.$$



Obr. 142

I v případě, kdy bod A' neodděluje body B_1, B_2, dokážeme analogicky, že bod P' půlí úsečku B_1B_2, a tím je důkaz proveden.

126. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že pro $R = P$ uvažovaný podíl největší není. Budeme předpokládat, že $R \neq P$, a vnitřní úhly v trojúhelníku PQR označíme $\alpha = |\sphericalangle QPR|$, $\beta = |\sphericalangle PQR|$, $\gamma = |\sphericalangle PRQ|$. Podle sinové věty je

$$\frac{|PQ| + |PR|}{|QR|} = \frac{\sin\gamma + \sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin\beta}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{2\sin\left(\beta + \dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}.$$

Ze všech trojúhelníků s týmž úhlem α má tedy uvažovaný podíl největší hodnotu pro trojúhelník, v němž $\beta + \dfrac{\alpha}{2} = 90°$, tj. $\beta = \gamma$, a to

$$\frac{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Odtud vidíme, že ze všech trojúhelníků PQR má uvažovaný podíl největší hodnotu pro rovnoramenný trojúhelník s co nejmenším úhlem při hlavním vrcholu P. Nejmenší možná hodnota tohoto úhlu je odchylka přímky PQ od roviny π.

Je-li $PQ \perp \pi$, vyhovují právě ty body R roviny π, které leží na kružnici se středem P a poloměrem $|PQ|$. Není-li $PQ \perp \pi$, vyhovuje jediný bod R roviny π, který leží na pravoúhlém průmětu polopřímky PQ do roviny π ve vzdálenosti $|PQ|$ od bodu P.

2. řešení. V trojúhelníku PQR označme $|PQ| = r$, $|PR| = x$, $|\sphericalangle QPR| =$ $= \alpha$. Podle kosinové věty je

$$\frac{|PQ| + |PR|}{|QR|} = \frac{x + r}{\sqrt{x^2 + r^2 - 2xr\cos\alpha}}. \tag{1}$$

Při pevném x bude tedy uvažovaný poměr největší při nejmenším možném α, tj. v případě, kdy α je odchylka přímky PQ od roviny π. Předpokládejme tedy nadále, že tomu tak je a že rovina PQR je kolmá k rovině π.

Pohodlněji než s výrazem (1) se nám bude pracovat s jeho čtvercem

$$f(x) = \frac{(x + r)^2}{x^2 + r^2 - 2xr\cos\alpha}. \tag{2}$$

Abychom našli jeho maximum, vypočteme derivaci

$$f'(x) = \frac{2r(1 + \cos\alpha)(r^2 - x^2)}{(x^2 + r^2 - 2xr\cos\alpha)^2}.$$

Vidíme, že pro $x = r$ je $f'(x) = 0$, pro $x \in (0, r)$ je $f'(x) > 0$ a pro $x \in (r, +\infty)$ je $f'(x) < 0$. Funkce $f(x)$ tedy nabývá maxima pro $x = r$.

Je-li $PQ \perp \pi$, vyhovují právě ty body roviny π, které leží na kružnici se středem P a poloměrem $|PQ|$. Není-li $PQ \perp \pi$, vyhovuje jediný bod R, který leží na pravoúhlém průmětu polopřímky PQ do roviny π ve vzdálenosti $|PQ|$ od bodu P.

127. Existují-li nezáporná čísla x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 a reálné číslo b tak, že

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = b, \quad \sum_{k=1}^{5} k^3x_k = b^2, \quad \sum_{k=1}^{5} k^5x_k = b^3,$$

platí pro ně

$$b^2\sum_{k=1}^{5} kx_k - 2b\sum_{k=1}^{5} k^3x_k + \sum_{k=1}^{5} k^5x_k = b^3 - 2b^3 + b^3 = 0.$$

Upravíme-li levou stranu, dostaneme

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k(b^2 - 2bk^2 + k^4) = \sum_{k=1}^{5} kx_k(b - k^2)^2 = 0.$$

V prostředním výrazu jsou všechny sčítance nezáporné a jsou tedy všechny nulové. Jedna možnost je $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$, z první podmínky pak máme $b = 0$.

Je-li $x_k \neq 0$, je $b = k^2$ a pro $j \neq k$ je pak $b \neq j^2$, a tedy $x_j = 0$, takže $x_k = k$. Pro číslo b máme tedy šest možností: 0, 1, 4, 9, 16, 25 a těm odpovídají následující pětice $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$:

$$(0, 0, 0, 0, 0), \quad (1, 0, 0, 0, 0),$$
$$(0, 2, 0, 0, 0), \quad (0, 0, 3, 0, 0),$$
$$(0, 0, 0, 4, 0), \quad (0, 0, 0, 0, 5).$$

Snadno ověříme, že všechny možnosti vyhovují.

2. řešení. Pro zjednodušení položme $y_k = kx_k$, pro nezáporná čísla y_k tak dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 &= b, \\ y_1 + 4y_2 + 9y_3 + 16y_4 + 25y_5 &= b^2, \\ y_1 + 16y_2 + 81y_3 + 256y_4 + 625y_5 &= b^3. \end{aligned} \tag{1}$$

Vyloučením neznámých y_1, y_2 z uvedených tří rovnic máme

$$40y_3 + 180y_4 + 504y_5 = b(b - 1)(b - 4).$$

Protože hledáme nezáporná řešení y_k, musí pro b platit

$$b(b - 1)(b - 4) \geqq 0. \tag{2}$$

Podobně dostaneme vyloučením dvojic neznámých y_2, y_3; y_3, y_4; y_4, y_5 a y_5, y_1 ze soustavy (1) pro b další nerovnice

$$\begin{aligned} b(b - 4)(b - 9) &\geqq 0, \\ b(b - 9)(b - 16) &\geqq 0, \\ b(b - 16)(b - 25) &\geqq 0, \\ -b(b - 25)(b - 1) &\geqq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Soustava nerovnic (2), (3) má řešení $b \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$.

Pro $b = 0$ jsou zřejmě řešením soustavy (1) čísla $y_i = 0$ $(1 \leqq i \leqq 5)$, a je-li $b = k^2$ $(1 \leqq k \leqq 5)$, snadno zjistíme, že soustavě (1) vyhovují nezáporná čísla $y_k = k^2$, $y_i = 0$ pro $i \neq k$.

128. Očíslujme vrcholy $A, B, \ldots, H$ čísly $0, 1, \ldots, 7$. Při své cestě prochází klokan střídavě vrcholy se sudým a lichým číslem. Počet skoků jeho cesty má stejnou paritu jako vrchol, na kterém skončil. Do vrcholu E s číslem 4 se tedy může dostat jen sudým počtem skoků, takže $a_{2k-1} = 0$ pro každé přirozené k.

Označme b_k počet všech cest z C do E složených z právě k skoků. Počet všech k-skokových cest z G do E je zřejmě také b_k. Pro každé přirozené n platí

$$a_{2n+2} = 2a_{2n} + b_{2n}. \qquad (1)$$

Prvními dvěma skoky se totiž klokan dostane buď zpět do A (dvě možnosti), nebo do C, nebo do G. Dále je

$$b_{2n+2} = 2b_{2n} + a_{2n}. \qquad (2)$$

Z bodu C (resp. G) je totiž možno dvěma skoky se buď vrátit do C (resp. G), a to dvěma způsoby, nebo dospět do A (do E ještě klokan nemůže). Dosadíme-li do (2) za b_{2n+2} a b_{2n} podle (1), dostaneme rekurenci

$$a_{2n+4} = 4a_{2n+2} - 2a_{2n}. \qquad (3)$$

Snadno zjistíme, že $a_2 = 0$, $a_4 = 2$, a podle (3) můžeme postupně určit další členy posloupnosti $\{a_{2k}\}$.

Zkontrolujeme ještě, shodují-li se členy této posloupnosti s posloupností

$$A_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{k-1} - y^{k-1}),$$

kde $x = 2 + \sqrt{2}$, $y = 2 - \sqrt{2}$. Máme

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - y^0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - 1) = 0,$$

$$A_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) = \frac{1}{\sqrt{2}} . 2\sqrt{2} = 2,$$

$$4A_{2n+2} - 2A_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(4x^n - 4y^n - 2x^{n-1} + 2y^{n-1}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1}(4x - 2) - y^{n-1}(4y - 2)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n+1} - y^{n+1}),$$

neboť

$$4x - 2 = x^2, \ 4y - 2 = y^2.$$

Je tedy

$$4\,A_{2n+2} - 2\,A_{2n} = A_{2n+4}$$

a důkaz je hotov.

Poznámka. Rekurentní rovnici

$$u_{n+2} - 4u_{n+1} + 2u_n = 0$$

vyhovují právě ty posloupnosti $\{u_k\}$, pro které je

$$u_k = C_1 x_1^{k-1} + C_2 x_2^{k-1}, \tag{4}$$

kde C_1, C_2 jsou libovolná reálná čísla a x_1, x_2 jsou kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 - 4x + 2 = 0.$$

V naší úloze jsme ještě měli předepsány první dva členy $u_1 = 0$, $u_2 = 2$. Po dosazení do (4) dostaneme dvě rovnice o dvou neznámých C_1, C_2, které mají řešení $C_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $C_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. (Srov. 4. řešení úlohy 95).

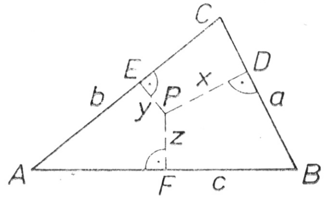
129. Označme a, b, c strany trojúhelníku ABC a x, y, z délky úseček PD, PE, PF (obr. 143). Zřejmě je

$$ax + by + cz = 2S,$$

kde S je obsah trojúhelníku ABC.

Platí tedy

$$\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) 2S = \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right)(ax + by + cz) =$$



Obr. 143

$$= a^2 + b^2 + c^2 + ab\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + bc\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + ca\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \geqq$$

$$\geqq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2.$$

Použili jsme zde nerovnost

$$\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \geqq 2,$$

která platí pro libovolná kladná čísla u, v a v níž nastane rovnost, právě když $u = v$. Je tedy

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \geqq \frac{(a + b + c)^2}{2S}$$

s rovností, právě když $x = y = z$.

Odtud plyne, že daný součet je nejmenší, právě když bod P je středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

2. řešení. Jsou-li α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníku ABC, označme $\alpha' = |\sphericalangle PAB|$, $\beta' = |\sphericalangle PBC|$, $\gamma' = |\sphericalangle PCA|$ (obr. 144). Pro vyšetřovaný součet pak platí

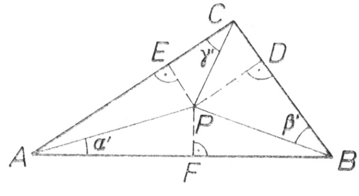
$$\frac{|BC|}{|PD|} + \frac{|CA|}{|PE|} + \frac{|AB|}{|PF|} = \frac{|BD| + |DC|}{|PD|} + \frac{|CE| + |EA|}{|PE|} + \frac{|AF| + |FB|}{|PF|} =$$

$$= \operatorname{cotg} \beta' + \operatorname{cotg} (\gamma - \gamma') + \operatorname{cotg} \gamma' + \operatorname{cotg} (\alpha - \alpha') +$$

$$+ \operatorname{cotg} \alpha' + \operatorname{cotg} (\beta - \beta').$$

Přitom je

$$\operatorname{cotg} \alpha' + \operatorname{cotg} (\alpha - \alpha') = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha' \sin (\alpha - \alpha')}$$



Obr. 144

a podle nerovnosti $4uv \leqq (u + v)^2$ je

$$\sin \alpha' \sin (\alpha - \alpha') \leqq \left(\frac{\sin \alpha' + \sin (\alpha - \alpha')}{2}\right)^2 =$$

$$= \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{2\alpha' - \alpha}{2} \leqq \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

takže

$$\operatorname{cotg} \alpha' + \operatorname{cotg} (\alpha - \alpha') \geqq \frac{\sin \alpha}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 2 \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$$

s rovností, právě když $\alpha' = \frac{\alpha}{2}$.

Odtud vidíme, že daný součet je nejmenší, právě když bod P leží na osách vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, tj. právě když bod P je středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

130. Počet všech r-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ je $\binom{n}{r}$. Pro $k \in \{1, 2, \ldots, n - r + 1\}$ počet těch r-prvkových podmnožin, jejichž nejmenší prvek je číslo k, se rovná počtu $(r - 1)$-prvkových podmnožin množiny $\{k + 1, k + 2, \ldots, n\}$, tj. $\binom{n-k}{r-1}$.

Je tedy

$$\binom{n}{r} = \sum_{k=1}^{n-r+1} \binom{n-k}{r-1}$$

a

$$F(n, r) = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{k=1}^{n-r+1} k \binom{n-k}{r-1}.$$

Použijeme-li známého vztahu pro kombinační čísla

$$\binom{n-k}{r-1} = \binom{n-k+1}{r} - \binom{n-k}{r},$$

dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n-r+1} k\binom{n-k}{r-1} = \sum_{k=1}^{n-r} k\left[\binom{n-k+1}{r} - \binom{n-k}{r}\right] + n - r + 1 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n-k}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Je tedy

$$F(n, r) = \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{r+1}.$$

2. řešení. Pro $1 \leqq k \leqq m$ označme $S(m, k)$ součet nejmenších prvků všech k-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, m\}$. Protože všechny k-prvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, m + 1\}$ se rozpadají na dvě disjunktní skupiny podle toho, zda obsahují, či neobsahují číslo $m + 1$, je pro $k \in \{2, 3, \ldots, m\}$

$$S(m + 1, k) = S(m, k - 1) + S(m, k). \tag{1}$$

Pro libovolné m přirozené zřejmě platí

$$S(m, 1) = 1 + 2 + \ldots + m = \binom{m+1}{2}, \; S(m, m) = 1 = \binom{m+1}{m+1}.$$

Čísla $S(n, r)$ tvoří tedy část Pascalova trojúhelníku

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

a je

$$S(n, r) = \binom{n+1}{r+1}.$$

Odtud pak dostaneme

$$F(n, r) = \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{r+1}.$$

3. řešení. Označme R množinu všech r-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Jsou-li prvky r-tice $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\} \in \mathrm{R}$ uspořádány podle velikosti $a_1 < a_2 < \ldots < a_r$, uvažme zobrazení f: $\mathrm{R} \to \mathrm{R}$, které takové r-tici přiřadí r-tici $\{a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_r - a_1, n + 1 - a_1\} \in \mathrm{R}$. Zřejmě $a_2 - a_1 < a_3 - a_1 < \ldots < a_r - a_1 < n + 1 - a_1$.

