Konstrukce v omezené nákresně

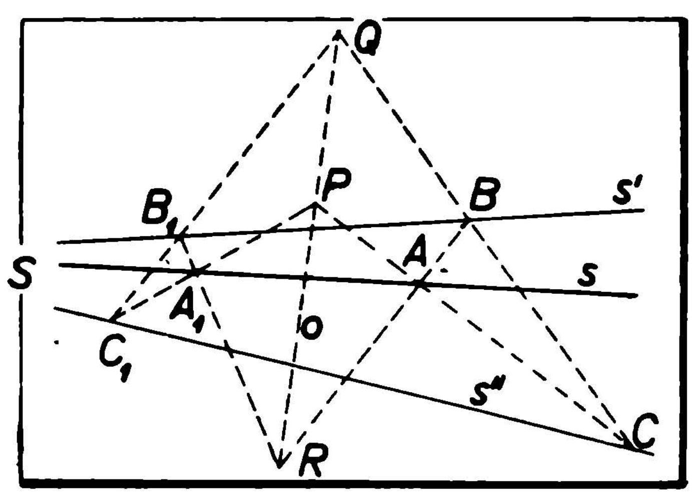
In: Václav A. Hruška (author): Konstrukce omezenými prostředky a geometrické aproximace. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1940. pp. 14–31.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405492

2.

KONSTRUKCE V OMEZENÉ NÁKRESNĚ.[1])

2,1. Nedostupné body a přímky. A. Bod A na omezené nákresně jest spojiti s nedostupným průsečíkem S přímek s' a s'' (obr. 4). Řešení této úlohy bylo již naznačeno v odst. 1,3. Výhodnější však je užíti k tomu t. zv. Desarguesovy konfigurace.



Obr. 4. Spojiti bod A s nedostupným průsečíkem přímek $(s', s'') \equiv S$. (Desarguesova konfigurace.)

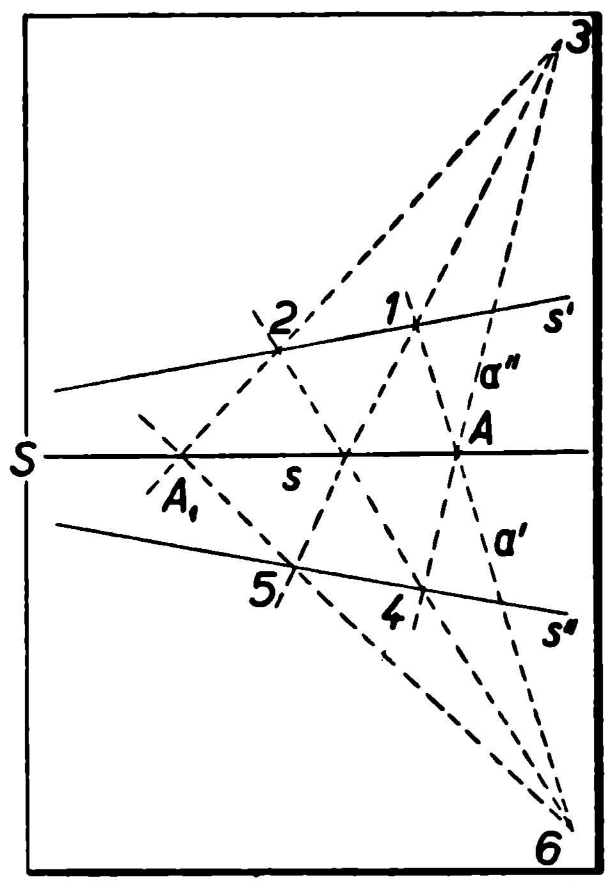
Sestrojme trojúhelník ABC, jehož jedním vrcholem je daný bod A a jehož ostatní dva vrcholy leží resp. na přímkách s' a s''. Zvolme osu o a sestrojme trojúhelník $A_1B_1C_1$, jehož vrcholy B_1 a C_1 leží resp. také na s' a s'' a jehož strany se protínají na o s odpovídajícími stranami trojúhelníka ABC (tedy na př. B_1C_1 protne BC v bodě Q atd.). Hledaná spojnice $s \equiv SA$ prochází pak také bodem A_1.

