Základowé Měřictwj, čili Geometrye

Josef Vojtěch Sedláček vydal roku 1822 objemnou učebnici *Základowé Měřictwj, čili Geometrye* [X-33]. Po Vydrově učebnicí *Počátkowé Arytmetyky* byla druhým výrazným činem v matematicko-fyzikálním vzdělávání v české řeči. Obě učebnice měly celonárodní význam, i když z hlediska využití k výuce na školách vyšly vlastně předčasně. Vytvářely mimo jiné základní českou odbornou matematickou, přírodovědnou i technickou terminologii.

Pavel Josef Šafařík ocenil Sedláčkovu učebnici dlouhým osobním dopisem dne 3. února 1823. Rovněž Josef Jungmann Sedláčkovu učebnici velmi pozitivně hodnotil. Ve svém významném rozsáhlém díle *Historie literatury české* z roku 1825 se o ní vyjádřil takto: *… prwnj w tom druhu klasická kniha.*[1]

1. Předmluva, obsah učebnice

V předmluvě své učebnice Sedláček kritizoval, zejména z hlediska terminologického, předchozí českou učebnici *Gruntownj Počátek Mathematického Vměnj* [Ves] z roku 1734, kterou napsal *Přisezuj Zemský Mljnář a Geometr* Václav Josef Veselý (1683–1736):

Nežbych tak psal, raděgibych na wždy péro odhodil, a na wěky vmlkl. Mělliby vbohý Čecháček takowých slow vžjwati, newjm, aby se gich wjce nezhrozyl, nežli když se mu pauze česká, a powaze gazyka přiměřená slowa podáwagj.

([X-33], s. xxi)

V závěru předmluvy uvedl Sedláček návod ke studiu své knihy, který bychom mohli i dnes doporučit studentům matematiky, ovšem po jazykové modernizaci, kterou jsme zde provedli:

1. *Čtěte knihu postupně od začátku do konce, nic nevynechávejte. Geometrii nelze číst tak snadno a lehce, jako noviny.*
2. *Čtěte pozorně, aby vám nic neuniklo, s přesvědčením, že zde není nic zbytečného, na čem by se v následujícím nestavělo.*
3. *Bedlivě rozeznávejte všechny kroky, z nichž jsou odvozena tvrzení.*
4. *Nestačí jenom číst. Přemýšlejte, co jste četli, tak dlouho, až důkladně pochopíte každou jednotlivost, … až nahlédnete propojení každého tvrzení se všemi jeho zdůvodněními, které jsou v důkazu uvedeny. Abyste se o tom přesvědčili, zavřete knihu a pokuste se obrázek načrtnouti,*

[1] Viz [Ju2], s. 501.

důkaz tvrzení na papíru nebo na tabuli opakovat. Pokud jej dokonale předvedete, jste si jistí. Zůstanete-li stát, zkoumejte, zda jste schopni přemýšlením mezeru vyplnit. Poštěstí-li se to, tím lépe, pokud ne, poraďte se s knihou, ještě jednou rozmyslete, co tvrzení říká, rozeberte celý důkaz do jednotlivých kroků, zkoumejte, na kterých předchozích tvrzeních jsou jednotlivé kroky založeny, projděte ještě jednou celou posloupnost argumentů, zavřete knihu a opakujte svůj pokus tak dlouho, až budete schopni důkaz provést.

5. *Při takovémto opakování vám dobře poslouží symbolika z dílny moderních matematiků, neboť vede k jednodušší a snadnější prezentaci celého důkazu.*
6. *Musíte se pilně cvičiti v řešení úloh, prospěšnější bude, budete-li je řešit různými způsoby.*

Rovněž vám prospěje, když při opakování pouček a úloh v obrázcích, které se k nim vztahují, změníte vše, co svévolně přidáno. Jen takovým způsobem můžete z knihy mít takové ponaučení a užitek, kterého si po celý život budete vážit. ([X-33], s. xxiii–xxiv)

Sedláčkova učebnice geometrie je rozdělena do pěti kapitol, za jejichž českými názvy (kromě první) jsou navíc názvy latinské. Dále jsou členěny na podkapitoly.

I. *Vwedenj. O měřictwj wesměs.* (s. 3–27)
II. *Délkoměrstwj* (*longimetria*). *Plochoměrstwj* (*planimetria*). (s. 28–168)
III. *Troghranoměrstwj* (*trigonometria*). (s. 169–289)
IV. *Tělesoměrstwj* (*stereometria*). (s. 290–367)
V. *O řezých neboli sečkách kuželowých* (*de sectionibus conicis*). (s. 368–409)

V závěru knihy je otištěn index se soupisem termínů v české, latinské a německé verzi (s. 410–418), za ním následuje *Oprawa omylů znamenitěgssjch* (s. 419–420). Na sedmi vložených obrazových přílohách je 328 obrázků.

2. Vstupní kapitola

První kapitola odpovídá do jisté míry úvodním partiím Eukleidových *Základů*. Nejprve je podán stručný výklad základních pojmů aritmetických a algebraických (veličina, aritmetické operace, rovnice, řešení rovnic, ...), planimetrických (bod, čára, ..., úhel, trojúhelník, ...) a stereometrických (těleso, rovnoběžnostěn, ..., kužel, koule, ...), české termíny jsou v závorkách doprovázeny latinskými ekvivalenty. Zavedeny jsou jednotky délkové, čtvereční, kubické a úhlové spolu s jejich převodními vztahy a matematické symboly[2]

$$=\,,\ +\,,\ -\,,\ \times\,,\ :\,,\ >\,,\ <\,,\ \sqrt{a}\,,\ \sqrt[3]{a}\,,\ \angle\,,\ \triangle\,,\ \backsim\,,\ \backsimeq\,,\ \#\ .$$

[2] Posledních pět jsou symboly úhlu, trojúhelníku, podobnosti, shodnosti a rovnoběžnosti.

Řadu českých termínů musel Sedláček vytvořit, jeho kniha více či méně ovlivňovala autory pozdějších českých učebnic, kteří na něho mohli úspěšně navazovat.[3] Jejich učebnice geometrie se však objevily až po čtyřech desetiletích.