Označíme-li f_k k-násobně složené zobrazení f, platí

$$f_2(\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}) =$$
$$= \{a_3 - a_2, a_4 - a_2, \ldots, a_r - a_2, n + 1 - a_2, n + 1 + a_1 - a_2\},$$

. . . .

$$f_k(\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}) =$$
$$= \{a_{k+1} - a_k, a_{k+2} - a_k, \ldots, a_r - a_k, n + 1 - a_k, \ldots, n + 1 + a_{k-1} - a_k\},$$

. . . .

$$f_r(\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}) =$$
$$= \{n + 1 - a_r, n + 1 + a_1 - a_r, \ldots, n + 1 + a_{r-1} - a_r\},$$

$$f_{r+1}(\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}) = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}.$$

Zobrazení f tedy rozdělí množinu R do několika disjunktních podmnožin: je-li $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\} \in \mathrm{R}$, budou do stejné podmnožiny patřit r-tice

$$A, f(A), f_2(A), \ldots, f_r(A).$$

Přitom se jednotlivé r-tice mohou opakovat, v tom případě se však opakují všechny stejně často.

Aritmetický průměr nejmenších prvků r-tic

$$A, f(A), f_2(A), \ldots, f_r(A)$$

je

$$\frac{a_1 + a_2 - a_1 + \ldots + a_r - a_{r-1} + n + 1 - a_r}{r + 1} = \frac{n+1}{r+1},$$

je tedy aritmetický průměr nejmenších prvků všech r-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ také

$$F(n, r) = \frac{n+1}{r+1}.$$

Poznámka. Pro součet největších čísel r-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ platí

$$\sum_{k=1}^{n-r+1} (n+1-k)\binom{n-k}{r-1} =$$

$$= (n+1)\sum_{k=1}^{n-r+1}\binom{n-k}{r-1} - \sum_{k=1}^{n-r+1} k\binom{n-k}{r-1} =$$

$$= (n+1)\binom{n}{r} - F(n, r)\binom{n}{r},$$

takže aritmetickým průměrem největších čísel uvedených podmnožin je

$$r\frac{n+1}{r+1}.$$

Obecně pro $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ je aritmetický průměr j-tých prvků r-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ uspořádaných podle velikosti roven

$$j\frac{n+1}{r+1}.$$

131. Pro každou dvojici přirozených čísel (n, m), která je řešením rovnice

$$(n^2 - mn - m^2)^2 = 1, \tag{1}$$

je $n \geqq m$, neboť

$$-1 \leqq n^2 - mn - m^2 < n^2 - m^2 = (n+m)(n-m).$$

Přitom (k, k) je řešením rovnice (1) jen pro $k = 1$.

Je-li (n, m) řešením rovnice (1) a $n > m$, pak

$$(m^2 - (n-m)m - (n-m)^2)^2 = (m^2 + nm - n^2)^2 = 1,$$

takže $(m, n-m)$ je také řešením. Vyjdeme-li tedy od libovolného řešení (n_0, m_0), dostaneme posloupnost řešení (n_k, m_k), kde

$$n_k = m_{k-1},\ m_k = n_{k-1} - m_{k-1},$$

přičemž

$$n_0 > m_0 = n_1 > m_1 = n_2 > \ldots .$$

Je tedy každá taková posloupnost konečná, tj. existuje k, pro něž $n_k = m_k = 1$.

Obráceně, z dvojice (1, 1) dostaneme opakovaným užitím zobrazení

$$(n, m) \mapsto (n + m, n)$$

každé řešení rovnice (1).

V posloupnosti řešení uvedené rovnice

$$(1, 1), (2, 1), (3, 2), (5, 3), (8, 5), (13, 8), \ldots$$

najdeme jako šestnáctý člen dvojici $(n, m) = (1\,597, 987)$, pro kterou je $n \leqq 1981$, ale $n + m > 1981$, takže největší hodnotou součtu $m^2 + n^2$ za daných podmínek je číslo $1\,597^2 + 987^2$.

Poznámka. Posloupnost $\{u_k\}$, která splňuje rekurentní vztah

$$u_{k+1} = u_k + u_{k-1}, \; u_0 = u_1 = 1,$$

se nazývá Fibonacciova. Jak jsme zjistili, dvojice jejích členů (u_{k+1}, u_k) jsou právě všechna přirozená řešení (n, m) rovnice

$$(n^2 - nm - m^2)^2 = 1.$$

132. Pro $n = 3$ taková posloupnost neexistuje. Jsou-li $m - 2$, $m - 1$, m tři za sebou jdoucí čísla, muselo by číslo m dělit součin $(m - 1)(m - 2)$. Čísla m, $m - 1$ jsou však nesoudělná a m nemůže dělit číslo $m - 2 < m$.

Jsou-li $m - 3$, $m - 2$, $m - 1$, m čtyři za sebou jdoucí čísla s danou vlastností, je

$$m \mid (m - 2)(m - 3),$$

neboť m a $m - 1$ jsou nesoudělná. Z rozkladu

$$(m - 2)(m - 3) = m(m - 5) + 6$$

plyne, že $m \mid 6$, a protože $m \geqq 4$, musí být $m = 6$. Pro $n = 4$ existuje tedy právě jedna taková posloupnost. Ukážeme, že pro $n \geqq 5$ existují aspoň dvě takové posloupnosti.

Je-li $m = (n - 1)(n - 2)$, $k = \dfrac{m}{2}$, pak n-tice

$$m - n + 1, \ldots, m - 1, m,$$
$$k - n + 1, \ldots, k - 1, k$$

vyhovují dané podmínce. Je $m > k > n - 1$ a mezi $n - 1$ za sebou jdoucími přirozenými čísly $m - n + 1, \ldots, m - 1$, resp. $k - n + 1, \ldots, k - 1$, existuje číslo dělitelné $n - 1$ a číslo dělitelné $n - 2$. Protože čísla $n - 1$, $n - 2$ jsou nesoudělná, je nejmenší společný násobek čísel $m - n + 1, \ldots, m - 1$, resp. čísel $k - n + 1, \ldots, k - 1$, dělitelný číslem $m = (n - 1)(n - 2)$ a tím spíš i číslem $k = \dfrac{m}{2}$.

2. řešení. Uvažujme n po sobě jdoucích čísel

$$a - n + 1, \ldots, a - 1, a \tag{1}$$

a nechť

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$$

je rozklad čísla a na prvočinitele ($p_1 < p_2 < \ldots < p_r$).

Dělí-li číslo a nejmenší společný násobek předcházejících $n - 1$ čísel, pak ke každému $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ existuje $m \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}$ takové, že

$$p_j^{\alpha_j} \mid a - m.$$

Je tedy

$$p_j^{\alpha_j} \mid m,$$

a proto

$$p_j^{\alpha_j} \leqq n - 1 \text{ pro každé } j \in \{1, 2, \ldots, r\}. \tag{2}$$

Obráceně, platí-li (2), je mezi každými $n - 1$ po sobě jdoucími přirozenými čísly některé dělitelné číslem $p_j^{\alpha_j}$, takže číslo a pak dělí nejmenší společný násobek libovolných $n - 1$ po sobě následujících čísel. Vidíme, že podmínka (2) doplněná podmínkou $a \geqq n$ je ekvivalentní podmínce úlohy.

Nemůže být $r = 1$, poněvadž pak by bylo

$$n \leqq a = p_1^{\alpha_1} \leqq n - 1.$$

Je tedy $r \geqq 2$ a $n - 1 \geqq p_2 \geqq 3$, tj. $n \geqq 4$.

Pro $n = 4$ máme jedinou možnost $p_1^{\alpha_1} = 2$, $p_2^{\alpha_2} = 3$, $a = 6$ a dostáváme jedinou čtveřici 3, 4, 5, 6.

Pro $n = 5$ máme právě dvě možnosti: $p_1^{\alpha_1} = 2$, $p_2^{\alpha_2} = 3$, $a = 6$ a $p_1^{\alpha_1} = 4$, $p_2^{\alpha_2} = 3$, $a = 12$, dostáváme tak právě dvě pětice 2, 3, 4, 5, 6 a 8, 9, 10, 11, 12.

Pro $n \geqq 6$ určeme přirozená čísla s, t, u tak, aby

$$2^s \leqq n - 1 < 2^{s+1},$$

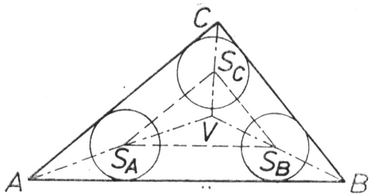
$$3^t \leqq n - 1 < 3^{t+1},$$
$$5^u \leqq n - 1 < 5^{u+1}.$$

Pak dostaneme alespoň šest n-tic pro $a \in \{2^s3^t, 2^s5^u, 3^t5^u, 2^s3^t5^u, 2^{s-1}5^u, 2^{s-1}3^t5^u\}$, kdy je zřejmě $a \geqq n$.

Úloha má řešení pro každé $n \geqq 4$, jediné řešení jen pro $n = 4$.

133. Označme S_A, S_B, S_C středy tří shodných kružnic ležících uvnitř trojúhelníku ABC, z nichž každá se dotýká jiné dvojice jeho stran (obr. 145). Pak je $S_AS_B \| AB$, $S_BS_C \| BC$ a $S_CS_A \| CA$. Přímky AS_A, BS_B, CS_C procházejí středem V kružnice vepsané trojúhelníku ABC, bod V je tedy zároveň středem stejnolehlosti, která převádí trojúhelník $S_AS_BS_C$ na trojúhelník ABC.

Existuje-li navíc společný bod O uvažovaných tří kružnic, je zároveň středem kružnice opsané trojúhelníku $S_AS_BS_C$ a popsaná stejnolehlost ho zobrazí na střed kružnice opsané trojúhelníku ABC, který tudíž leží na přímce VO.



Obr. 145

134. Dosazením $x = 0$ do uvedených vztahů dostaneme pro libovolné $y \geqq 0$

$$f(1, 0) = f(0, 1) = 2,$$
$$f(1, y + 1) = f(0, f(1, y)) = f(1, y) + 1,$$

takže

$$f(1, y) = y + 2.$$

Analogicky máme

$$f(2, 0) = f(1, 1) = 3,$$
$$f(2, y + 1) = f(1, f(2, y)) = f(2, y) + 2,$$

takže

$$f(2, y) = 2y + 3,$$

dále

$$f(3, 0) = f(2, 1) = 5,$$
$$f(3, y + 1) = f(2, f(3, y)) = 2 f(3, y) + 3,$$

takže

$$f(3, y) = 2^y . 5 + (2^{y-1} + 2^{y-2} + \ldots + 2^0) . 3 = 2^{y+3} - 3,$$

a konečně

$$f(4, 0) = f(3, 1) = 2^4 - 3,$$
$$f(4, y + 1) = f(3, f(4, y)) = 2^{f(4,y)+3} - 3.$$

Označíme-li

$$g(y) = f(4, y) + 3,$$

je zřejmě

$$g(0) = 2^4 = 2^{2^2}$$

a

$$g(y + 1) = 2^{g(y)},$$

takže

$$g(y) = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}} \qquad (y + 3 \text{ dvojek}).$$

Máme tedy

$$f(4, 1981) = g(1981) - 3 = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}} - 3 \ (1\,984 \text{ dvojek}).$$

135. Podle poslední podmínky je pro každá dvě přirozená čísla m, n

$$f(m) + f(n) \leqq f(m + n) \leqq f(m) + f(n) + 1. \qquad (1)$$

Protože

$$f(1) + f(1) \leqq f(2) = 0,$$

je také $f(1) = 0$. Podobně

$$0 < f(3) \leqq f(1) + f(2) + 1 = 1$$

dává $f(3) = 1$. Ze vztahu (1) dále plyne, že pro libovolné přirozené n platí

$$f(3n + 3) \geqq f(3n) + 1,$$

odkud dostaneme nerovnost

$$f(3n) \geqq n.$$

Přitom kdyby pro nějaké n_0 platilo $f(3n_0) > n_0$, bylo by již pro všechna $n \geqq n_0$

$$f(3n) > n.$$

Protože $f(9\,999) = 3\,333$, platí pro všechna $n \leqq 3\,333$ rovnost $f(3n) = n$. Je tedy podle (1)

$$1982 = f(3.1982) \geqq f(2.1982) + f(1982) \geqq 3f(1982)$$

a odtud

$$661 > \frac{1982}{3} \geqq f(1982) \geqq f(1\,980) + f(2) = \frac{1980}{3} = 660,$$

takže

$$f(1\,982) = 660.$$

2. řešení. Stejně jako v předešlém řešení zjistíme, že $f(1) = 0$. Položíme-li v (1) $m = 1$, dostaneme pro každé přirozené n

$$f(n) \leqq f(n + 1) \leqq f(n) + 1. \tag{2}$$

Nerovnost (1) můžeme zobecnit:

Pro $k \geqq 2$ přirozených čísel $m_1, \ldots, m_k$ platí

$$f(m_1) + \ldots + f(m_k) \leqq f(m_1 + \ldots + m_k) \leqq f(m_1) + \ldots + f(m_k) + k - 1$$

jak snadno dokážete matematickou indukcí.