---

1) A. Adler, cit. kap. 1, pozn. 4); F. Redl, Constructions de planimétrie. Solutions nouvelles de problèmes compliqués par des conditions particulières. (L'Enseignement mathématique, t. XII, 1910, str. 293—310); Th. Vahlen, Konstruktionen und Approximationen (Leipzig, 1911); A. Witting, Geometrische Konstruktionen, insbesondere in begrenzter Ebene (Pro gr. d. Gymn. zum hlg. Kreuz, Dresden, 1899); P. Zühlke, Konstruktionen in begrenzter Ebene (Math.-Physik. Bibl., sv. 11).

Aby konstrukce zůstala celá na nákresně a abychom se vyhnuli spojnicím, určeným příliš blízkými body a tedy nepřesným, doporučuje se vycházeti z vhodně voleného bodu Q. Veďme jím osu o a přímky QBC a QB_1C_1 tak, aby A byl mezi o a QBC a aby také průsečíky R a P stran AB a AC s osou o padly na nákresnu. Doplněná konfigurace, která poskytuje bod A_1, zůstane pak na nákresně. Ke konstrukci stačí jediné pravítko.

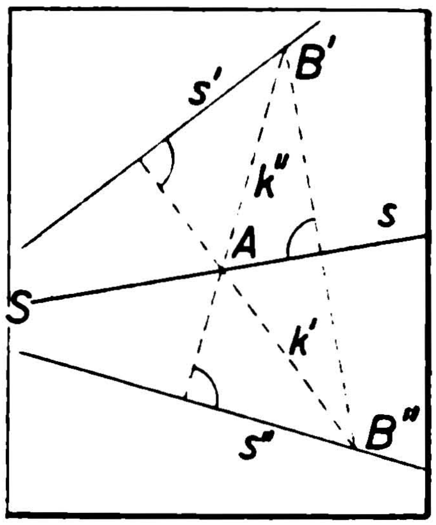
Volíme-li osu o v nekonečnu, strany trojúhelníka ABC a trojúhelníka $A_1B_1C_1$ jsou rovnoběžné a oba trojúhelníky stejnolehlé (homothetické) podle středu S. Naše konstrukce přejde u této úlohy v řešení známé ze střední školy. Nevýhodou tohoto „zjednodušení“ konstrukce jest nutnost vedení rovnoběžek, což je operace málo přesná, zvláště, jsou-li rovnoběžky od sebe značně vzdálené. Mimo to ke konstrukci jest pak zapotřebí kromě pravítka ještě kružítka nebo kreslicího trojúhelníka.



Obr. 5. Spojiti bod A s nedostupným průsečíkem přímek $(s', s'') \equiv S$. (Užitím Pascalovy věty).

Úlohu však lze řešiti i jinými konstrukcemi, na příklad Pascalovou větou v kuželosečce degenerované ve dvě přímky *1*; *3*; *5* a *2*; *4*; *6* (obr. 5). Bodem A veďme přímky a', a'' tak, aby protaly přímky s' a s'' na nákresně v bodech $1 \equiv (s', a')$, $4 \equiv (s'', a'')$. Zvolme na a' a a'' body *3*, *6* a označme průsečíky: $2 \equiv (s', 46)$ a $5 \equiv (s'', 13)$. Na Pascalově přímce s leží body $S \equiv (12, 45) \equiv (s', s'')$,

$A \equiv (34, 61)$, $A_1 \equiv (23, 56)$ a jest to tedy hledaná spojnice AS. Velmi výhodné je voliti body 3 a 6 v nekonečnu. Podobně by bylo možno užíti k této konstrukci věty Brianchonovy v kuželosečce degenerované ve dva svazky paprsků (viz Zühlke, cit. str. 10).



Obr. 6. Spojiti bod A s nepřístupným průsečíkem přímek $(s', s'') \equiv S$. (Užitím výšek trojúhelníka.)

Ještě jiné řešení úlohy podává věta, že výšky trojúhelníka se protínají v jednom bodě (obr. 6). Z A spustíme kolmice k' a k'' na s' a s'' a označíme $B'' \equiv (k', s'')$ a $B' \equiv (k'', s')$. Pak je spojnice $s \equiv AS$ kolmá na $B'B''$.