V závěru úvodní kapitoly uvedl Sedláček sedm *postulátů*, které označil a, b, c, d, e, f, g, při jejichž formulaci projevil jistou tvořivost. Jeho postuláty a, b, c odpovídají prvním třem postulátům kritické verze Eukleidových *Základů*;[4] v prvních dvou jsou zajímavé dovětky, že vést přímku, resp. přímku prodlužovat, lze *aspoň w obrazotwornosti.* Další postuláty vypadají (v moderní formulaci) takto:

d. *Jsou-li veličiny stejné, může se jedna za druhou dosadit, aniž by se rovnost porušila.*[5]

e. *Bodem lze vést přímku, která bude mít od dané přímky všude stejnou vzdálenost.*[6]

f. *V daném bodě přímky se může vztyčit kolmice, a rovněž z daného bodu mimo přímku se může k té přímce spustit kolmice.*[7]

g. *Každá přímka se může rozdělit na dvě stejné části.*[8]

Na dalších stránkách ([X-33], s. 24–27) uvedl Sedláček tzv. *lemmata.* Některé se shodují s axiomy kritické verze Eukleidových *Základů*, některé se liší.[9] Vyjádříme je (až na dva) symbolicky:

I. Je-li $a = b$, $b = c$, pak $a = c$.[10]

II. Je-li $a = b$, je $a + c = b + c$.

III. Je-li $a = b$, je $a - c = b - c$.

IV. Je-li $a = b$, je $a \times c = b \times c$.[11]

V. Je-li $a = b$, je $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

---

[3] Mezi prvními byli Václav Jandečka (1820–1898), František Šanda (1831–1893) a František Alois Hora (1838–1916). O širším kontextu viz [Bč4].

[4] Počet i obsah postulátů se během staletí měnil. Kritickou verzi *Základů* vytvořil Johan Ludvig Heiberg (1854–1928). Vyšla roku 1883. Viz [Bč3].

[5] Tento postulát není ani v kritické ani v předkritické verzi *Základů*, jedná se spíše o nějakou variantu prvních tří axiomů.

[6] Slavný pátý postulát nahradil Sedláček požadavkem existence *ekvidistantní přímky*, což se v 19. století běžně dělalo, v předkritické verzi *Základů* se jednalo většinou o 11. axiom. Eukleidův pátý postulát se u Sedláčka objevil ve druhé kapitole ([X-33], s. 43) – viz dále.

[7] Tato modifikace 4. postulátu se objevovala v předkritické verzi jako 10. axiom. Tento Sedláčkův postulát supluje Eukleidův postulát o rovnosti všech pravých úhlů uvedený v kritické verzi Eukleidových *Základů.*

[8] Toto tvrzení se nevyskytuje ani mezi postuláty ani mezi axiomy kritické či předkritické verze. Připomeňme, že *přímkou* se v duchu Eukleida rozuměla v podstatě *úsečka.*

[9] V předkritické verzi bylo většinou 12 axiomů (dva jsou dnes postuláty), v kritické verzi je 8, resp. 9 axiomů.

[10] První tři Sedláčkova lemmata se více méně shodují s prvními třemi axiomy kritické verze *Základů.*

[11] Sedláčkova lemmata IV.–VIII. neodpovídají ani postulátům ani axiomům *Základů*, popisují pravidla pro úpravy rovnic.

VI. Je-li $a = b$, je $a^c = b^c$.
VII. Je-li $a = b$, je $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b}$.
VIII. V důsledku předchozích lemmat lze úpravami řešit rovnici.
IX. Celek je větší než jeho díl.[12]
X. Je-li $a = b$, $c > d$, pak $a - c < b - d$.[13]

Velmi zajímavé jsou Sedláčkovy představy o charakteru čar, ploch a těles, které neodpovídají Eukleidovu pojetí. Sedláček zde navázal na Archiméda, v dalších kapitolách snad dokonce na myšlenky, které prezentoval Bonaventura Cavalieri (1598–1647) ve svém díle *Geometria indivisibilibus* z roku 1635. Sedláčkovy představy, které ve své knize využíval, vypadají v moderním přepisu takto:

Těleso je složeno z nesčíslně mnoha nekonečně malých těles, nikoliv snad z ploch, nebo povrchů; neb kde tyto jsou, tam již přestalo býti těleso tělesem. Plocha je složena z nesčíslně mnoha nekonečně malých ploch, povrch z povrchů, ne snad z čar; neboť kde je čára, tam již přestala být plocha plochou, povrch povrchem. Rovněž čára je složena z nesčíslně mnoha nekonečně malých čar ne snad z bodů, neboť bod je přestávka čáry. A každá protaženina může jen ze stejnorodých částí složena býti. Když se tedy říká „čára sestává z bodů“, nesmí se tomu tak rozumět, jakoby čára byla z bodů složena, nýbrž že zde, onde, všude může čára se skončiti, body omezena býti, body míti. Totéž rozuměj o površích a tělesech. ([X-33], s. 5–6)

Na dvou místech první kapitoly (s. 23 a 27) doporučil Sedláček učebnici *Počátkowé Arytmetyky* Stanislava Vydry, kterou roku 1806 vydal Josef Ladislav Jandera, Vydrův nástupce na stolici elementární matematiky pražské univerzity. Sedláčkova učebnice geometrie měla být spolu s Vydrovou učebnicí aritmetiky dvěma pilíři základního matematického vzdělání v českém jazyce.

V dalších kapitolách Sedláček postupoval metodou, kterou prezentoval Eukleidés na přelomu čtvrtého a třetího století př. Kr. ve svých *Základech*. Postupně uváděl jak věty s důkazy, tak konstrukční úlohy s konstrukcemi a následnými zdůvodněními. V duchu Eukleida užíval zkratku *c. b. d.* [*což bylo dokázati*], která je dodnes užívána, někdy v podobě *q. e. d.* [*quod erat demonstrandum*]. Sedláčkův výklad je poměrně srozumitelný, metodicky vhodný, teorie je objasňována na konkrétních příkladech. Je otázkou, nakolik jeho kniha postihuje obsah a metody výuky na plzeňském Filozofickém ústavu.

3. Planimetrie

Druhá kapitola se týká rovinné geometrie. Najdeme v ní věty o shodnosti trojúhelníků, o vlastnostech trojúhelníků, čtyřúhelníků, mnohoúhelníků a pravidelných mnohoúhelníků, Thaletovu větu, trojúhelníkovou nerovnost, věty

---

[12] 8. axiom kritické verze.