Pro $m_1 = \ldots = m_k = n$ odtud dostaneme

$$k\,f(n) \leqq f(kn) \leqq k\,f(n) + k - 1,$$

takže

$$f(n) = \left[\frac{f(kn)}{k}\right]. \tag{3}$$

Vyjdeme od známé hodnoty $f(9\,999) = 3\,333$ a vypočteme podle (3)

$$f(1982) = \left[\frac{f(9\,910)}{5}\right].$$

Podle (1) máme odhad

$$3\,332 - f(89) \leqq f(9\,910) \leqq 3\,333 - f(89),$$

a použijeme-li rovností

$$\left[\frac{f(90)}{10}\right] = f(9) = \left[\frac{f(9\,999)}{1\,111}\right] = 3,$$

$$\left[\frac{f(88)}{8}\right] = f(11) = \left[\frac{f(9\,999)}{909}\right] = 3,$$

dostaneme podle (2)

$$29 \leqq f(90) - 1 \leqq f(89) \leqq f(88) + 1 < 33,$$

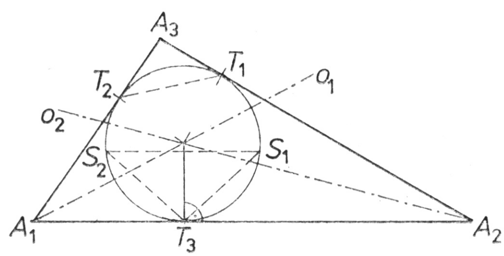
takže

$$3\,300 \leqq f(9\,910) \leqq 3\,304.$$

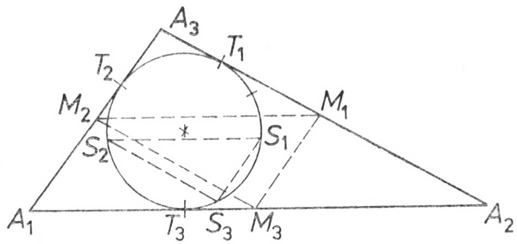
Proto

$$f(1982) = \left[\frac{f(9\,910)}{5}\right] = 660.$$

136. Označme o_i osu úhlu při vrcholu A_i trojúhelníku $A_1A_2A_3$ (obr. 146). Při osové souměrnosti podle osy o_1 zřejmě úsečka S_1T_3 přejde v úsečku T_1T_2, ta zas při osové souměrnosti podle osy o_2 přejde v úsečku T_3S_2. Je tedy $|T_3S_1| = |T_3S_2|$, a proto $S_1S_2 \| A_2A_1$. Analogicky dostaneme také

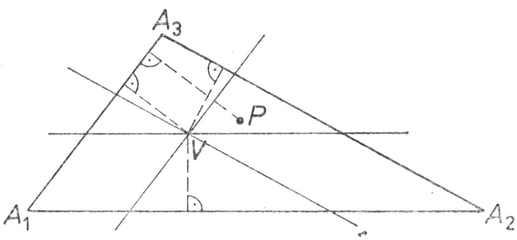


Obr. 146



Obr. 147

$S_2S_3 \| A_3A_2$, $S_3S_1 \| A_1A_3$ (obr. 147). Protože trojúhelníky $S_1S_2S_3$ a $M_1M_2M_3$ jsou podobné, existuje buď stejnolehlost nebo posunutí, které převádí trojúhelník $S_1S_2S_3$ na trojúhelník $M_1M_2M_3$. Nemůže však jít o posunutí, protože kružnice opsaná trojúhelníku $S_1S_2S_3$ je zároveň vepsána trojúhelníku $A_1A_2A_3$, takže je menší než kružnice opsaná trojúhelníku $M_1M_2M_3$. Každá jiná kružnice, která má společný bod s každou ze stran trojúhelníku, má totiž větší poloměr než kružnice vepsaná. (Vedeme-li rovnoběžky se stranami trojúhelníku středem V kružnice vepsané (obr. 148), hned vidíme, že každý bod $P \neq V$ má alespoň od jedné ze stran vzdálenost větší než poloměr vepsané kružnice.) Přímky M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 procházejí tedy středem uvedené stejnolehlosti.



Obr. 148

Poznámky. Kružnice opsaná trojúhelníku $M_1M_2M_3$ se nazývá kružnicí devíti bodů, protože kromě středů stran obsahuje ještě paty jednotlivých výšek trojúhelníku $A_1A_2A_3$ a středy spojnic jednotlivých vrcholů s ortocentrem trojúhelníku $A_1A_2A_3$. Podle Feuerbachovy věty se tato kružnice dotýká kružnice vepsané. Tento bod dotyku je tedy středem uvedené stejnolehlosti.

Z řešení je zřejmé, že stačí předpokládat, že trojúhelník $A_1A_2A_3$ není rovnostranný.

Kružnice opsaná trojúhelníku $M_1M_2M_3$ má poloměr $\frac{R}{2}$, kde R je poloměr kružnice opsané trojúhelníku $A_1A_2A_3$. Kružnice opsaná trojúhelníku $S_1S_2S_3$ je vepsána trojúhelníku $A_1A_2A_3$, označme její poloměr r. Dokázali jsme, že $\frac{R}{2} > r$. To plyne také z poznámky v řešení úlohy 25.

137. Nechť posloupnost $\{x_n\}$ splňuje podmínky úlohy. Označme

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k-1}^2}{x_k}, \quad \sigma_n = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

Podle Cauchyovy nerovnosti pro každé přirozené $n \geqq 1$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k-1}^2}{x_k} \sum_{k=1}^{n} x_k \geqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_{k-1} \right)^2, \tag{1}$$

čili

$$s_n(\sigma_n - x_0) \geqq \sigma_{n-1}^2,$$

a protože $\sigma_n - x_0 = \sigma_n - 1 > 0$, je

$$s_n \geqq \frac{\sigma_{n-1}^2}{\sigma_n - 1}. \tag{2}$$

Je-li posloupnost $\{\sigma_n\}$ neomezená, je posloupnost $\{s_n\}$ také neomezená, neboť

$$\sigma_n - 1 \leqq \sigma_n - x_n = \sigma_{n-1},$$

tj.

$$s_n \geqq \sigma_{n-1}.$$

Je-li naopak posloupnost $\{\sigma_n\}$ omezená, pak protože je rostoucí, existuje

$$\sigma = \lim_{n \to \infty} \sigma_n.$$

Protože $\sigma > 1$, z nerovnosti (2) tak dostaneme

$$\lim_{n \to \infty} s_n \geqq \frac{\sigma^2}{\sigma - 1} \geqq 4.$$

Odtud plyne tvrzení a) úlohy.

Protože v nerovnosti (1) nastane rovnost pro každé přirozené n, právě když je pro každé přirozené k a nějaké nezáporné λ

$$\frac{x_{k-1}^2}{x_k} = \lambda x_k, \quad \text{tj.}\ x_{k-1} = \sqrt{\lambda}x_k,$$

a protože $\dfrac{\sigma^2}{\sigma - 1} = 4$ jen pro $\sigma = 2$, plyne odtud, že řešením části b) může být jedinč posloupnost $x_n = 2^{-n}$, která jak se snadno přesvědčíme, vyhovuje.

2. řešení. Nechť posloupnost $\{x_n\}$ splňuje podmínky úlohy. Zřejmě pro každé přirozené k platí

$$(x_{k-1} - 2x_k)^2 \geqq 0,$$

neboli

$$\frac{x_{k-1}^2}{x_k} \geqq 4(x_{k-1} - x_k),$$

takže pro každé přirozené n

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geqq 4(x_0 - x_n) = 4(1 - x_n)$$

s rovností, právě když $x_0 = 2x_1 = \ldots = 2^n x_n$. Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená a nerostoucí, takže existuje

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

Pokud $a = 0$, je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k-1}^2}{x_k} \geqq 4$$

s rovností právě jen pro posloupnost $x_n = 2^{-n}$.

Je-li $a > 0$, je

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n-1}^2}{x_n} = \frac{\left(\lim\limits_{n \to \infty} x_{n-1}\right)^2}{\lim\limits_{n \to \infty} x_n} = \frac{a^2}{a} = a,$$

takže máme dokonce

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k-1}^2}{x_k} = +\infty.$$

V obou případech dostáváme tvrzení a) úlohy.

Protože $\dfrac{x_{n-1}^2}{x_n} > 0$, musí pro posloupnost $\{x_n\}$ s vlastností b) platit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k-1}^2}{x_k} = 4.$$

Tato rovnost je splněna, jak již víme, pro jedinou posloupnost $x_n = 2^{-n}$.

3. řešení. Nechť posloupnost $\{x_n\}$ splňuje podmínky úlohy. Položme pro přirozené číslo k

$$a_k = \frac{x_{k-1}}{x_k},$$

zřejmě $a_k \geqq 1$. Protože $x_0 = 1$, je

$$s_n = \frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} = a_1 + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_1 a_2} + \ldots + \frac{a_n}{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} =$$

$$= a_1 + \frac{1}{a_1}\left(a_2 + \frac{1}{a_2}\left(a_3 + \ldots + \frac{1}{a_{n-2}}\left(a_{n-1} + \frac{a_n}{a_{n-1}}\right)\ldots\right)\right).$$

Použijeme-li nerovnosti

$$(a_k - \sqrt{A})^2 \geqq 0 \text{ neboli } a_k + \frac{A}{a_k} \geqq 2\sqrt{A},$$

která platí pro každé $A \geqq 0$, dostaneme

$$s_n \geqq 2\sqrt{a_2 + \frac{1}{a_2}\left(a_3 + \ldots + \frac{1}{a_{n-2}}\left(a_{n-1} + \frac{a_n}{a_{n-1}}\right)\ldots\right)} \geqq$$

$$\geqq \ldots \geqq 2\sqrt{2\sqrt{\ldots 2\sqrt{a_{n-1} + \frac{a_n}{a_{n-1}}}}} \geqq 2\sqrt{2\sqrt{\ldots 2\sqrt{a_n}}} \geqq$$

$$\geqq \underbrace{2\sqrt{2\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}_{n-1}.$$

Posloupnost $\{b_n\}$ definovaná rekurentně vztahy $b_0 = 2$, $b_{n+1} = 2\sqrt{b_n}$ je omezená a rostoucí, neboť $4 > b_1 = 2\sqrt{2} > 2 = b_0$, a je-li $4 > b_n > b_{n-1}$, je také $4 > 2\sqrt{b_n} > 2\sqrt{b_{n-1}} = b_n$, neboli $4 > b_{n+1} > b_n$. Pro její limitu b platí

$$b = 2\sqrt{b}, \text{ tj. } b = 4.$$

Odtud plyne tvrzení a) úlohy. Podmínce b) vyhovuje, jak již víme, posloupnost $x_n = 2^{-n}$.

4. řešení. Uvažujme všechny posloupnosti $x_0 \geqq x_1 \geqq \ldots$ kladných čísel a označme pro $x_0 > 0$

$$f(x_0) = \inf \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k-1}^2}{x_k}$$

infimum přes všechny takové posloupnosti $\{x_n\}$ s prvním členem x_0. Zřejmě $f(x_0) \geqq x_0 > 0$ a

$$f(a) = \frac{a}{b} f(b)$$

pro každá dvě čísla $a, b > 0$. Je tedy

$$\begin{aligned} f(1) &= \inf_{1 \geqq x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots} \left(\frac{1}{x_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_{k-1}^2}{x_k} \right) = \\ &= \inf_{x_1 \in (0, 1\rangle} \left(\frac{1}{x_1} + f(x_1) \right) = \inf_{x_1 \in (0, 1\rangle} \left(\frac{1}{x_1} + x_1 f(1) \right). \end{aligned} \tag{3}$$

Funkce $\varphi(x) = \dfrac{1}{x} + xf(1)$ je v intervalu $(0, 1\rangle$ spojitá a pro x blízká nule nabývá velkých hodnot. Infima tedy nabývá v nějakém bodě $q \in (0, 1\rangle$, pro který podle (3) platí

$$f(1) = \frac{1}{q} + qf(1), \quad \text{čili} \quad f(1)(1-q) = \frac{1}{q}.$$

Vidíme, že $q \neq 1$ a

$$f(1) = \frac{1}{q(1-q)} \geqq 4.$$

Odtud plyne tvrzení úlohy, přičemž rovnost nastane právě pro posloupnost $x_n = 2^{-n}$.

138. Levou stranu rovnice můžeme přepsat takto:

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = (y-x)^3 - 3(y-x)x^2 - x^3. \tag{1}$$

Je-li dvojice (x, y) řešením dané rovnice pro nějaké přirozené n, pak je řešením i dvojice $(y - x, -x)$ a také dvojice $(-x - (y - x), x - y) = (-y, x - y)$. Dvojice řešení $(x, y), (y - x, -x), (-y, x - y)$ jsou všechny různé, protože jinak by platilo $x = y = 0$, $(0, 0)$ však není řešením pro $n \neq 0$.