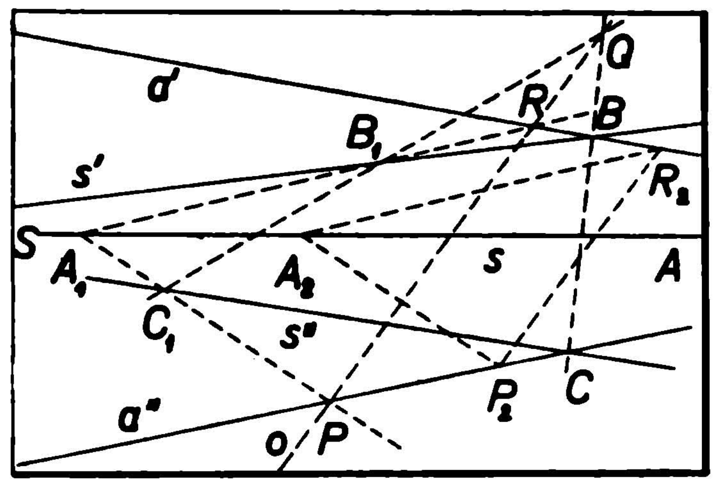
B. Veškeré body spojnice dvou nedostupných bodů mohou padati mimo nákresnu. Pak říkáme, že ona spojnice je nedostupná. Část spojnice takových dvou nedostupných bodů však může také padnouti na nákresnu. Jest sestrojiti, pokud existuje, dostupnou část takové spojnice dvou nedostupných bodů $A \equiv (a', a'')$ a $S \equiv (s', s'')$.

Zvolme vhodně B na s' a C na s'' a spojme je s A. Padnou-li průsečíky (s', a') a (s'', a'') na nákresnu jako v obr. 7, volíme je přímo za B a C. V opačném případě užijeme k sestrojení spojnic BA a CA některé z konstrukcí v uvedených pod A. Konstrukcí podle obr. 4 sestrojíme nyní na nákresně bod A_1 na spojnici AS, který spojíme opět podle A s nedostupným bodem A nebo S (na př. v obr. 7 užitím $\triangle A_1PR \sim A_2P_2R_2$).

Jiné řešení podává konstrukce popsaná v odst. 1,3 (obr. 3), zvolíme-li čtyrroh $CDEF$ na nákresně tak, aby také H byl dostupný. Jeho spojnice s nedostupným A nebo S je hledanou spojnicí obou nedostupných bodů. Padnou-li zbývající čtyři průsečíky přímek a', a'', s', s'' na nákresnu, jest nejjednodušší voliti je přímo za čtyrroh $CDEF$ jako v obr. 8.

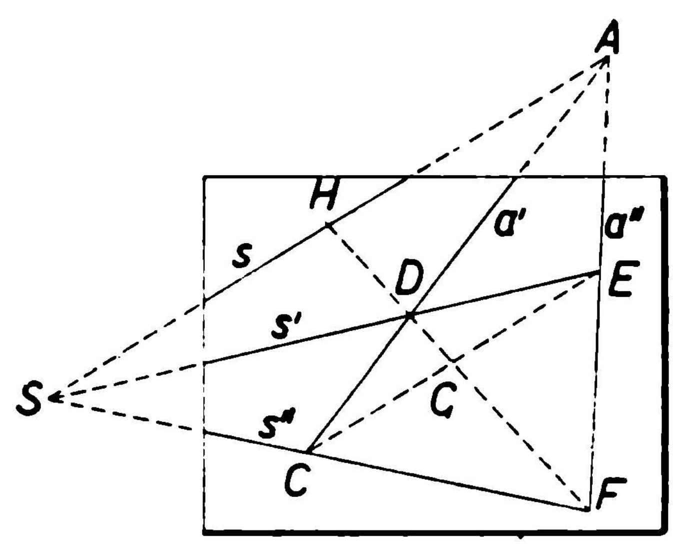
Nedostupným bodem $S \equiv (s', s'')$ vésti rovnoběžku s přímkou a jest speciálním případem předešlé úlohy, padne-li A do nekonečna na a. Lépe však úlohu řešíme spuštěním kolmice z S na libovolnou přímku $k \perp a$ (odst. 2,2 A.)

C. Dosud jsme mlčky předpokládali, že nedostupné body jsou určeny jako průsečíky dvou dostupných přímek. Říkejme jim nedostupné body prvého řádu.



Obr. 7. Sestrojení spojnice s dvou nepřístupných bodů $A \equiv (a', a'')$, $S \equiv (s', s'')$.