[13] Přibližně odpovídá 5. axiomu předkritické verze, v kritické verzi není. O předkritických a kritických verzích Eukleidových *Základů* v klasických i národních jazycích viz [Bč3].

o tečnách a sečnách, opsaných a vepsaných kružnicích, o zjišťování obsahů rovinných útvarů včetně mezikruží, kruhové úseče a výseče. Následuje Pýthagorova věta s Eukleidovým důkazem a krátkou poznámkou o Pýthagorovi, je uvedeno i zobecnění Pýthagorovy věty pro kruhy nad stranami pravoúhlého trojúhelníka, Eukleidova věta o výšce, věty o mocnosti bodu ke kružnici.

Na několika stránkách se nachází výklad o poměrech a úměrách, který je nezbytný pro partii o podobnosti. Je ukázáno, že výška na přeponu pravoúhlého trojúhelníka dělí trojúhelník na dva trojúhelníky, které jsou podobné původnímu, že poměr obsahů podobných útvarů je roven poměru čtverců jejich odpovídajících rozměrů, a tento fakt je aplikován na podobné útvary, např. na kruhy, kruhové výseče a úseče. V několika větách jsou uvedeny postačující podmínky, za nichž jsou dva trojúhelníky podobné, je ukázáno, že se poměr podobnosti útvarů přenese na poměr jejich obvodů.

Zajímavé je, že rovina podle Sedláčka vzniká rotací přímky kolem jiné přímky, k níž je kolmá. V souvislosti s tím, že je rovina určena třemi body, připomněl Sedláček citát *Sit mihi mensa tripes!* [Ach, kéž mám třínohý stolek! – Quintus Horatius Flaccus (65–8 př. Kr.)] ([X-33], s. 132).

V řadě konstrukčních úloh druhé kapitoly je třeba sestrojit osu úsečky, osu úhlu, trojúhelník, jehož tři strany jsou dány, vztyčit kolmici v bodě přímky, spustit kolmici z bodu na přímku, sestrojit rovnoběžku k dané přímce, kružnici určenou třemi body, tečnu ke kružnici v bodě kružnice, resp. z bodu mimo kružnici, společnou tečnu dvou kružnic apod. V několika úlohách je třeba přetvořit daný útvar na jiný útvar stejného obsahu: rovnoběžník na obdélník, trojúhelník na obdélník, mnohoúhelník na trojúhelník apod. Další konstrukce se týkají rozdělení úsečky na několik stejných částí, rozdělení úsečky ve stejném poměru, v jakém je rozdělena jiná úsečka, rozdělení úsečky zlatým řezem, sestrojení pravidelného desetiúhelníku, pětiúhelníku a patnáctiúhelníku,[14] k danému mnohoúhelníku je úkolem sestrojit menší či větší podobný mnohoúhelník, rozdělit obdélník přímkou jdoucí určitým bodem obvodu na dvě stejné části apod.

Uvedena je i řada zeměměřických úloh: na měřickém stolku narýsovat úhel, stejný jako v terénu, a obrazec podobný obrazci v terénu, po kterém se můžeme/nemůžeme pohybovat, stanovit vzdálenost dvou přístupných/nepřístupných míst, výšku přístupného/nepřístupného místa, výšku objektu pomocí zrcadla, pomocí hole a vlastní postavy, pomocí stínu, pomocí dvou holí apod. Pozornému čtenáři jistě neuniklo, že mnohé konstrukce a aplikace se v našich současných učebnicích matematiky již nevyskytují.

V druhé kapitole je uveden i klasický pátý postulát (*axioma et principium*):

Když dwa uhlowé wnitřnj působeni od dwau přjmek nĕgakau třetj přjmkau řezaných … méně obsahugj než 180°*, t. g. než* $2\angle P$*, nenj ginak možno, než že*

[14] Zajímavá poznámka se týká „konstrukce“ pravidelného sedmiúhelníku: *Řemeslnicky může se do kruhu wepsati řádný sedmihran, … Polowice strany řádného troghrana skoro, ne ale zauplna, činj stranu řádného sedmihrana, čehož se wjce zkaussenjm dopjditi možno.* ([X-33], s. 77)

ty dwě přjmky … když se prodlaužegj k té straně, kde ti wnitřnj uhlowé méně než $2\angle P$ *obsahugj, musegj se někde sběhnauti, …* ([X-33], s. 43)

Na kružnici/kruh se Sedláček díval podle Archiméda:

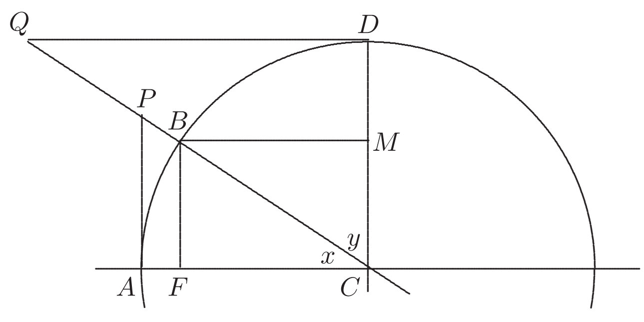
W měřictwj gest často zapotřebj představiti sobě kruh gako řádný mnohohran, gehož okolek gest složen z nesčjslně mnohých a nekonečeně malých stegných částek čili stran. ([X-33], s. 79)

Na základě této představy ukázal, že obsah kruhu je roven polovině součinu obvodu a poloměru. Poznamenal též, že Archimédés (287–212) omezil obvod kruhu s průměrem 7 hodnotami 21 a 22 a připomněl i výsledky Ludolfa van Ceulena (1540–1610) a Adriaana Metia (1571–1635). Rovněž ukázal, že každý mnohoúhelník lze převést na rovnoplochý trojúhelník, ten na obdélník a ten na čtverec a zmínil se o problému kvadratury:

Ba y kruh dalby se proměniti we čtwerec, genžby měl stegnau ploskost s kruhem, genom kdybychom mohli nalezti zauplna každau zwlasstnj gednotliwau welikost okolku. Nebo obdržjme troghranjk, gehož ploskost by byla stegná s ploskostj kruhu, kdybychom okolek kruhu wzali za spod troghrana, a kdekoliw na tom spodu wystawili kolmau stegnau s poloměrem kruhu, a meznj bod té kolmé spogili s meznjma bodama spodu, bude mjti ten troghran takowau ploskost, gako daný kruh. ([X-33], s. 125)

4. Trigonometrie

Třetí kapitola přináší Sedláčkův výklad trigonometrických funkcí, který je z dnešního pohledu značně komplikovaný. Přiblížíme jej na následujícím obrázku, který je jen mírně zjednodušeným obrázkem č. 207 ze Sedláčkovy knihy.