Abychom dokázali, že rovnice

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = 2\,891 = 9 . 321 + 2$$

nemá celočíselná řešení, stačí ukázat, že levá strana nedá pro žádné x, y při dělení devíti zbytek 2. Kdyby dávala levá strana při dělení devíti pro x, y zbytek 2, dá stejný zbytek i při dělení třemi. Podle Fermatovy věty je $a^3 \equiv a \pmod 3$ pro každé celé a, takže

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 \equiv x + y \pmod 3,$$

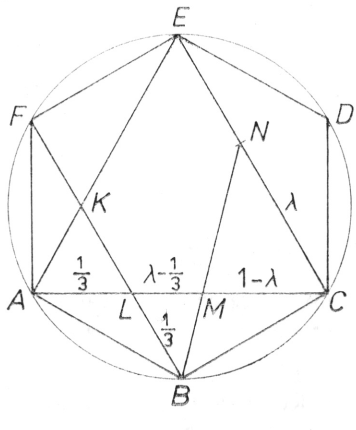
mělo by tedy být

$$x + y \equiv 2 \pmod 3.$$

Nejprve vyšetříme případ $x \equiv 0$, $y \equiv 2 \pmod 3$. Pro $x = 3s$, $y = 3t - 1$ máme

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = 27s^3 - 9s(3t - 1)^2 + 27t^3 - 27t^2 + 9t - 1 \equiv -1 \pmod 9.$$

Případ $x \equiv 2$, $y \equiv 0 \pmod 3$ nemusíme uvažovat díky symetrii (pro $xy \equiv 0 \pmod 3$ je totiž $-3xy^2 \equiv 0 \pmod 9$). Případ $x \equiv y \equiv 1 \pmod 3$ se převede na předcházející díky rovnosti (1).



Obr. 149

139. Označme L průsečík úhlopříček AC a BF (obr. 149). Protože $BF \parallel CE$, jsou trojúhelníky BML a NMC podobné, tj.

$$\frac{|BL|}{|NC|} = \frac{|LM|}{|CM|}. \tag{1}$$

Šestiúhelník $ABCDEF$ je pravidelný, takže $|\sphericalangle CAE| = 60°$ a trojúhelník ALK je rovnostranný, přičemž trojúhelník ALB je rovnoramenný, tj. $|KL| = |AL| = |BL|$. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $|AC| = |BF| = 1$. Pak je $|BL| = |AL| = \frac{1}{3}$, $|LM| = \lambda - \frac{1}{3}$, $|CM| = 1 - \lambda$, $|CN| = \lambda$. Dosadíme-li do (1), dostaneme

$$\frac{1}{3\lambda} = \frac{3\lambda - 1}{3(1 - \lambda)},$$

takže $3\lambda^2 = 1$ a odtud $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. řešení. Leží-li body M, N, B v přímce, označme $|\sphericalangle AMB| = |\sphericalangle NMC| = \omega$ (obr. 150). Zřejmě $30° < \omega < 90°$. Protože v pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ je $|AB| = \frac{1}{\sqrt{3}}|AC|$, dostaneme ze sinové věty pro trojúhelníky ABM a NMC

$$\frac{\sin \omega}{\sin (150° - \omega)} = \frac{1}{\lambda\sqrt{3}}, \qquad \frac{\sin \omega}{\sin (120° - \omega)} = \frac{\lambda}{1 - \lambda},$$

čili

$$\lambda\sqrt{3} \sin \omega = \frac{1}{2} \cos \omega + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega,$$

$$(1 - \lambda) \sin \omega = \lambda \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega + \frac{1}{2} \sin \omega\right).$$

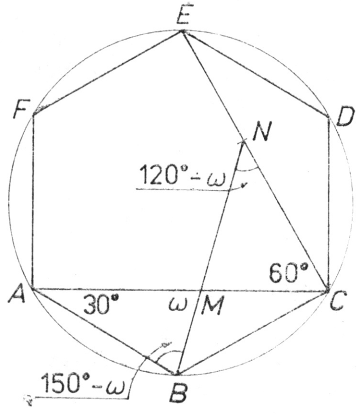
Odečteme-li od druhé rovnice $\lambda\sqrt{3}$-násobek první, dostaneme

$$(1 - \lambda - 3\lambda^2) \sin \omega = -\lambda \sin \omega,$$

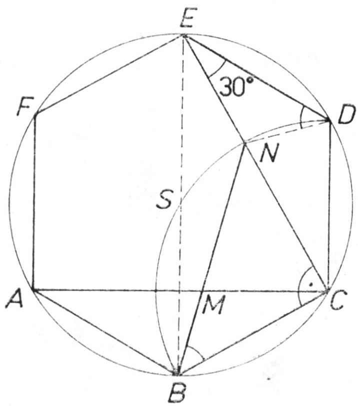
čili

$$3\lambda^2 = 1.$$

Protože $0 < \lambda < 1$, je $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.



Obr. 150



Obr. 151

3. řešení. Ze zadání úlohy plyne, že jsou trojúhelníky BCM a DEN shodné (obr. 151), tj. $|\sphericalangle\, NBC| = |\sphericalangle\, NDE|$. Protože v pravidelném šestiúhelníku platí $|\sphericalangle\, BCE| = 90°$ a $|\sphericalangle\, CED| = 30°$, je

$$|\sphericalangle BND| = |\sphericalangle BNC| + |\sphericalangle CND| =$$
$$= (90° - |\sphericalangle NBC|) + (30° + |\sphericalangle NDE|) = 120°.$$

To znamená, že úsečku BD je z bodu N vidět pod stejným úhlem 120° jako ze středu S kružnice opsané danému šestiúhelníku. Bod N tedy leží na kružnici se středem C a poloměrem $|CS| = |CB| = |CD|$. Proto je také $|CN| = |CB|$ a pro dělicí poměr λ plyne z trojúhelníku BCE

$$\lambda = \frac{|CN|}{|CE|} = \frac{|CB|}{|CE|} = \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

4. řešení. Označme B' průsečík přímek AB a CE (obr. 152). Z vlastností pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$ plyne, že $|BB'| = 2|AB|$. Protože body B, M, N leží v přímce, dostáváme podle Menelaovy věty pro trojúhelník $AB'C$

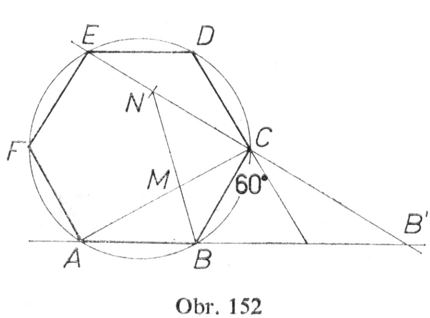
$$\frac{|AB|}{|B'B|} \cdot \frac{|B'N|}{|CN|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{1}{2} \, \frac{1+\lambda}{\lambda} \, \frac{1-\lambda}{\lambda} = 1,$$

čili

$$3\lambda^2 = 1$$

a

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



Obr. 152

5. řešení. Zvolme v rovině šestiúhelníku soustavu souřadnic s počátkem v bodě B. Mají-li body P, Q souřadnice (p_1, p_2), (q_1, q_2), rozumíme symbolem $P + Q$ bod se souřadnicemi $(p_1 + q_1,\ p_2 + q_2)$ a symbolem sP, kde s je reálné číslo, bod $(sp_1,\ sp_2)$.

Pro body M, N tedy platí $(0 < \lambda < 1)$

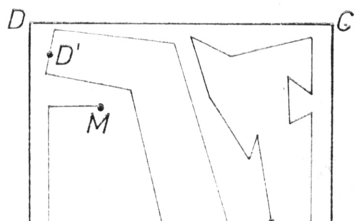
$$M = (1 - \lambda)\, A + \lambda C,$$
$$N = (1 - \lambda) C + \lambda E = 2\lambda A + (1 + \lambda) C,$$

poněvadž v pravidelném šestiúhelníku se středem S je $E = 2S = 2(A + C)$. Protože body B, M, N leží v přímce, musí platit

$$\frac{2\lambda}{1 - \lambda} = \frac{1 + \lambda}{\lambda},$$

čili $3\lambda^2 = 1$ a $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

140. Konce lomené čáry L označme M a N. Postupujme po čáře L z bodu M. První vrchol čtverce Q, ke kterému se přiblížíme na vzdálenost nejvýše $\frac{1}{2}$, označme A. Postupujeme dále a ten z vrcholů sousedících s A, ke kterému se přiblížíme dříve na vzdálenost $\frac{1}{2}$, označme D. Druhý vrchol sousedící s A označme B (obr. 153).



Obr. 153

Bod D' lomené čáry L, pro nějž je $|DD'| = \frac{1}{2}$, rozdělí čáru L na dvě části MD' a $D'N$. Odpovídajícím způsobem vyjádříme úsečku AB jako sjednocení množin U a V, kde U je množina těch bodů, jejichž vzdálenost od čáry MD' je nejvýše $\frac{1}{2}$, a V množina těch bodů, jejichž vzdálenost od čáry $D'N$ je nejvýše $\frac{1}{2}$. Obě množiny U, V jsou neprázdné, $A \in$ U, $B \in$ V, a každá je sjednocením konečného počtu uzavřených úseček a jednobodových množin. Proto existuje bod P společný oběma množinám U a V. Jsou-li X, resp. Y, body čáry MD', resp. $D'N$, takové, že $|PX| \leqq \frac{1}{2}$, $|PY| \leqq \frac{1}{2}$, pak je $|XY| \leqq \leqq |PX| + |PY| = 1$, a přitom délka lomené čáry $XD'Y$ je aspoň

$$|XD'| + |YD'| \geqq 99 + 99 = 198.$$

141. Podle první podmínky je pro každé kladné x

$$f(xf(x)) = xf(x),$$

takže $a = xf(x)$ je pevný bod funkce f, tj. $f(a) = a$.

Předpokládejme, že p je pevný bod funkce f. Podle první podmínky je

$$f(pf(p)) = pf(p),$$

neboli

$$f(p^2) = p^2,$$

bod p^2 je tedy také pevný bod funkce f. Dokonce p^n je pevný bod funkce f pro každé přirozené n, neboť jsou-li p, p^{n-1} pevné body, je

$$f(p^n) = f(p \, . \, p^{n-1}) = f(pf(p^{n-1})) = p^{n-1}f(p) = p^n.$$

Dále je

$$p = f(p) = f(f(p)) = f(1 \, . f(p)) = pf(1),$$

takže $f(1) = 1$ a 1 je pevný bod funkce f. Je tedy

$$1 = f(1) = f\left(\frac{1}{p} \, . \, p\right) = f\left(\frac{1}{p} f(p)\right) = pf\left(\frac{1}{p}\right)$$

a odtud

$$f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p},$$

takže i $\frac{1}{p}$ je pevný bod funkce f. Pak je i $\frac{1}{p^n}$ pevný bod funkce f.

Kdyby bylo $p > 1$, pak by posloupnost p^n konvergovala k $+\infty$ a tatáž posloupnost $p^n = f(p^n)$ by podle druhé podmínky konvergovala k 0. Stejně vyloučíme možnost $p < 1$ pomocí posloupnosti pevných bodů $\frac{1}{p^n}$.

Zjistili jsme, že funkce f má jediný pevný bod 1. Pro každé kladné x je tedy $xf(x) = 1$, takže

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Tato funkce, jak snadno ověříme, vyhovuje oběma podmínkám.

142. Mají-li kružnice k_1, k_2 stejné poloměry, je úloha triviální. Nadále budeme předpokládat, že poloměry obou kružnic jsou různé.

Dokazovaná rovnost je ekvivalentní s rovností

$$|\sphericalangle\, O_1AM_1| = |\sphericalangle\, O_2AM_2|$$

(obr. 154). Označme S průsečík tečen P_1P_2, Q_1Q_2. Tento bod je středem stejnolehlosti, která převádí kružnici k_1 v k_2. Obraz bodu A v této stejnolehlosti označme B. Zřejmě

$$|\sphericalangle\, O_1AM_1| = |\sphericalangle\, O_2BM_2|.$$

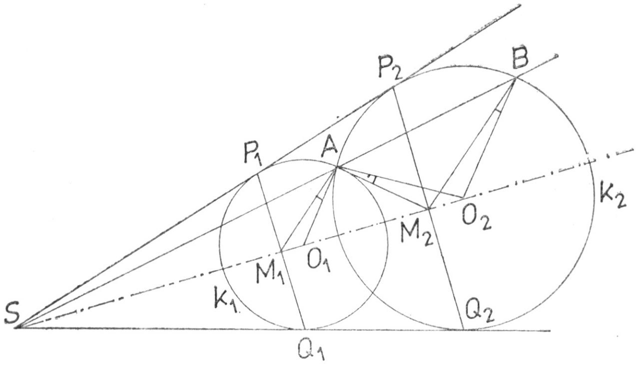
Dokazujeme tedy rovnost

$$|\sphericalangle\, O_2AM_2| = |\sphericalangle\, O_2BM_2|.$$

Vzhledem k tomu, že body A, B leží ve stejné polorovině určené přímkou O_2M_2, platí uvedená rovnost, právě když body A, B, O_2, M_2 leží na jedné kružnici, což nastane, právě když

$$|SA| . |SB| = |SM_2| . |SO_2|.$$

Je však $|SA| . |SB| = |SP_2|^2$ (mocnost bodu S ke kružnici k_2) a $|SM_2| . |SO_2| = |SP_2|^2$ (z podobných pravoúhlých trojúhelníků SO_2P_2, SP_2M_2). Tím je důkaz hotov.