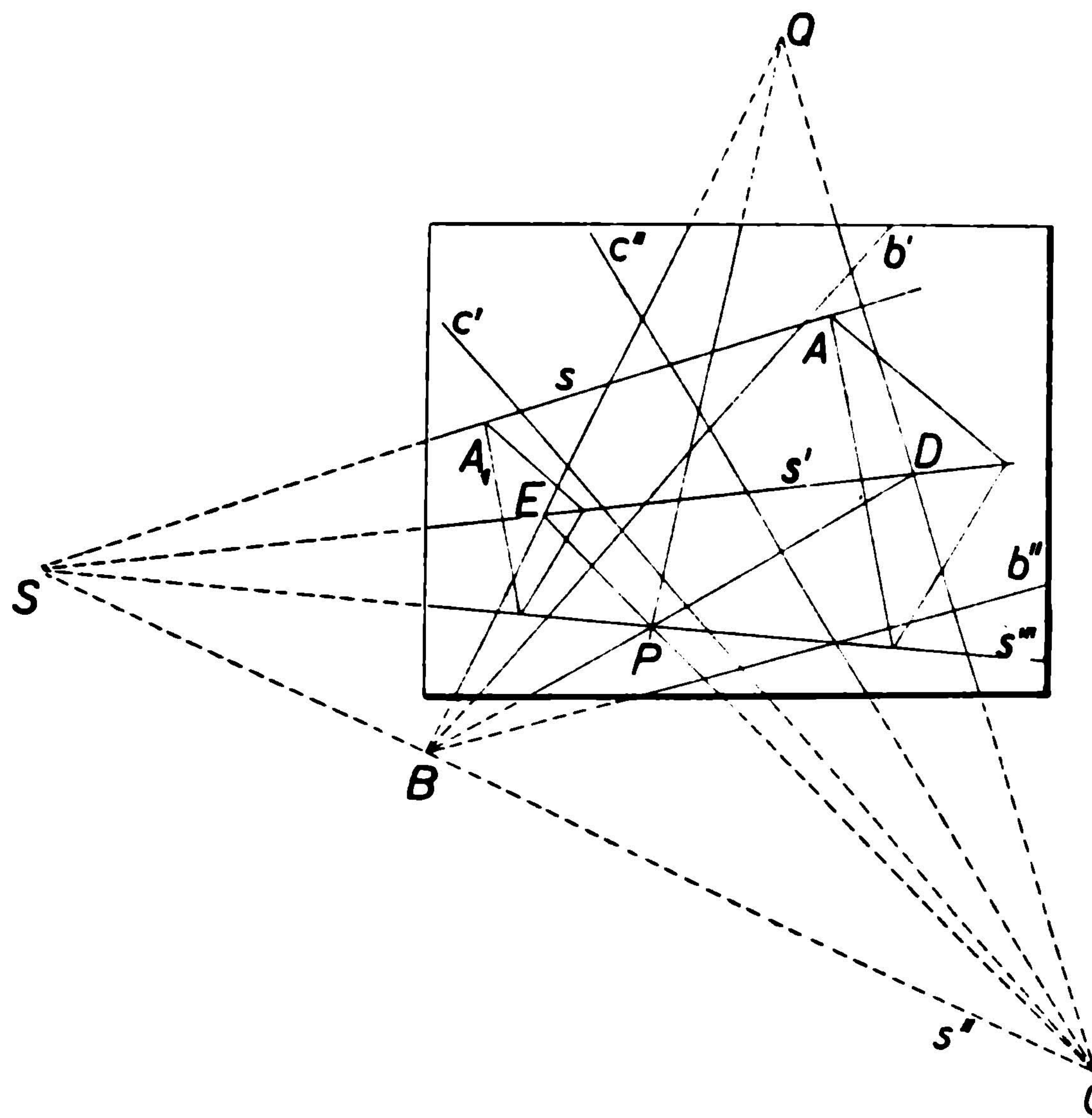
V konstrukcích však může býti bod také průsečíkem přímky dostupné a přímky nedostupné, která sama je určena jako spojnice dvou nedostupných bodů prvého řádu. Nazývejme jej pak nedostupným bodem druhého řádu. Na příklad v obr. 9 je $S \equiv (s', s'')$ takovým nedostupným bodem druhého řádu, jelikož přímka $s'' \equiv (B, C)$ jest sama nedostupná. Body $B \equiv (b', b'')$ a $C \equiv (c', c'')$, jimiž je určena, jsou nedostupné prvého řádu.



Obr. 8. Jiné sestrojení spojnice dvou nedostupných bodů $A \equiv (a', a'')$, $S \equiv (s', s'')$.