Některé úsečky v tomto obrázku Sedláček pojmenoval českými i latinskými termíny. Pokud by uvažoval jednotkovou kružnici (tj. $AC = 1$), odpovídaly by jejich délky našim hodnotám trigonometrických funkcí. Sedláček však uvažoval kružnici o poloměru r, hodnoty jeho trigonometrických funkcí jsou tedy r-násobky našich současných. V sloupcích následující tabulky uvedeme české a latinské termíny, příslušné úsečky z obrázku a jejich délky v naší současné symbolice, to vše pro úhel x:

přjstava přjmá	*sinus rectus*	BF	$r \sin x$
přjstawa obrácená	*sinus versus*	AF	$r\,(1-\cos x)$
přjstawa celá	*sinus totus*	AC	r
styčná	*tangens*	AP	$r \operatorname{tg} x$
průsečná	*secans*	CP	$r \sec x$
dostawa přjmá	*cosinus rectus*	BM	$r \cos x$
dostawa obrácená	*cosinus versus*	MD	$r\,(1-\sin x)$
dotyčná	*cotangens*	DQ	$r \operatorname{cotg} x$
dosečná	*cosecans*	CQ	$r \operatorname{cosec} x$

Sedláček uvedl i odpovídající funkce úhlu $y = 90° - x$ a ukázal, že platí vztahy

$$\sin x = \cos y, \qquad \operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} y, \qquad \sec x = \operatorname{cosec} y.$$

V dalším popsal souvislosti funkcí sin, cos, tg, cotg a délky r. Vyjádření funkce sinus polovičního úhlu v Sedláčkově zápisu je pro nás málo srozumitelné, neboť se v něm objevuje funkce *sinus versus*. Po snadné úpravě však dospějeme ke známému vyjádření funkce sinus polovičního úhlu. I přes nezvyklé značení lze poměrně snadno rozpoznat vzorce pro sinus a kosinus součtu, resp. rozdílu dvou úhlů, resp. dvojnásobného úhlu.

Následují *Dsky poměročtů, přístaw, styčných a dotyčných* [Tabulky logaritmů, sinů, tangent a cotangent] (s. 200–228), k nimž je na předchozích stranách (s. 189–199) podáno vysvětlení, které zahrnuje stručný populární výklad logaritmů. Je ukázáno jejich využití při násobení, dělení, mocnění a odmocňování. Pro tabulky zvolil Sedláček $r = 1\,000$.

Tabulky mají pět sloupců. V prvním jsou přirozená čísla od 1 do 1 000, ve druhém jejich dekadické logaritmy. Ve třetím, čtvrtém a pátém sloupci jsou uvedeny velikosti úhlů (ve stupních a minutách), jejichž tisícinásobek hodnoty funkce sin, tg a cotg je v prvním sloupci. Tedy např. řádek

$$\| \quad 100 \quad | \quad 2{,}00000 \quad | \quad 5°45' \quad | \quad 5°43' \quad | \quad 84°17' \quad \|$$

udává, že dekadický logaritmus čísla 100 je 2,00000 a že (v naší symbolice)

$$1000 \cdot \sin 5°45' \doteq 100, \quad 1000 \cdot \operatorname{tg} 5°43' \doteq 100, \quad 1000 \cdot \operatorname{cotg} 84°17' \doteq 100.$$

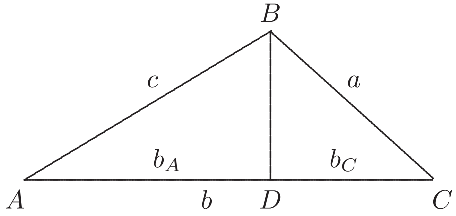
Pomocí trigonometrických funkcí jsou dále popsány vztahy mezi jednotlivými prvky pravoúhlého trojúhelníku, později jsou uvedena tvrzení týkající se obecného trojúhelníku, např. sinová věta. Jedna z dalších vět prezentuje zajímavé tvrzení, které lze při označení z následujícího obrázku vyjádřit vztahem

$$\frac{b}{a+c} = \frac{a-c}{b_C - b_A}.$$

Jednoduchou úpravou odtud získáme rovnost

$$c^2 + b \cdot b_C = a^2 + b \cdot b_A,$$

kterou lze považovat za zobecnění Pýthagorovy věty: součet obsahů čtverce nad stranou a a obdélníku se stranami b, b_A je roven součtu obsahů čtverce nad stranou c a obdélníku se stranami b, b_C.[15] Pokud bod C splyne s bodem D, bude trojúhelník ABC pravoúhlý a předchozí vztah přejde v rovnost $a^2 + b^2 = c^2$.



V řadě prakticky zaměřených úloh je třeba na základě měření úhlů a vzdáleností určit výšku nějakého objektu, k němuž se lze přiblížit, resp. výšku mračen,[16] resp. výšku objektu, k němuž se nelze přiblížit, vzdálenost dvou míst, z nichž jedno je nepřístupné, resp. obě jsou nepřístupná apod. Cílem dalších úloh je (za různě stanovených podmínek) vytvořit obraz terénu (mapu), stanovit výšku hory, zjistit vzdálenost Měsíce od Země, pomocí tlakoměru zjistit výšku věže nebo hory, pomocí vodováhy vyměřit mírnou vyvýšeninu či spád vodního toku apod.

5. Stereometrie

Čtvrtá kapitola nejprve podává výklad úvodních stereometrických pojmů a zavádí české termíny. Objevil se zde například pojem *tělesný úhel*, ukázán byl jeho vztah k *ploským*, tj. rovinným úhlům, které jej ohraničují:

Uhel tělesný … gest, gegž působj sběh několika ploských uhlů. ([X-33], s. 291)

Auhrn neboli saučet vssech ploských uhlů, kteřj působj tělesný uhel, vždycky musý méně obnášeti, nežli 4 *přjmj uhlowé, méně nežli* 360°. ([X-33], s. 301)

Po definici mnohostěnu, pravidelného a nepravidelného mnohostěnu je v další větě na základě předchozí věty dokázáno, že existuje právě pět pravidelných mnohostěnů.