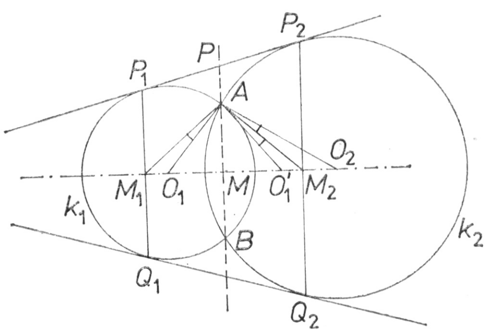
Obr. 154

2. řešení. Průsečík spojnice společných bodů A, B kružnic k_1, k_2 s tečnou P_1P_2 označme P a průsečík s přímkou O_1O_2 označme M (obr. 155). Protože bod P je střed úsečky P_1P_2 (je $|PP_1|^2 = |PA|.|PB| = |PP_2|^2$), je bod M střed úsečky M_1M_2. Označíme-li O_1' bod souměrně sdružený s bodem O_1 podle osy AB, bude

$$|\sphericalangle\, M_1AO_1| = |\sphericalangle\, O_1'AM_2|.$$

Stačí tedy dokázat, že přímka AM_2 je osou úhlu $O_1'AO_2$. To nastane, právě když

$$\frac{|AO_1'|}{|AO_2|} = \frac{|M_2O_1'|}{|M_2O_2|},$$



Obr. 155

jak plyne ze sinové věty pro trojúhelníky $AO_1'M_2$, AO_2M_2. Protože $|AO_1| = |AO_1'|$, $|M_2O_1'| = |M_1O_1|$, dokazujeme rovnost

$$\frac{|AO_1|}{|AO_2|} = \frac{|M_1O_1|}{|M_2O_2|}.$$

Její platnost je patrna z toho, že vlevo je poměr poloměrů kružnic k_1, k_2 a vpravo je poměr délek dvou úseček, které si odpovídají ve stejnolehlosti převádějící kružnici k_1 v k_2.

143. Označme M, resp. M' množinu všech čísel, která se dají vyjádřit ve tvaru

$$m = xbc + yca + zab, \tag{1}$$

kde x, y, z jsou přirozená, resp. nezáporná celá čísla. Zřejmě je $q \in \mathsf{M}$, právě když $q - bc - ca - ab \in \mathsf{M}'$. V úloze jde tedy o to dokázat, že $2abc$ je největší přirozené číslo, které nepatří do M.

Kdyby $2abc \in \mathsf{M}$, tj. pro nějaká x, y, z přirozená by bylo

$$2abc = xbc + yca + zab,$$

pak by a dělilo součin xbc a podle předpokladu o vzájemné nesoudělnosti čísel a, b, c by a dělilo x, takže by bylo $a \leqq x$. Analogicky zjistíme, že by bylo $b \leqq y$, $c \leqq z$. Pak by však platilo

$$2abc = xbc + yca + zab \geqq 3abc.$$

Je tedy $2abc \notin \mathsf{M}$.

Zvolme libovolné přirozené číslo k a zkoumejme číslo $2abc + k$. Uvažujme množinu L všech čísel tvaru (1), kde

$$x \in \{1, 2, \ldots, a\},\ y \in \{1, 2, \ldots, b\},\ z \in \{1, 2, \ldots, c\}. \tag{2}$$

Žádná dvě z těchto abc čísel nedávají při dělení číslem abc stejný zbytek. (Rozdíl každých dvou čísel z L má totiž tvar (1), kde $x \in \{-a + 1, \ldots, a - 1\}$, $y \in \{-b + 1, \ldots, b - 1\}$, $z \in \{-c + 1, \ldots, c - 1\}$. Kdyby byl tento rozdíl dělitelný číslem abc, bylo by $a|x$, $b|y$, $c|z$, tj. $x = y = z = 0$ a čísla by nebyla různá.) Existuje tedy číslo (1) z L a celé číslo t tak, že

$$2abc + k = tabc + xbc + yca + zab. \tag{3}$$

Podle (2) je

$$xbc + yca + zab \leqq 3abc,$$

takže

$$k \leqq tabc - 2abc + 3abc = (t + 1)abc.$$

Protože $k > 0$, je $t \geqq 0$ a (3) můžeme přepsat

$$2abc + k = (ta + x)bc + yca + zab,$$

kde $ta + x$ je přirozené číslo. Je tedy $2abc + k \in \mathsf{M}$ pro každé přirozené k.

Poznámka. Stejnou metodou bychom dokázali obecnější tvrzení: Je dáno $n \geqq 2$ po dvou nesoudělných přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Označme $A = a_1a_2\ldots a_n$ a M množinu všech čísel tvaru

$$x_1 \frac{A}{a_1} + x_2 \frac{A}{a_2} + \ldots + x_n \frac{A}{a_n},$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou přirozená čísla. Pak největší přirozené číslo, které nepatří do množiny M, je $(n - 1)A$.

2. řešení. Než se pustíme do řešení úlohy, prozkoumáme obecnou otázku vyjadřování celých čísel m ve tvaru

$$m = xbc + yca + zab \tag{4}$$

s celočíselnými koeficienty x, y, z. Především ukážeme, že každé celé číslo m lze takto vyjádřit. Vyplývá to z toho, že množina zbytků všech abc čísel tvaru (4), kde

$$x \in \{1, 2, \ldots, a\}, y \in \{1, 2, \ldots, b\}, z \in \{1, 2, \ldots, c\}, \tag{5}$$

při dělení číslem abc je totožná s množinou $\{0, 1, \ldots, abc - 1\}$, čehož jsme si všimli v předešlém řešení. Je-li tedy m libovolné celé číslo a

$$m = tabc + u,$$

kde t je celé číslo a $0 \leqq u \leqq abc$, existují čísla x, y, z splňující (5) a celé číslo v tak, že

$$u = xbc + yca + zab + vabc.$$

Pro m tak máme vyjádření

$$m = (ta + va + x)\, bc + yca + zab.$$

Dále se budeme zabývat jednoznačností uvažovaného vyjádření. Dejme tomu, že

$$x_1bc + y_1ca + z_1ab = x_2bc + y_2ca + z_2ab,$$

a nechť

$$x_1 = p_1a + p_1', \; y_1 = q_1b + q_1', \; z_1 = r_1c + r_1',$$
$$x_2 = p_2a + p_2', \; y_2 = q_2b + q_2', \; z_2 = r_2c + r_2',$$

přičemž

$$0 \leqq p_1', p_2' < a, \; 0 \leqq q_1', q_2' < b, \; 0 \leqq r_1', r_2' < c. \tag{6}$$

Potom je

$$\begin{aligned} 0 &= (x_1 - x_2)bc + (y_1 - y_2)ca + (z_1 - z_2)ab = \\ &= (p_1' - p_2')bc + (q_1' - q_2')ca + (r_1' - r_2')ab + \\ &\quad + (p_1 + q_1 + r_1 - p_2 - q_2 - r_2)abc. \end{aligned}$$

Odtud je zřejmé, že

$$a \mid p_1' - p_2', \; b \mid q_1' - q_2', \; c \mid r_1' - r_2',$$

a vzhledem k (6) je tedy

$$p_1' = p_2', \; q_1' = q_2', \; r_1' = r_2',$$

takže musí být také

$$p_1 + q_1 + r_1 = p_2 + q_2 + r_2.$$

Docházíme k následujícímu závěru: Každé uspořádané trojici celých čísel (x, y, z) přiřaďme uspořádanou čtveřici $(p', q', r', p + q + r)$, kde

$$x = pa + p', \; y = qb + q', \; z = rc + r',$$
$$0 \leqq p' < a, \; 0 \leqq q' < b, \; 0 \leqq r' < c.$$

Každé celé číslo m lze psát nekonečně mnoha způsoby ve tvaru (4) s celočíselnými koeficienty x, y, z, přičemž dvě trojice koeficientů dávají totéž číslo (4), právě když příslušné čtveřice jsou stejné.

Pro řešení naší úlohy je významný bezprostřední důsledek právě vyslovené věty:

Celé číslo m lze psát ve tvaru (4) s nezápornými koeficienty, právě když se pro každé vyjádření (4) s celočíselnými koeficienty příslušná čtveřice skládá z nezáporných čísel. Vyjádření

$$2abc - bc - ca - ab = (a - 1)bc + (b - 1)ca + (-c + c - 1)ab \tag{7}$$

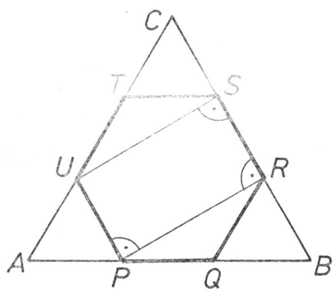
odpovídá čtveřice $(a - 1, b - 1, c - 1, -1)$, která není složena jen z nezáporných čísel. Číslo (7) proto nelze vyjádřit ve tvaru (4) s nezápornými koeficienty.

Zvolme nyní přirozené číslo $m > 2abc - bc - ca - ab$. Je-li (4) jedno jeho vyjádření s celočíselnými koeficienty x, y, z a (p', q', r', s) příslušná čtveřice, pak

$$0 < m - (2abc - bc - ca - ab) =$$
$$= (p' - (a - 1))bc + (q' - (b - 1))ca + (r' - (c - 1))ab + (s - (-1))abc.$$

První tři koeficienty jsou zřejmě nekladné, takže poslední koeficient musí být kladný, tj. $s \geqq 0$. Čtveřice (p', q', r', s) je tedy složena z nezáporných čísel a číslo m lze proto vyjádřit ve tvaru (4) s nezápornými koeficienty, což jsme měli dokázat.

144. Dejme tomu, že uvažované tvrzení neplatí, tj. existuje rozklad množiny E na dvě podmnožiny E_1, E_2 takový, že žádný pravoúhlý trojúhelník nemá všechny tři vrcholy v jedné z těchto podmnožin. Vepišme do daného rovnostranného trojúhelníku pravidelný šestiúhelník $PQRSTU$ (obr. 156). Ze tří bodů P, R, T leží aspoň dva v téže podmnožině, např. $P \in \mathsf{E}_1$, $R \in \mathsf{E}_1$. Pak je však $U \in \mathsf{E}_2$, $S \in \mathsf{E}_2$, $C \in \mathsf{E}_2$, a to je spor.

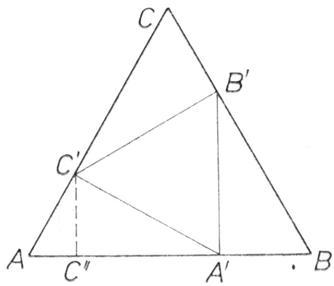


Obr. 156

2. řešení. Na obvodu daného rovnostranného trojúhelníku ABC (obr. 157) sestrojme body A', B', C' tak, aby

$$\frac{|AA'|}{|A'B|} = \frac{|BB'|}{|B'C|} = \frac{|CC'|}{|C'A|} = 2.$$

Zřejmě je $AB \perp A'B'$, $BC \perp B'C'$, $CA \perp C'A'$. Uvažujme libovolný rozklad množiny E na dvě podmnožiny E_1, E_2. Neztratíme na obecnosti, omezíme-li se na následující dva případy:



Obr. 157

a) Nechť $A' \in E_1$, $B' \in E_1$, $C' \in E_1$. Existuje-li ještě další bod $D \in E_1$, pak vždy tvoří se dvěma z bodů A', B', C' pravoúhlý trojúhelník se všemi vrcholy v E_1. Neexistuje-li čtvrtý bod $D \in E_1$, patří všechny ostatní body obvodu do množiny E_2 a snadno najdeme pravoúhlý trojúhelník s vrcholy v E_2.

b) Nechť $A' \in E_1$, $B' \in E_1$, $C' \in E_2$. Existuje-li bod $D \in AB$, $D \neq A'$, $D \in E_1$, je trojúhelník $A'B'D$ pravoúhlý s vrcholy v E_1. Jinak patří všechny body strany AB až na bod A' do množiny E_2 a trojúhelník $AC'C''$, kde C'' je pravoúhlý průmět bodu C' na stranu AB, je pravoúhlý a má vrcholy v E_2.

Poznámka. Důkaz ze 2. řešení stačí jen trochu doplnit, abychom odvodili silnější tvrzení:

Při každém rozkladu obvodu rovnostranného trojúhelníku na dvě podmnožiny existuje nekonečně mnoho pravoúhlých trojúhelníků, které mají všechny vrcholy v téže podmnožině.

V případě a) jsou dvě možnosti. Buď je na některé straně, např. AB, nekonečně mnoho bodů z E_1 a ty pak spolu s A' a B' tvoří nekonečně mnoho pravoúhlých trojúhelníků s vrcholy v E_1, nebo je na každé straně jen konečný počet bodů z E_1 a pak zřejmě existuje nekonečně mnoho pravoúhlých trojúhelníků s vrcholy v E_2.

V případě b) uvažujeme takto: Je-li na straně AB nekonečně mnoho bodů množiny E_1, tvrzení platí. Je-li na straně AB jen konečný počet bodů množiny E_1, sestrojme všechny trojúhelníky s pravým úhlem při vrcholu C' a ostatními vrcholy na straně AB. Těch je nekonečně mnoho a jen konečně mnoho z nich má některý vrchol v E_1.

145. Z posloupnosti všech přirozených čísel postupně vynechávejme čísla, která jsou třetím členem nějaké aritmetické posloupnosti. Zůstanou čísla

1, 2, 4, 5, 10, 11, 13, 14, 28, 29, 31, 32, 37, 38, 40, 41, ...

To nás přivádí na myšlenku sestrojovat množiny neobsahující tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti takto: Vyjdeme od množiny $\mathsf{M}_1 = \{1, 2\}$ a dále položme pro každé přirozené k

$$\mathsf{M}_{k+1} = \mathsf{M}_k \cup \{x + 3^k : x \in \mathsf{M}_k\}.$$

Označíme-li m_n největší prvek množiny M_n, bude

$$m_1 = 2, \; m_{k+1} = m_k + 3^k,$$

tj.

$$m_n = \frac{3^n + 1}{2}$$

pro každé přirozené n.