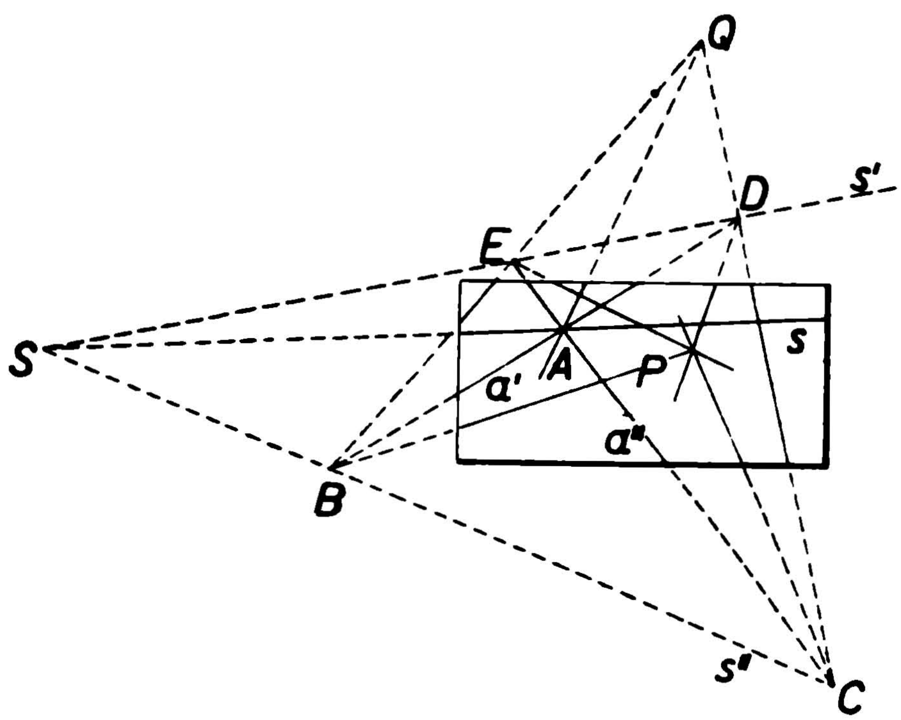
Jest však také možno, že nedostupný bod je dán jako průsečík dvou nedostupných přímek, jako na př. $S \equiv (s', s'')$ v obr. 10. Nazývejme pak S nedostupným bodem řádu třetího.

a) Nejprve sestrojme spojnici s bodu A (obr. 9) s nedostupným bodem druhého řádu $S \equiv (s', s'')$. Na dostupné přímce s' zvolené body E, D spojme podle odst. A s oběma nedostupnými body prvého řádu $B \equiv (b', b'')$,



Obr. 9. Sestrojení spojnice bodu A s nedostupným bodem S druhého řádu.

$C \equiv (c', c'')$, které určují nedostupnou přímku $s'' \equiv BC$. Tato konstrukce však byla v obr. 9 vynechána pro přehlednost. Označme P průsečík spojnic EC a DB a Q průsečík spojnic EB a DC. Volíme-li vhodně body E, D (hlavně navzájem dosti blízko), padne P určitě na nákresnu. Spojme jej s Q, který může být i nedostupný, ale pak nejvýš prvého řádu, jelikož je průsečíkem dostupných přímek EB a DC. V úplném čtyrrohu $BCDE$ tvoří spojnice PE, PD, PQ a PS harmonickou čtveřinu, z níž prvé tři paprsky známe a k nimž tedy čtvrtý $s''' \equiv (PS)$ snadno sestrojíme. Nedostupný bod S je nyní již určen jako průsečík dostupných přímek s' a s''', tedy je nedostupný již pouze prvého řádu. Jeho spojnici