Následující partie je věnována problematice povrchů hranolu, válce, jehlanu, komolého jehlanu, kužele, komolého kužele, koule a pravidelných mnohostěnů. Zajímavá jsou konstatování, že zatím neumíme vypočítat povrch pláště šikmého válce, resp. kužele, neboť zatím neumíme vypočítat obvod elipsy:

---

[15] Řadu zobecnění Pýthagorovy věty najde čtenář v článku [BD].

[16] Půvabně začíná popis řešení této úlohy: *Neywětssj těžkost zde činj hýbánj se mračen, tjm samým musý se wywoliti mračna při tichém powětřj.* ([X-33], s. 234).

Pobočnj powrchnost nakloněného kužele z prawidel nižssjho měřictwj až posawáde nelze nalezti. ([X-33], s. 313)

Nejzajímavější partií je výpočet povrchu koule infinitesimálním postupem:

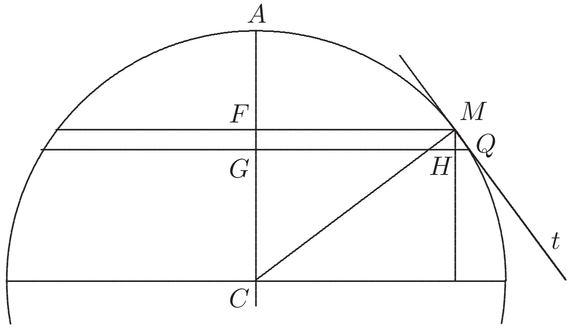
… wypočjtáme okolek neywětssjho kruhu, … a ten … umnožjme průměrem kaule. ([X-33], s. 314)

Ukážeme Sedláčkův postup v moderním „překladu“ na jeho mírně modifikovaném obrázku č. 281, na němž je řez koulí – C je její střed, $r = CM$ její poloměr. Představíme si, že povrch koule sestává z plášťů nekonečně mnoha komolých kuželů – jeden z nich je znázorněn na obrázku. Jeho nekonečně malá výška je FG, povrch jeho pláště je $S_{FG} = 2\pi \cdot FM \cdot MQ$.

Uvažujme tečnu t s dotykovým bodem M. Z podobnosti trojúhelníků FMC a HMQ dostáváme

$$MQ : HM = MC : FM, \quad \text{neboli} \quad MQ = \frac{HM \cdot MC}{FM} = \frac{FG \cdot r}{FM}.$$

Dosazením vypočtené hodnoty získáme $S_{FG} = 2\pi r \cdot FG$. Sečteme-li nyní povrchy plášťů všech dílčích kuželů přes všechny nekonečně malé výšky FG, které dohromady dávají průměr koule, dostaneme povrch celé koule, tedy $S = 4\pi r^2$.



Zajímavá je následující „kubistická“ poznámka:

Tělo člowěka gest složeno z rozličných částek, z nichž některé magj podobu wálce, giné kužele, kaule a t. d. Celá powrchnost člowěka postřední welikosti držj w sobě asy 12 čtwerečných střewíců, tedy tjžka, kterou wzduchowý obor [atmosféra] *na tělo člowěka aučinkuge, gest skoro* $1664 \times 12 = 21168$ *liber, aneb* 211 *centnéřů* 68 *liber.* ([X-33], s. 319)

Další partie je věnována objemům těles. Nejprve je popsán výpočet objemu rovnoběžnostěnu, následuje věta, která říká, že rovnoběžnostěny, ať kolmé nebo šikmé se stejnou základnou a výškou mají stejný objem. Zdůvodnění spočívá na představě tělesa složeného z tenkých vrstev. V důsledku je uvedeno, že se totéž týká hranolů, válců, jehlanů a kuželů. Výpočet objemu válce je opět založen na představě hranolu s nekonečně mnoha stěnami:

Wálec přjmý bez toho nic giného nenj, nežli hranol, gehož spodina gest kruh (*řádný mnohohran, gehož obwod z nesčíslně mnohých nekončeně malých stegných stran složený*), *a gehož pobočnj powrchnost záležj w nesčjslně mnohých nekončeně malých rownoběžnjcých a t. d. … Tedy tělesnost wálce obdržj se gako každého giného přjmého hranolu.* ([X-33], s. 328–329)

V následujícím je dokázáno, že každý trojboký hranol je možno rozdělit na tři jehlany stejného objemu, a tedy je objem trojbokého jehlanu roven třetině objemu odpovídajícího hranolu.[17] Důsledkem je stanovení objemu kužele a komolého kužele.

Krátká poznámka je věnována objemu sudů – objem sudu lze aproximovat objemem dvou komolých kuželů se společnou základnou.

Objem koule je vypočten na základě znalosti jejího povrchu. Koule je představena jako soubor nekonečně mnoha kuželů s nekonečně malou základnou na povrchu koule a vrcholem v jejím středu. Velikost jejího povrchu je tedy třeba vynásobit velikostí poloměru a dělit třemi. Následující důsledky popisují výpočet objemu kulové výseče, úseče a kulového pásu. Objem výseče je jistým dílem objemu koule, podle poměru povrchu základny k povrchu koule. Objem úseče získáme jako rozdíl objemu příslušné výseče a odpovídajícího kužele. Objem pásu získáme jako rozdíl objemů dvou úsečí.

Sedláček uvedl srovnání dvou koulí o průměrech M a m – jejich povrchy jsou v poměru $M^2 : m^2$, jejich objemy v poměru $M^3 : m^3$. Uvedl, že pro „běžný život“ je dobré si pamatovat následující poměry: průměr kruhu k jeho obvodu 100 : 314, čtverec průměru kruhu k jeho obsahu 14 : 11, čtverec průměru koule k jejímu povrchu 14 : 44, trojmoc průměru koule k jejímu objemu 300 : 157.

Objemů se týkají i následující krásné výsledky:

- Mají-li válec a kužel stejný průměr základny, který je zároveň roven jejich výškám, a má-li koule týž průměr, potom je poměr jejich objemů (válce, koule a kužele) 3 : 2 : 1.[18]
- Je-li do rovnostranného kužele (průměr základny je roven výšce) vepsána koule a kouli opsán válec, je poměr objemů kužele, válce a koule 9 : 6 : 4.