Dokážeme, že v žádné z množin M_n neleží tři po sobě následující členy aritmetické posloupnosti, což je totéž, jako že tam s žádnými dvěma prvky neleží jejich aritmetický průměr. Pro množinu M_1 je to zřejmé. Předpokládejme, že to platí pro množinu M_k, kde k je nějaké přirozené číslo, a zvolme dva různé prvky x, y množiny M_{k+1}. Leží-li oba v množině M_k nebo oba v množině $\{x + 3^k : x \in \mathsf{M}_k\}$, pak jejich aritmetický průměr není v M_{k+1} podle indukčního předpokladu. Je-li $x \in \mathsf{M}_k$, $y \in \{x + 3^k : x \in \mathsf{M}_k\}$, pak

$$1 \leqq x \leqq m_k, \; 1 + 3^k \leqq y \leqq m_k + 3^k,$$

takže

$$m_k = \frac{3^k + 1}{2} < \frac{3^k + 2}{2} \leqq \frac{x + y}{2} \leqq \frac{2m_k + 3^k}{2} = 3^k + \frac{1}{2} < 3^k + 1.$$

Odtud vidíme, že $\dfrac{x + y}{2} \notin \mathsf{M}_{k+1}$. Množina M_{11} má největší prvek

$$m_{11} = \frac{3^{11} + 1}{2} = 88\,574 < 10^5$$

a obsahuje $2^{11} = 2\,048$ prvků. Uvažovaná posloupnost tedy existuje.

2. řešení. Mějme dvě čísla, která se skládají jen z číslic 0 a 1. Aby se jejich aritmetický průměr také skládal jen z číslic 0 a 1, musel by se jejich součet skládat jen z číslic 0 a 2, ale to se stane, právě když jsou obě čísla stejná. To platí v každé číselné soustavě se základem větším než 2.

Největší číslo složené z číslic 0 a 1 v trojkové soustavě nepřevyšující $10^5 = (12002011201)_3$ je číslo $(11111111111)_3$ a všech takových nanejvýš jedenácticiferných čísel je $2^{11} - 1 = 2\,047$.

Poznámka. Označíme-li $\{a_n\}$ posloupnost z 1. řešení a $\{b_n\}$ posloupnost z 2. řešení, je pro každé přirozené n

$$a_{n+1} = b_n + 1.$$

146. Abychom nemuseli stále respektovat předpoklad, že a, b, c jsou strany trojúhelníku, označme

$$x = -a + b + c,\ y = a - b + c,\ z = a + b - c.$$

Pak bude

$$a = \frac{y+z}{2},\ b = \frac{x+z}{2},\ c = \frac{x+y}{2} \tag{1}$$

a všechny trojice (a, b, c) délek stran trojúhelníku tak budou vzájemně jednoznačně odpovídat všem trojicím (x, y, z) kladných čísel, s nimiž se pracuje pohodlněji.

Dosadíme-li do dokazované nerovnosti podle (1), dostaneme po úpravě nerovnost

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geqq x + y + z. \tag{2}$$

K tomu, abychom ji dokázali pro všechna kladná x, y, z, využijeme Cauchyovy nerovnosti

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2,$$

která platí pro všechny n-tice reálných čísel $(u_1, \ldots, u_n)$, $(v_1, \ldots, v_n)$ a v níž nastane rovnost právě tehdy, je-li jedna z n-tic násobkem druhé. Pro trojice

$$\left(\frac{x}{\sqrt{y}}, \frac{y}{\sqrt{z}}, \frac{z}{\sqrt{x}}\right),\ (\sqrt{y}, \sqrt{z}, \sqrt{x})$$

Cauchyova nerovnost dá

$$(x + y + z)^2 \leqq \left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}\right)(y + z + x),$$

což je nerovnost (2). Rovnost nastane, právě když

$$\frac{x}{\sqrt{y}} : \sqrt{y} = \frac{y}{\sqrt{z}} : \sqrt{z} = \frac{z}{\sqrt{x}} : \sqrt{x},$$

tj. právě když $x = y = z$. V původní nerovnosti tedy bude rovnost právě jen pro rovnostranný trojúhelník.

2. řešení. Nerovnost (2) je ekvivalentní s nerovností

$$x^3z + y^3x + z^3y \geqq x^2yz + y^2xz + z^2xy$$

a ta plyne z rovnosti

$$x^3z + y^3x + z^3y - x^2yz - y^2xz - z^2xy =$$
$$= xz(x - y)^2 + xy(y - z)^2 + yz(x - z)^2.$$

3. řešení. Daná nerovnost vyplývá z rovnosti

$$2\,[a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a)] =$$
$$= (a + c - b)(a + b - c)(a - c)^2 + (b + a - c)(b + c - a)(b - a)^2 +$$
$$+ (c + b - a)(c + a - b)(c - b)^2.$$

4. řešení. Daná nerovnost vyplývá z rovnosti

$$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) =$$
$$= a(b + c - a)(b - c)^2 + b(a + b - c)(a - b)(a - c).$$

Daná nerovnost se totiž nezmění při cyklické záměně $a \to b$, $b \to c$, $c \to a$ a můžeme tedy předpokládat bez ztráty na obecnosti, že a je nejdelší strana.

Poznámka. Předpoklad, že kladná čísla a, b, c splňují trojúhelníkové nerovnosti, není pro platnost dané nerovnosti nutný (uvedený výraz je kladný např. i pro $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$).

147. K důkazu nezápornosti uvedeného výrazu si stačí uvědomit, že $0 \leqq x, y, z \leqq 1$, takže

$$xy + yz + zx - 2xyz = xy(1 - z) + yz(1 - x) + zx \geqq 0.$$

Můžeme také díky symetrii předpokládat $x \leqq y \leqq z$, takže $x \leqq \frac{1}{3}$ a

$$xy + yz + zx - 2xyz = xy + yz(1 - 2x) + zx \geqq 0.$$

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a harmonickým průměrem platí dokonce

$$\frac{xy + yz + zx}{3} \geqq \frac{3}{\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}} = \frac{3xyz}{x + y + z} = 3xyz,$$

tj.

$$xy + yz + zx \geqq 9xyz.$$

Nyní dokážeme druhou nerovnost. Položme $x = \frac{1}{3} + a, y = \frac{1}{3} + b,$ $z = \frac{1}{3} + c$, podle předpokladu úlohy pak je

$$a + b + c = 0, \qquad -\frac{1}{3} \leqq a, b, c \leqq \frac{2}{3}$$

a

$$xy + yz + zx - 2xyz = \frac{7}{27} + \frac{1}{3}(ab + bc + ca) - 2abc =$$
$$= \frac{7}{27} + \frac{1}{3}(bc - a^2 - 6abc). \tag{1}$$

Vzhledem k symetrii můžeme předpokládat $a \leqq b \leqq c$, pak musí být buď $a \leqq b \leqq 0 \leqq c$, nebo $a \leqq 0 \leqq b \leqq c$.

V prvním případě je $bc - a^2 - 6abc \leqq 0$, v druhém případě můžeme pro $-\frac{1}{3} \leqq a \leqq 0$ psát

$$bc - a^2 - 6abc = bc - (b + c)^2 - 6abc = -(b - c)^2 - 3bc - 6abc =$$
$$= -(b - c)^2 - 3bc(1 + 2a) \leqq 0$$

s rovností, právě když $b = c = a = 0$. V obou případech plyne z (1) nerovnost

$$xy + yz + zx - 2xyz \leqq \frac{7}{27}.$$

2. řešení. Nechť např. $x \geqq \frac{1}{2}$, pak je

$$xy + yz + zx - 2xyz = x(y + z) + yz(1 - 2x) =$$
$$= x(1 - x) + yz(1 - 2x) \leqq x(1 - x) \leqq \frac{1}{4} < \frac{7}{27}.$$

Vzhledem k symetrii zbývá vyšetřit jen případ, kdy je $0 \leqq x, y, z < \frac{1}{2}$. Položme $x' = 1 - 2x$, $y' = 1 - 2y$, $z' = 1 - 2z$, pak je

$$x' + y' + z' = 1,\ x', y', z' > 0$$

a

$$xy + yz + zx - 2xyz = \frac{1}{4}(1 + x'y'z').$$

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dostaneme

$$x'y'z' \leqq \left(\frac{x' + y' + z'}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

takže

$$xy + yz + zx - 2xyz \leqq \frac{7}{27}.$$

3. řešení. Uvažujme mnohočlen

$$p(t) = (t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - t^2 + t(xy + yz + zx) - xyz.$$

Máme tedy dokázat, že pro $x \geqq y \geqq z \geqq 0$, $x + y + z = 1$ je

$$-\frac{1}{8} \leqq p\left(\frac{1}{2}\right) \leqq \frac{1}{216}.$$

Je-li $x \geqq \frac{1}{2}$, je $y \leqq \frac{1}{2}$, $z \leqq \frac{1}{2}$, $p\left(\frac{1}{2}\right) \leqq 0$ a podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

$$-p\left(\frac{1}{2}\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - y\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) \leqq \left(\frac{2x - \frac{1}{2}}{3}\right)^3 \leqq \frac{1}{8},$$

podobně pro $x \leqq \frac{1}{2}$ je

$$0 \leqq p\left(\frac{1}{2}\right) \leqq \left(\frac{\frac{3}{2} - x - y - z}{3}\right)^3 = \frac{1}{216}.$$

4. řešení. Funkce

$$f(x, y, z) = xy + yz + zx - 2xyz$$

je spojitá a nabývá proto v uvažovaném definičním oboru $0 \leqq x, y, z \leqq 1$, $x + y + z = 1$ svého maxima. Je-li $x < \frac{1}{2}$ a $y \neq z$, platí

$$f\left(x, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}\right) = x(y+z) + \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 (1 - 2x) >$$
$$> x(y+z) + yz(1 - 2x) = f(x, y, z).$$

Z důvodů symetrie můžeme předpokládat, že $x \leqq y \leqq z$. Není-li $x = y = z = \frac{1}{3}$, je buď $x < y < z$, nebo $x = y < z$ $\left(\text{v obou případech musí být } x < \frac{1}{2}\right)$, takže

$$f\left(x, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}\right) > f(x, y, z),$$

nebo $x < y = z$ a $z < \frac{1}{2}$, takže

$$f\left(z, \frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) > f(z, x, y) = f(x, y, z),$$

anebo $x = 0$, $y = z = \frac{1}{2}$, a pak je $f\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} < f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Funkce f tedy nabývá v uvedeném definičním oboru svého maxima v jediném bodě $x = y = z = \frac{1}{3}$ a je

$$f(x, y, z) \leqq f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}.$$

5. řešení. Označme $k = xy + yz + zx - 2xyz = x(1 - x) + yz(1 - 2x)$. Vzhledem k symetrii můžeme předpokládat, že $x \leqq \frac{1}{3}$. Protože

$$y + z = 1 - x,$$
$$yz = \frac{k + x(x-1)}{1 - 2x},$$

jsou čísla y, z reálné kořeny kvadratické rovnice

$$t^2 + (x - 1)t + \frac{k + x(x-1)}{1 - 2x} = 0,$$

pro jejíž diskriminant platí

$$(x - 1)^2(1 - 2x) - 4k - 4x(x - 1) \geqq 0,$$

neboli

$$k \leqq -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}.$$

Funkce $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$ má v intervalu $\left\langle 0, \frac{1}{3}\right\rangle$ nezápornou derivaci

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(1 - 3x) \geqq 0,$$

takže

$$k \leqq f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}.$$

6. řešení. Najdeme extrémy funkce

$$f(x, y) = xy + y(1 - x - y) + (1 - x - y)x - 2xy(1 - x - y) =$$
$$= x + y - x^2 - y^2 - 3xy + 2x^2y + 2xy^2$$

v trojúhelníku T s vrcholy $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$. Ty budou ležet buď na jeho hranici, nebo v jeho vnitřních bodech, pro které zároveň

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - 2x - 3y + 4xy + 2y^2 = (2x + y - 1)(2y - 1) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - 2y - 3x + 4xy + 2x^2 = (2y + x - 1)(2x - 1) = 0.$$

Snadno zjistíme, že těmto dvěma podmínkám vyhovuje jediný vnitřní bod trojúhelníku T, totiž $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, v němž $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}$. Zbývá prozkoumat hranici trojúhelníku T, tj. vyšetřit průběh funkce

$$f(x, 0) = f(0, x) = f(x, 1 - x) = x(1 - x)$$

v intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Tam je ale $0 \leqq x(1 - x) \leqq \frac{1}{4}$.

Funkce $f(x, y)$ nabývá v trojúhelníku T maxima $\frac{7}{27}$ v bodě $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ a minima 0 v bodech $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, takže je

$$0 \leqq xy + yz + zx - 2xyz \leqq \frac{7}{27}$$

s rovností vlevo pro trojice $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ a vpravo pro $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

148. Podle binomické věty je

$$\begin{aligned}(a + b)^7 - a^7 - b^7 &= 7ab\,[(a^5 + b^5) + 3ab(a^3 + b^3) + 5a^2b^2(a + b)] = \\ &= 7ab(a + b)(a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4) = \\ &= 7ab(a + b)(a^2 + ab + b^2)^2. \qquad (1)\end{aligned}$$

Vyhovují-li čísla a, b podmínkám úlohy, je číslo $a^2 + ab + b^2$ dělitelné číslem $7^3 = 343$. Zkusme např. $a = 1$ a hledejme b tak, aby $b^2 + b + 1$ bylo dělitelné 343. Vyhovuje $b = 18$.

2. řešení. Použijme rovnost (1). Položme $a = 1$ a hledejme b tak, aby čísla b, $b + 1$ nebyla dělitelná sedmi a aby $b^2 + b + 1$ bylo dělitelné 7^3. Podle Eulerovy věty platí pro nesoudělná čísla r, s, že $r^{\varphi(s)} - 1$ je dělitelné číslem s, kde $\varphi(s)$ je počet přirozených čísel menších než s a nesoudělných s s.

Je-li tedy r číslo, které není dělitelné sedmi, je

$$r^{\varphi(7^3)} - 1 = r^{6.7^2} - 1 = (r^{2.7^2} - 1)(r^{4.7^2} + r^{2.7^2} + 1)$$

dělitelné 7^3, a není-li ani $r^{98} - 1$ dělitelné sedmi, bude $r^{2 \cdot 98} + r^{98} + 1$ dělitelné 7^3. Dvojice $a = 1$, $b = r^{98}$ tedy vyhovuje podmínkám úlohy, pokud žádné z čísel

$$r,\ r^{98} - 1,\ b + 1 = r^{98} + 1$$

není dělitelné sedmi.