S objemem tří pravidelných těles (čtyřstěn, šestistěn a osmistěn) není problém. Objem pravidelného dvanáctistěnu, resp. dvacetistěnu je dvanáctinásobkem, resp. dvacetinásobkem objemu příslušného pětibokého, resp. trojbokého jehlanu.

Objem nepravidelných těles lze zjistit ponořením do vody (písku) v nějaké nádobě a zjištěním odpovídajícího objemu vyteklé / vytlačené vody (písku). Rovněž je možno objem zjistit zvážením, známe-li váhu objemové jednotky

[17] Připomeňme v této souvislosti příspěvek [Ha].

[18] Sedláček na tomto místě připomíná Archiméda, historku o jeho hrobu a jeho nalezení Ciceronem ([X-33], s. 340). Poměr 3 : 2 : 1 s příslušným obrázkem si Sedláček roku 1817 dal zachytit na svůj portrét, jehož autorem je Ferdinand von Lütgendorff. O portrétu viz jedna z následujících kapitol.

daného materiálu. Sedláček uvedl v librách a lotech váhy *kostečných střewjců* vzduchu, vody, čerstvého dubového, olšového, resp. habrového dříví, ryzího zlata, ryzího stříbra a stavebního kamene. Objem dutých těles je vypočten jako rozdíl plného tělesa a dutiny.

V závěru kapitoly jsou řešeny otázky zjištění poměru objemů, resp. povrchů podobných těles, otázka stanovení strany krychle stejného objemu jako má nějaké dané těleso, zjištění poloměru válce, který má dvojnásobný objem, ale stejnou výšku jako jiný válec, průměru koule, která má dvojnásobný či trojnásobný objem jako daná koule, objem sudů apod. Je třeba zdůraznit, že se jedná o výpočty, nikoli konstrukce. Proto je v této partii obsažen podrobný výklad algoritmu výpočtu třetí odmocniny.

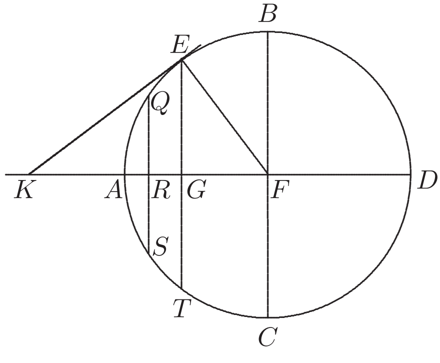
6. Kuželosečky

V páté kapitole Sedláček zavedl osobitým způsobem kuželosečky jako řezy kolmého kužele; uvažoval pět (nepřesně vymezených) typů řezů:

- řez rovinou procházející vrcholem kužele, která je kolmá k podstavě kužele (řezem je rovnoramenný trojúhelník),
- řez rovinou kolmou k ose kužele (řezem je kružnice),
- řez rovinou rovnoběžnou s nějakou površkou kužele (řezem je parabola),
- řez rovinou, která není kolmá k ose kužele (řezem je elipsa),
- řez rovinou, která je kolmá k podstavě kužele (řezem je hyperbola).

Uvedl české termíny a připojil jejich latinské ekvivalenty: *troghran/troguhelnjk stegnoramenný* (triangulum aequicrurum), *okolek kruhu* (peripheria), *stegnice* (parabola), *schodnice* (ellipsis), a *zbytnice* (hyperbola). V úloze *Wyreysowati nástrogně* (*neboli řemeslnicky*) *řezy kuželné* ukázal metody konstrukce kuželoseček. První dva případy jsou triviální, zbývající tři jsou řešeny „mechanickými“ prostředky: *… přiwáže se gednjm koncem nit neboli prowazec …*, resp. *… se wezme nit neb prowazec …*, resp. *… do bodů F a G se zatlukau hřebjky neb koljky …* ([X-33], s. 369–370) atd.

Přístup k problematice kuželoseček ukázal Sedláček nejprve pro kružnici na obrázku č. 301, který je zde překreslen.



ohnisko (focus) F

wrchol (vertex) A, D

osa (axis) AD

odřezek (abscissa) $AG, AR, \ldots$

přjčka (ordinata) $EG, QR, \ldots$

průwodce (radius vector) FE

styčná (tangens) EK

podstyčná (subtangens) KG

Při označení $FD = r$, $AG = \xi$, $FG = x$, $EG = y$, $KG = s$ odvodil Sedláček následující vztahy:

$$y^2 = 2r\xi - \xi^2, \qquad y^2 = r^2 - x^2, \qquad s = \frac{r^2}{x} - x.$$

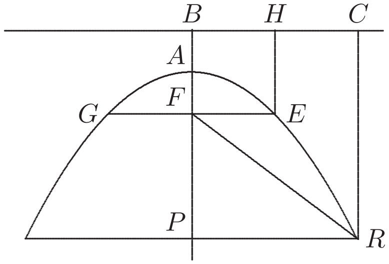
Uvažoval tedy dva kartézské systémy souřadnic – souřadnice s počátkem A (souřadnice ξ, y) a souřadnice s počátkem F (souřadnice x, y).

I když kuželosečky zavedl jako řezy kuželem (tělesem), parabolu definoval zcela exaktně:

Stegnice gest čára křiwá, která tu wlastnost do sebe má, že každý bod té křiwky stegnau wzdálenost má od něgaké dané zewnitř křiwky položené přjmky, pak od něgakého v wnitř křiwky položeného bodu, ... ([X-33], s. 374)

Sedláček pak řešil některé úlohy, například sestrojit parabolu, je-li dána řídící přímka a ohnisko, vést tečnu k parabole v některém jejím bodu, resp. z vnějšího bodu. Rovněž dokazoval některá tvrzení, například, že vzdálenost ohniska od vrcholu je stejná jako vrcholu od řídící přímky, že subtangenta je půlena vrcholem paraboly apod.

S pomocí Pýthagorovy věty pro trojúhelník FRP odvodil rovnici paraboly (v kartézské soustavě s počátkem A) – viz následující obrázek, který je jen mírnou modifikací Sedláčkova obrázku č. 307.



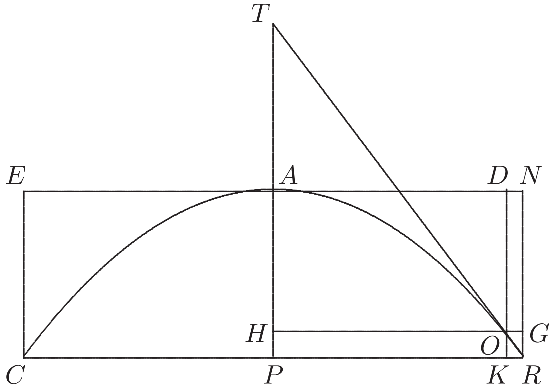
$EG = m,\ AB = AF = \frac{m}{4}$

$AP = x,\ PR = y$

$FR = RC = x + \frac{m}{4},\ FP = x - \frac{m}{4}$

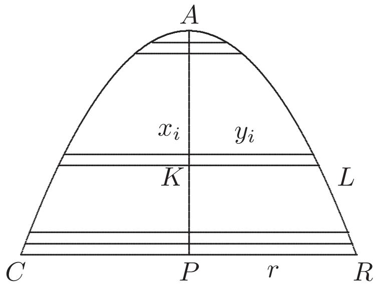
$y^2 = \left(x + \frac{m}{4}\right)^2 - \left(x - \frac{m}{4}\right)^2 = mx$

Sedláček dále vypočetl obsah parabolické úseče vymezené tětivou kolmou k ose: je roven dvěma třetinám součinu tětivy CR a výšky úseče PA. Jeho postup ukážeme na následujícím obrázku, který je modernizovaným obrázkem č. 310. Na něm je TR tečna k parabole v bodě R.



Trojúhelníky TRP a ORK jsou podobné, proto je $TP : PR = OK : KR$ neboli $TP \cdot KR = OK \cdot PR$. Protože je $TP = 2AP$ (plyne z vlastností paraboly a její tečny), je $2 \cdot AP \cdot KR = OK \cdot PR$. Obsah obdélníka $HPRG$ je tedy dvojnásobkem obsahu obdélníku $DNRK$. Při infinitesimálním přístupu odtud plyne, že obsah části úseče paraboly APR je dvojnásobkem obsahu jejího doplňku ARN v obdélníku $APRN$. Obsah parabolické úseče je tedy roven dvěma třetinám obsahu obdélníku $ECRN$.

Sedláček rovněž definoval *stegničnjk* (paraboloides) jako objekt, který vznikne rotací paraboly kolem její osy. Vypočetl objem parabolického vrchlíku vymezeného řezem kolmým k ose: obsah kruhové základny je třeba vynásobit polovinou výšky vrchlíku. Ukázal to následujícím infinitesimálním postupem (viz následující obrázek, který je modifikací Sedláčkova obrázku č. 311). Představil si, že je vrchlík paraboloidu složen z mnoha vrstviček – tenkých, stejně vysokých válců. Jejich objemy jsou v poměru čtverců poloměrů jejich základen (y_i^2), a tyto čtverce poloměrů jsou od nejmenšího k největšímu v poměru jejich vzdáleností od vrcholu vrchlíku (x_i), tvoří tedy aritmetickou posloupnost. Její první člen je nulový, poslední člen je roven výšce vrchlíku. Pokud všechny tyto infinitesimální vrstvičky sečteme, dostaneme obsah podstavy vrchlíku vynásobený polovinou jeho výšky.



$PR = r,\ PA = v$

$AK = x,\ KL = y$

$y^2 = mx, \quad x_1 : x_2 = y_1^2 : y_2^2$

$r^2 = mv$

$V = \pi r^2 \cdot \frac{v}{2}$

Označíme-li výšku infinitesimálních válcových vrstviček $\triangle v$, můžeme v naší symbolice Sedláčkovu úvahu vyjádřit takto:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \cdot \triangle v = \pi \cdot \triangle v \cdot m \sum_{i=1}^{n} x_i = \pi \cdot \triangle v \cdot m \cdot \frac{v}{2} \cdot n = \pi \cdot mv \cdot \frac{\triangle v \cdot n}{2} = \pi r^2 \cdot \frac{v}{2}$$

V následujících partiích se Sedláček věnoval elipse obdobným způsobem jako parabole. Ukázal vztahy mezi osami a excentricitou, konstruoval tečny k elipse v bodu elipsy a z bodu mimo elipsu. Infinitesimálním postupem odvodil obsah elipsy (v našem pojetí $\frac{1}{4}\pi mn$, kde m, n je velká a malá osa). Elipsoid [*stejničnjk* (ellipsoides)] zavedl pomocí rotace elipsy kolem osy a vypočetl jeho objem $\frac{1}{6}\pi mn^2$. Obdobná témata řešil i pro hyperbolu, ale věnoval jim již menší pozornost.

7. Terminologie

Sedláček se ve svých učebnicích snažil vytvořit chybějící českou odbornou terminologii. Bral v úvahu starší české termíny, mnohé však kritizoval. Tvorbu nových termínů konzultoval s českými vzdělanci, s Josefem Jungmannem, Janem Svatoplukem Preslem a řadou dalších. Byl si dobře vědom toho, že některé termíny, které zvolil, nemusí být úspěšné. Mnohé z termínů, které zavedl, používáme dodnes, někdy jsou jen mírně modifikované, některé se neujaly. Pavel Josef Šafařík, který v únoru roku 1823 Sedláčkovu učebnici geometrie ocenil, se k procesu tvorby českých termínů vyjádřil optimisticky:

Nepodařjli se ráz každého slowa po prwé, podařj se po druhé, a nepodařjli se po druhé, podařj se po třetj, a naposledy se gen předce podařj.[19]

Sedláček zařadil za poslední kapitolu své učebnice slovníček nazvaný *Wysvětlenj významů matematických, w této knize obsažených* (s. 410–420), v němž je vždy za českým termínem uveden jeho latinský a německý ekvivalent, u něhož je někdy uveden určitý, někdy neurčitý člen, někdy člen uveden není, někdy je uveden zkratkou, která žádnou informaci nenese:

Bod, punctum, ein Punkt

Kořen, radix, die Wurzel

Lichoběžnjk, trapezium, ein Trapezium

Wrchol, vertex, d. Scheitel, d. Spitze

Podobnítko ($\backsim$)*, signum similitudinis, Zeichen der Aehnlichkeit*

Požádánj, postulatum, Forderung

Sáh, hexapeda, d. Klaster

8. Přídavek

Sedláčkova učebnice geometrie končí krátkou poznámkou nazvanou *Přjdawek k wýkonnému měřictwj ...* ([X-33], s. 408–409), v němž Sedláček uvedl svoji zajímavou zkušenost s nabídkou bavorského *měřiče a práwnjka* Prantla, který za 1 zlatých a 30 krejcarů ve stříbře prodával „tajemství“ na určení obsahu každého rovinného obrazce. Sedláček tento obnos zaplatil a obratem příslušný návod získal. Domníváme se, že se při popisu této události projevil Sedláčkův smysl pro humor:

Nesmjrnau zwědawostj puzen w tu chwjli gsem na posstu chwátal, a penjze z pjsemným požádánjm o zgewenj takowého tagemstwj ... zaslal, načež gsem dne 24. ledna 1818 následugjcý rozhodnutj obdržel, které swým drahým wlastencům tuto z d a r m a poskytugi ... ([X-33], s. 408)

Prantlovo tajemství určení obsahu rovinného útvaru spočívalo v tom, že se útvar přesně překreslil na papír, obrys se přenesl na olověný list, z něhož se „shodný útvar“ vyřezal a zvážil ... Sedláček toto pikantní téma uzavřel takto:

[19] Viz první díl Sedláčkovy knihy *Základowé Přjrodnictwj* [X-41], s. viii.

Co o takowémto řemeslnickém hledánj a trmácenj smeyssleti, každému důwtipnému Čechu k posauzenj zanechávám, a giž nynj gesstě gedenkráte do lásky a paměti wssech vpřjmných wlastenců se odporaučege, swé Měřictwj skončugi. ([X-33], s. 409)

9. Závěr

Sedláčkova učebnice geometrie vydaná před dvěma sty lety předběhla dobu téměř o čtyři desetiletí. Nemohla se bohužel příliš rozšířit a získat ohlas, jaký by si zasloužila. Tehdy totiž v našich zemích neexistovala žádná střední ani vysoká škola, na níž by se matematika vyučovala česky. Příznivě přijata byla Janem Nejedlým, univerzitním profesorem českého jazyka, básníkem, překladatelem a advokátem, o jejím vydání informoval i odborný tisk.[20] Jak je výše uvedeno, ocenili ji Josef Jungmann a Pavel Josef Šafařík.

Jan Svatopluk Presl, lékař, univerzitní profesor dějin přírodních věd a zoologie, autor řady přírodovědeckých děl, tvůrce českého přírodovědného a technického názvosloví a člen řady vědeckých spolků, uvedl v předmluvě své knihy *Obssjrné prostonárodnj naučenj o řemeslech a umělostech* [Pre2] Sedláčkovy učebnice matematiky a fyziky, Vydrovu aritmetiku, svoji učebnici chemie, Šírovu učebnici přírodopisu, Filcíkovu učebnici přírodopisu a Kuklovo počtářské umění mezi důležitými spisy *k poučenj prostonárodnjmu*.

Nepodařilo se zjistit, do jaké míry Sedláček svoji geometrii užíval při výuce v Plzni, neboť matematiku učil latinsky nebo německy. Výuka odborných předmětů v českém jazyce začala na českých středních a vysokých školách až v šedesátých letech 19. století a prosazovala se velmi pomalu. Teprve v té době byly sepisovány první české učebnice středoškolské a vysokoškolské matematiky; vytvářeny byly hlavně podle německých, francouzských či italských vzorů.[21]

Sedláčkova učebnice byla brzy více méně zapomenuta, noví autoři na ni prakticky nenavazovali. Odkazovali se na ni jen výjimečně – např. Antonín Jeřábek (*Základové měřictví*, 4. vydání, Praha, 1893) a Karel Domin (*Stručná methodika měřictví*, Praha, 1907, *Geometrie pro ústavy učitelské*, 8. vydání, Praha, 1923). Sedláčkova geometrie však byla zmíněna ve studiích o historii naší matematiky. Ocenili ji například František Josef Studnička (1836–1903) v publikaci *Památník na oslavu padesátiletého panovnického jubilea jeho veličenstva císaře a krále Františka Josefa I.* [Stu2] z roku 1898 a autoři hodnotící národní obrození, vývoj českého jazyka a literatury – např. Karel Tieftrunk, František Bačkovský, Václav Flajšhans, Miloslav Dvořák, Karel Hikl, Albert Pražák a Jan Jakubec. Teprve v novější době byl hodnocen Sedláčkův význam pro vznik matematické terminologie (viz [Ků] a [Kli]) a pro počátky výuky analytické geometrie v našich zemích (viz [Láv2]).

[20] Viz [18] a [16].

[21] O vzniku, vývoji a proměnách českých učebnic matematiky ve druhé polovině 19. století viz [Bč4].

Kniha Jana Janka a Soni Štrbáňové *Věda Purkyňovy doby* [JŠ] oceňuje Sedláčkův přínos ke vzniku české matematické a fyzikální terminologie, všímá si též Sedláčkova pohledu na vzdělávání a osvětu.

Profesor na plzeňském gymnáziu a filozofickém ústavu, premonstrát J. V. Sedláček, sepsal ve 20. letech učebnice fyziky a matematiky. Sedláčka hluboce ovlivnil B. Bolzano, jehož přednášky navštěvoval jako student filozofické fakulty v Praze. U kolébky Sedláčkova Měřictví stála Bolzanova idea osvěty. V duchu těchto ideálů se stal Sedláček průkopníkem zakládání českých lidových knihoven a čtenářských spolků, neboť kniha byla v jeho představách zárukou obecné osvěty lidových vrstev. Zřetelný vliv Bolzana, Komenského i švýcarského pedagoga Pestalozziho se promítá do Sedláčkových metodických pokynů, jak dospět k hlubšímu pochopení látky a vnitřních souvislostí studovaných jevů a jak prolomit vžitou bariéru bezduchého memorování a naučit se tvůrčímu přístupu k látce.

Sedláček nebyl mezi mimopražskými středoškolskými učiteli ojedinělým, i když jistě vynikajícím zjevem. ([JŠ], s. 115)

Janko a Štrbáňová stručně připomněli vývoj české přírodovědné literatury a zařadili Sedláčkovy učebnice do širších vývojových trendů (viz [JŠ], s. 107–114, 114–121).