Není-li r dělitelné sedmi, dává r^6 podle Fermatovy věty při dělení sedmi zbytek 1. Protože $98 = 6.16 + 2$, dávají čísla r^{98} a r^2 při dělení sedmi stejný zbytek, takže stačí najít takové r, aby žádné z čísel r, $r^2 - 1$, $r^2 + 1$ nebylo dělitelné sedmi. Odtud plyne, že dvojice $a = 1$, $b = r^{98}$ vyhovují úloze, právě když r dává při dělení sedmi zbytek 2, 3, 4 nebo 5.

3. řešení. Řešením úlohy jsou právě ty dvojice (a, b), pro něž $a \not\equiv 0 \pmod 7$, $b \not\equiv 0 \pmod 7$, $a + b \not\equiv 0 \pmod 7$ a

$$a^2 + ab + b^2 \equiv 0 \pmod{7^3}. \tag{2}$$

Vyhovuje-li dvojice (a, b) rovnici (2), vyhovuje jí zřejmě i dvojice (ka, kb) pro libovolné přirozené číslo k. Vyhovuje-li tedy úloze dvojice (a, b), vyhovuje podle Eulerovy věty (viz 2. řešení) i dvojice $(1, a^{293}b)$. Chceme-li tedy najít všechny dvojice (a, b) vyhovující úloze, stačí najít všechna řešení tvaru $(1, t)$, ostatní pak budou tvaru (k, kt), kde $k \not\equiv 0 \pmod 7$.

Řešme tedy rovnici

$$t^2 + t + 1 \equiv 0 \pmod{7^3}. \tag{3}$$

Vyhovuje-li t rovnici (3), vyhovuje jí i $\pmod 7$ a snadno zjistíme, že $t \equiv 2 \pmod 7$ nebo $t \equiv 4 \pmod 7$.

Nechť $t \equiv 2 \pmod 7$, tj. $t = 7m + 2$. Pak má rovnice

$$(7m + 2)^2 + (7m + 2) + 1 \equiv 0 \pmod{7^2},$$

neboli

$$35m + 7 \equiv 0 \pmod{7^2},$$

neboli

$$5m + 1 \equiv 0 \pmod 7)$$

řešení $m \equiv 4 \pmod 7$. Proto vyhovuje-li $t \equiv 2 \pmod 7$ rovnici (3), je $t \equiv 30 \pmod{7^2}$, tj. $t = 7^2 n + 30$. Platí tedy

$$(7^2n + 30)^2 + (7^2n + 30) + 1 \equiv 0 \pmod{7^3},$$

neboli

$$61n + 19 \equiv 0 \pmod 7$$

a odtud $n \equiv 6 \pmod 7$. V případě $t \equiv 2 \pmod 7$ jsme našli jediné řešení rovnice (3) $t \equiv 324 \pmod{7^3}$.

V případě $t \equiv 4 \pmod 7$ najdeme analogicky druhé řešení rovnice (3) $t \equiv 18 \pmod{7^3}$.

Řešením úlohy jsou všechny dvojice přirozených čísel

$$(a, b) \equiv (k, 18k) \text{ nebo } (k, 324k) \pmod{7^3},$$

kde $k \not\equiv 0 \pmod 7$.

149. Uvažujme dvě kružnice $R = (O, r)$ a $S = (O, s)$, kde $0 < r < s < 1$. Na kružnici R existuje bod X takový, že $S = C(X)$. Je to bod X, pro nějž $\alpha(X) = r(s - r)$ (zřejmě $0 < \alpha(X) < 1$). Nevyskytuje-li se barva bodu X na kružnici S, znamená to, že množina všech barev na kružnici R se liší od množiny všech barev na kružnici S.

Kdyby dokazované tvrzení neplatilo, znamenalo by to, že na každých dvou různých kružnicích se středem O a poloměrem menším než 1 jsou různé množiny barev. Množina všech barev, jimiž jsou obarveny body roviny, by tedy měla nekonečně mnoho podmnožin a nebyla by konečná.

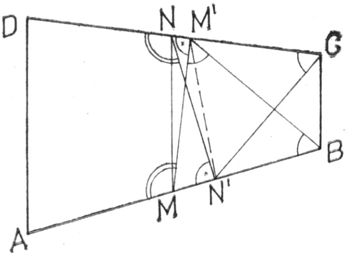
150. Označme M střed strany AB, M' pravoúhlý průmět bodu M na přímku CD (obr. 158). Protože podle předpokladu leží bod M' na kružnici s průměrem AB, je trojúhelník $BM'M$ rovnoramenný, neboli

$$|\sphericalangle MBM'| = |\sphericalangle MM'B| = \frac{1}{2}\,|\sphericalangle AMM'|.$$

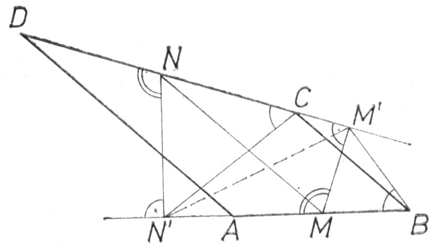
Dále označme N střed strany CD a N' jeho průmět na přímku AB. Protože $|\sphericalangle MM'D| = |\sphericalangle NN'A| = 90°$, je

$$|\sphericalangle AMM'| = |\sphericalangle DNN'|$$

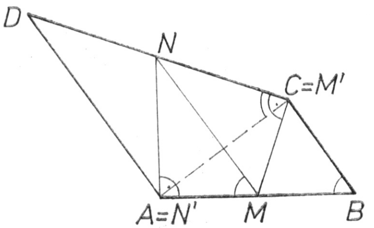
a body M, M', N, N' leží na kružnici s průměrem MN.



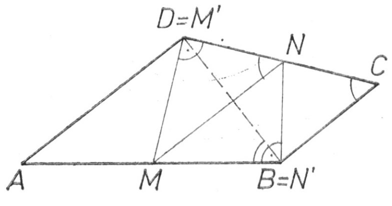
Obr. 158



Obr. 159



Obr. 160



Obr. 161

Kružnice nad průměrem CD se dotýká přímky AB, právě když trojúhelník $CN'N$ je rovnoramenný, tj. právě když

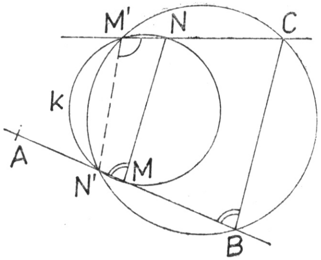
$$|\sphericalangle NCN'| = \frac{1}{2}|\sphericalangle DNN'| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AMM'| = |\sphericalangle MBM'|.$$

To nastane pro $M' \neq C$ a $N' \neq B$ právě tehdy, leží-li body M', N', B, C na kružnici (obr. 158, 159). Pokud je $M' = C$ (obr. 160) nebo $N' = B$ (obr. 161), je zřejmě $|\sphericalangle NCN'| = |\sphericalangle MBM'|$, právě když $MN \| BC$, tj. $AD \| BC$, takže v tomto speciálním případě jsme s důkazem hotovi (dokonce bude $A = N'$, resp. $D = M'$).

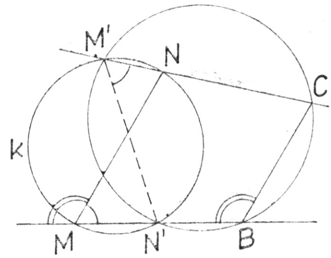
Zbývá ukázat, že čtyři různé body M', N', B, C leží na kružnici, právě když

$$|\sphericalangle AMN| = |\sphericalangle ABC|,$$

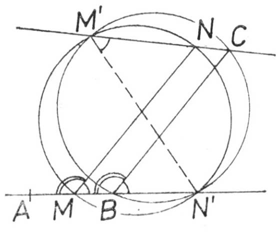
tj. jsou-li protější strany BC a AD čtyřúhelníku $ABCD$ rovnoběžné. To ale plyne okamžitě z věty o obvodových úhlech - jen je třeba uvážit všechny možné polohy bodů M', N' vůči bodům M, N, B, C (podle toho je buď $|\sphericalangle N'MN| = |\sphericalangle N'M'N|$ nebo $|\sphericalangle N'MN| = 180° - |\sphericalangle N'M'N|$ a podobně buď $|\sphericalangle N'BC| = 180° - |\sphericalangle N'M'N|$ nebo $|\sphericalangle N'BC| = |\sphericalangle N'M'N|$. Ze všech 16 možností však stačí uvažovat jen případy uvedené na obr. 162 a)—e) (případ $M' = N$, $N' = M$ je triviální). Tím je důkaz hotov.



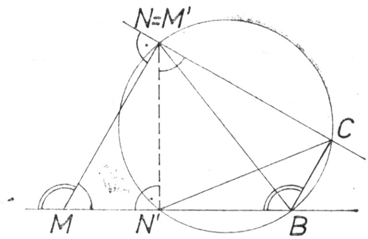
Obr. 162a



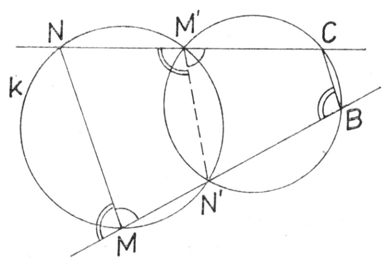
Obr. 162b



Obr. 162c



Obr. 162d



Obr. 162e

Poznámka. Poslední tvrzení zřejmě platí, i když MN je libovolná tětiva kružnice k (obr. 162): Předpokládejme, že body M, N, M', N', leží na kružnici, bod B leží na přímce MN' a bod C na přímce $M'N$, $M' \neq C \neq \neq B \neq N'$. Potom body M', N', B, C leží na kružnici, právě když $MN \| BC$.

2. řešení. Označme M střed strany AB, N střed strany CD a M', N' jejich kolmé průměty na protější strany (obr. 163). Strany BC a AD budou rovnoběžné, právě když bude každá z nich rovnoběžná s příčkou MN, tj. právě když bude pro obsahy příslušných trojúhelníků platit

$$S(MNB) = S(MNC) \quad \text{a} \quad S(MNA) = S(MND).$$

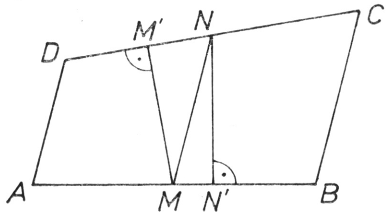
Protože

$$S(MNA) = S(MNB) = \frac{1}{4}\,|AB|\,|NN'|$$

a

$$S(MNC) = S(MND) = \frac{1}{4}\,|CD|\,|MM'| = \frac{1}{4}\,|CD|\,\frac{|AB|}{2},$$

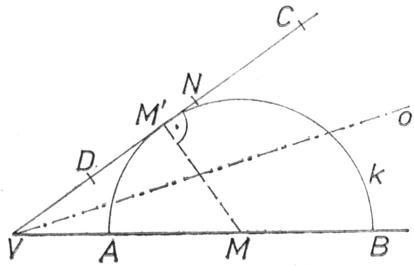
jsou strany BC a AD rovnoběžné, právě když $|NN'| = \dfrac{|CD|}{2}$, tj. právě když se kružnice nad průměrem CD dotýká strany AB.



Obr. 163

3. řešení. Pokud $AB \| CD$, dotýká se zřejmě kružnice nad průměrem CD přímky AB, právě když $|CD| = |AB|$, tj. právě když $ABCD$ je rovnoběžník.

Jsou-li přímky AB, CD různoběžné, označme V jejich průsečík, o osu úhlu BVC, M a N středy stran AB a CD (obr. 164). Uvažujme zobrazení Z, které dostaneme složením osové souměrnosti podle osy o a stejnolehlosti se středem V a koeficientem $\frac{|VN|}{|VM|}$. V tomto zobrazení bude $Z(M) = N$. Protože kružnice k sestrojená nad průměrem AB má střed v bodě M a dotýká se přímky CD, bude se kružnice nad průměrem CD se středem $Z(M)$ dotýkat přímky AB, právě když bude obrazem kružnice k v zobrazení Z, tj. právě když bude $Z(A) = D$ a $Z(B) = C$. Zřejmě však je $AZ(A) \| BZ(B)$.



Obr. 164

151. Uvažujme konvexní n-úhelník $A_1A_2 \ldots A_n$. S indexy budeme počítat modulo n.

Je-li A_iA_j úhlopříčka, je podle trojúhelníkové nerovnosti

$$|A_iA_j| + |A_{i+1}A_{j+1}| > |A_iA_{i+1}| + |A_jA_{j+1}|.$$

Sečteme-li tyto nerovnosti pro všech $\frac{n(n-3)}{2}$ úhlopříček A_iA_j, dostaneme vlevo každou úhlopříčku dvakrát a vpravo každou stranu $(n-3)$-krát, tedy

$$2d > (n-3)p.$$

Pro délku úhlopříčky A_iA_j dále platí

$$\begin{aligned} |A_iA_j| &< |A_iA_{i+1}| + \ldots + |A_{j-1}A_j|, \\ |A_iA_j| &< |A_jA_{j+1}| + \ldots + |A_{i-1}A_i|. \end{aligned} \tag{1}$$

Je-li $n = 2k + 1$, vezměme pro každou úhlopříčku A_iA_j tu z nerovností (1), která má na pravé straně menší počet sčítanců, a těchto $\frac{n(n-3)}{2}$

nerovností sečtěme. Dostaneme nerovnost, na jejíž levé straně je d a na pravé straně je součet délek stran, v němž se každá strana vyskytuje tolikrát, pro kolik úhlopříček leží v »menší« ze dvou částí, na které je obvod úhlopříčkou rozdělen. Např. pro stranu A_1A_n vychází z vrcholu A_k jediná taková úhlopříčka, z vrcholu A_{k-1} dvě, ..., z vrcholu A_2 jich vychází $k - 1$ a z vrcholu A_1 také $k - 1$. Na pravé straně je tedy každá strana započtena tolikrát, kolik je

$$1 + 2 + \ldots + (k - 1) + (k - 1),$$

takže

$$d < \frac{(k-1)(k+2)}{2} p = \frac{p}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2\right).$$

Je-li $n = 2k$, vezměme pro každý »průměr« A_iA_{i+k} nerovnost

$$|A_iA_{i+k}| < \frac{p}{2}$$

a pro ostatní úhlopříčky opět tu z nerovností (1), která má na pravé straně menší počet sčítanců. Sečteme-li těchto $\frac{n(n-3)}{2}$ nerovností, dostaneme

$$d < k\frac{p}{2} + \frac{(k-2)(k+1)}{2} p = \frac{k^2 - 2}{2} p =$$
$$= \frac{p}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2\right).$$

Poznámka. Nerovnosti, které jsme dokázali, nelze zlepšit. Pro mnohoúhelník, jehož dvě sousední strany mají délku 1 a ostatní strany jsou velmi malé, bude

$$p \doteq 2,\ d \doteq n - 3 \text{ a } \frac{2d}{p} \doteq n - 3.$$

Pro mnohoúhelník, jehož »protilehlé« strany A_kA_{k+1}, A_nA_1, kde $k = \left[\frac{n}{2}\right]$, mají délku 1 a ostatní strany jsou velmi malé, bude

$$p \doteq 2,\ d \doteq k(n - k) - 2$$

a

$$\frac{2d}{p} \doteq k(n-k) - 2 = \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2.$$

2. řešení. Zvolme přímku q a pravoúhlé průměty vrcholů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uvažovaného mnohoúhelníku na přímku q označme $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$.

Uvažujme nyní body $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ležící v přímce v tomto pořadí a odhadněme součet délek s všech úseček B_iB_j pomocí délky úsečky B_1B_n a čísla n. Zřejmě

$$s \geqq (|B_1B_2| + |B_2B_n|) + (|B_1B_3| + |B_3B_n|) + \ldots + (|B_1B_{n-1}| + \\ + |B_{n-1}B_n|) + |B_1B_n| = (n-1)\,|B_1B_n|.$$

Dále si všimněme, že každá úsečka B_iB_j se skládá z úseček B_kB_{k+1}, přičemž každá úsečka B_kB_{k+1} je částí právě $k(n-k)$ úseček B_iB_j. Je tedy

$$s = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)\,|B_kB_{k+1}|.$$

Přitom

$$4k(n-k) = n^2 - (n-2k)^2$$

a součin $k(n-k)$ nabývá tedy největší hodnoty pro $k = \left[\frac{n}{2}\right]$, takže

$$s \leqq \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] |B_kB_{k+1}| = \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] |B_1B_n|.$$

Odvodili jsme nerovnost

$$(n-1)\,|B_1B_n| \leqq s \leqq \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] |B_1B_n|. \tag{2}$$

Jsou-li mezi body $B_1, B_2, \ldots, B_n$ aspoň čtyři různé, jsou přitom na obou stranách ostré nerovnosti.

Průměty $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ nemusí sice ležet na přímce q v tomto pořadí, vzhledem ke konvexitě mnohoúhelníku $A_1A_2\ldots A_n$ je však součet

$$|A'_1A'_2| + |A'_2A'_3| + \ldots + |A'_{n-1}A'_n| + |A'_nA'_1|$$

roven dvojnásobku nejdelší z úseček $A'_iA'_j$. Je tedy podle (2)

$$(n-1)\,(|A'_1A'_2| + |A'_2A'_3| + \ldots + |A'_nA'_1|) \leqq 2 \sum_{i<j} |A'_iA'_j| \leqq$$

$$\leqq \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right](|A_1'A_2'| + |A_2'A_3'| + \ldots + |A_n'A_1'|),$$

přičemž $|A_i'A_j'| = |A_iA_j| \cos \alpha_{ij}$, označíme-li α_{ij} úhel sevřený přímkami A_iA_j, q $\left(0 \leqq \alpha_{ij} \leqq \frac{\pi}{2}\right)$.

Otáčejme nyní zvolenou přímku q kolem nějakého bodu O. Pro $0 \leqq x < \pi$ tak dostaneme přímku $q(x)$, která bude s přímkou A_iA_j svírat úhel $\alpha_{ij}(x)$ $\left(0 \leqq \alpha_{ij}(x) \leqq \frac{\pi}{2}\right)$, bude tedy pro každé $x \in \langle 0, \pi)$ platit

$$(n-1)(|A_1A_2| \cos \alpha_{12}(x) + |A_2A_3| \cos \alpha_{23}(x) + \ldots +$$
$$+ |A_nA_1| \cos \alpha_{n1}(x)) \leqq 2 \sum_{i<j} |A_iA_j| \cos \alpha_{ij}(x) \leqq$$
$$\leqq \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right](|A_1A_2| \cos \alpha_{12}(x) + |A_2A_3| \cos \alpha_{23}(x) + \ldots +$$
$$+ |A_nA_1| \cos \alpha_{n1}(x)).$$

Přitom je pro $1 \leqq i < j \leqq n$

$$\int_0^\pi \cos \alpha_{ij}(x) \, dx = \int_0^\pi |\cos x| \, dx = 2.$$

Zintegrujeme-li tedy poslední nerovnost na intervalu $\langle 0, \pi)$, dostaneme

$$2(n-1)(|A_1A_2| + |A_2A_3| + \ldots + |A_nA_1|) \leqq 4 \sum_{i<j} |A_iA_j| \leqq$$
$$\leqq 2\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right](|A_1A_2| + |A_2A_3| + \ldots + |A_nA_1|),$$

neboli

$$(n-1)p \leqq 2(d+p) \leqq \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] p.$$

Protože $n > 3$ a jen pro konečně mnoho $x \in \langle 0, \pi)$ se stane, že některé průměty splynou, budou na obou stranách dokonce ostré nerovnosti, tj.

$$(n-1)p < 2(d+p) < \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] p,$$

čili

$$(n-3)p < 2d < \left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2\right)p.$$

3. řešení (dolní odhad). Pro $k \in \left\{2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}\right\}$ v případě lichého n a $k \in \left\{2, 3, \ldots, \frac{n-2}{2}\right\}$ v případě sudého n označme U_k množinu všech úhlopříček A_iA_j, kde $j - i = k$ (s indexy počítáme modulo n), tj. úhlopříček, které »obcházejí« právě $k - 1$ vrcholů, a součet jejich délek označme d_k. Pro $k < \frac{n-2}{2}$ označme ještě o_k součet délek »vnějších částí« úhlopříček z U_k, tj. těch částí, které nejsou od obvodu mnohoúhelníku odděleny jinou úhlopříčkou z U_k (v obr. 165 jsou znázorněny silně pro $k = 3$). Zřejmě

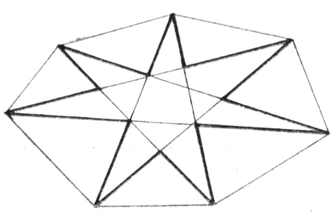
$$p < o_k \leqq d_k.$$

Je-li n sudé, $k = \frac{n-2}{2}$, je (obr. 166)

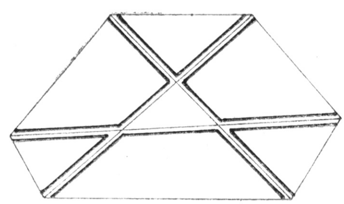
$$\frac{p}{2} < d_k.$$

Sečteme-li tyto nerovnosti pro všechna uvažovaná k, dostaneme v případě lichého n

$$\frac{n-3}{2}p < d_2 + d_3 + \ldots + d_{\frac{n-1}{2}} = d$$



Obr. 165



Obr. 166

a v případě sudého n

$$\frac{n-4}{2}p + \frac{p}{2} < d_2 + d_3 + \ldots + d_{\frac{n-2}{2}} = d,$$

což dává levou část dokazované nerovnosti.

4. řešení (dolní odhad). Budeme postupovat indukcí podle n. Snadno zjistíme, že pro $n = 4$ dokazovaná nerovnost platí. Nechť $k \geqq 4$, předpokládejme, že levá nerovnost platí pro každý konvexní k-úhelník $A_1A_2 \ldots A_k$, a mějme dán nějaký konvexní $(k+1)$-úhelník $A_1 \ldots A_kA_{k+1}$. Součet délek jeho úhlopříček označme d a obvod p.

Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$ z něho sestrojme konvexní k-úhelník tak, že dvojici stran vycházejících z vrcholu A_i nahradíme úhlopříčkou $A_{i-1}A_{i+1}$ (s indexy počítáme modulo $k+1$). Podle indukčního předpokladu je

$$(k-3)(p - |A_{i-1}A_i| - |A_iA_{i+1}| + |A_{i-1}A_{i+1}|) < 2(d - |A_{i-1}A_{i+1}| - d_i),$$

kde d_i je součet délek úhlopříček vycházejících z vrcholu A_i uvažovaného $(k+1)$-úhelníku. Sečteme-li tyto nerovnosti pro všechna i, dostaneme

$$(k-3)\left((k+1)p - 2p + \sum_{i=1}^{k+1} |A_{i-1}A_{i+1}|\right) <$$
$$< 2\left((k+1)d - 2d - \sum_{i=1}^{k+1} |A_{i-1}A_{i+1}|\right),$$

neboli

$$(k-3)p + \sum_{i=1}^{k+1} |A_{i-1}A_{i+1}| < 2d.$$

Teď si stačí uvědomit (např. jako v 3. řešení), že

$$\sum_{i=1}^{k+1} |A_{i-1}A_{i+1}| > p,$$

a dostaneme nerovnost

$$(k-2)p < 2d,$$

což je levá strana dokazované nerovnosti pro $n = k+1$.

152. Nejprve dokážeme, že $k > m$, což plyne z nerovnosti

$$2^k - 2^m = a + d - (b + c) = a - b + d - \frac{ad}{b} = (b - a)\left(\frac{d}{b} - 1\right) > 0.$$

Z rovnosti

$$a(2^k - a) = b(2^m - b)$$

dostaneme

$$2^m \mid b^2 - a^2 = (b + a)(b - a). \tag{1}$$

Čísla $b + a$, $b - a$ nejsou obě dělitelná čtyřmi, protože jejich součet $2b$ není čtyřmi dělitelný. Jedno z čísel $b + a$, $b - a$ je tedy podle (1) dělitelné číslem 2^{m-1}. Je však

$$b - a < b < \frac{b + c}{2} = 2^{m-1}$$

a zároveň

$$b + a < b + c = 2^m,$$

takže

$$b + a = 2^{m-1}. \tag{2}$$

Podobně je

$$c - a = b + c - (b + a) = 2^m - 2^{m-1} = 2^{m-1}. \tag{3}$$

Protože a, b, c jsou lichá čísla, plyne z (2), že a, b jsou nesoudělná čísla, a z (3), že a, c jsou nesoudělná čísla. Z podmínky $ad = bc$ vidíme, že $a \mid bc$. Musí tedy být $a = 1$.

Navíc odtud plyne, že $b = 2^{m-1} - 1$, $c = 2^{m-1} + 1$ a $d = 2^{2(m-1)} - 1$, kde $m > 2$ je přirozené číslo.

2. řešení. Nejprve ukážeme, že $k > m$:

$$2^{2k} = (d + a)^2 = (d - a)^2 + 4ad > (c - b)^2 + 4bc = (b + c)^2 = 2^{2m}.$$

Uvažujme přirozená čísla x, y, pro která je

$$\begin{gathered} a = 2^{k-1} - x,\ b = 2^{m-1} - y,\ c = 2^{m-1} + y, \\ d = 2^{k-1} + x. \end{gathered} \tag{4}$$

Platí

$$2^{2k-2} - x^2 = ad = bc = 2^{2m-2} - y^2, \tag{5}$$

takže

$$x^2 - y^2 = 2^{2k-2} - 2^{2m-2},$$

neboli

$$(x - y)(x + y) = 2^{2m-2}(2^{2(k-m)} - 1). \tag{6}$$

Čísla x, y jsou lichá, čísla $x + y$, $x - y$ sudá a přitom nemohou být obě zároveň dělitelná čtyřmi, protože

$$x + y + x - y = 2x. \tag{7}$$

Je tedy $\{x + y, x - y\} = \{2r, 2^{2m-3}s\}$ pro nějaká lichá čísla r a s. Odtud plyne podle (7) a (6)

$$x = 2^{2m-4}s + r, \; rs = 2^{2(k-m)} - 1,$$

takže podle (4)

$$a = 2^{k-1} - x = 2^{k-1} - 2^{2(m-2)}s - r$$

a dále

$$1 \leqq sa = 2^{k-1}s - 2^{2(m-2)}s^2 - 2^{2(k-m)} + 1 =$$
$$= 1 - (2^{m-2}s - 2^{k-m})^2 \leqq 1,$$

tedy

$$a = s = 1.$$

Navíc je $m - 2 = k - m$, tj. $k = 2m - 2$ a ze (4) dostaneme

$$x = 2^{2m-3} - 1, \; d = a + 2x = 2^{2m-2} - 1 = bc = 2^{2m-2} - y^2,$$

takže

$$b = 2^{m-1} - 1, \; c = 2^{m-1} + 1.$$

Podmínkám úlohy tedy vyhovují právě všechny čtveřice

$$a = 1, \; b = 2^{m-1} - 1, \; c = 2^{m-1} + 1, \; d = 2^{2m-2} - 1,$$

kde $m > 2$ je přirozené číslo.