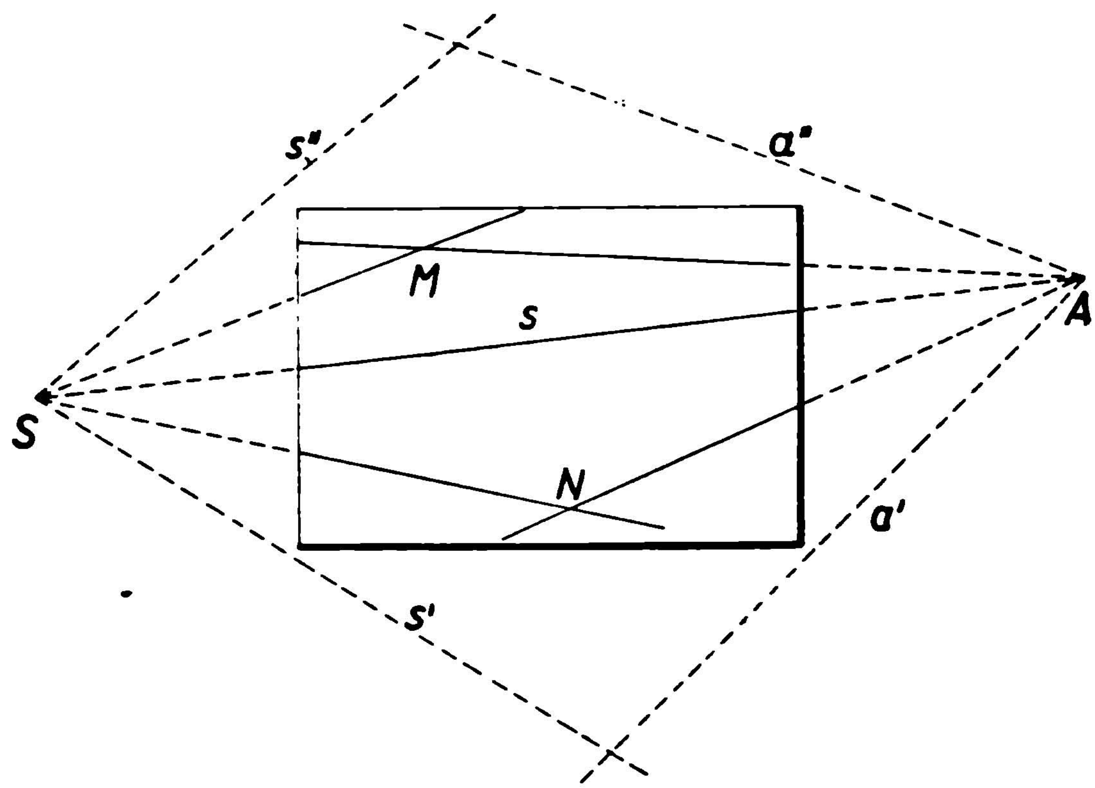


Obr. 10. Sestrojení spojnice bodu A nákresny s nedostupným bodem S třetího řádu.

s A dovedeme vždy sestrojiti, buď podle odst. A, je-li A dostupný, nebo podle odst. B, je-li A nedostupný prvého řádu.

b) Nedostupný bod třetího řádu $S \equiv (s', s'')$ jest spojiti s dostupným bodem A (obr. 10). Bodem A veďme dvě přímky a', a'', jejichž průsečíky $BCDE$ s s'' a s' jsou nedostupné body druhého řádu. Právě popsanou konstrukcí spojme je s libovolně zvoleným dostupným bodem P. Tím jsme body $BCDE$ proměnili v nedostupné body řádu pouze prvého.

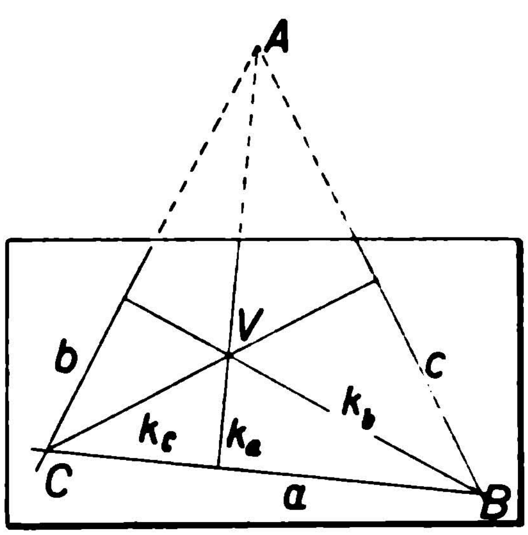
Podle odst. B veďme spojnice BE a CD, které nepadnou zcela mimo nákresnu, jestliže přímky a', a'' byly vhodně vedeny bodem A. Průsečík Q spojnic BE a CD jest tedy nedostupný řádu nejvýš prvého. Spojme jej s A (odst. A). Hledaná spojnice $s \equiv (SA)$ pak je paprsek harmonicky sdružený s AQ vzhledem k a' a a''.



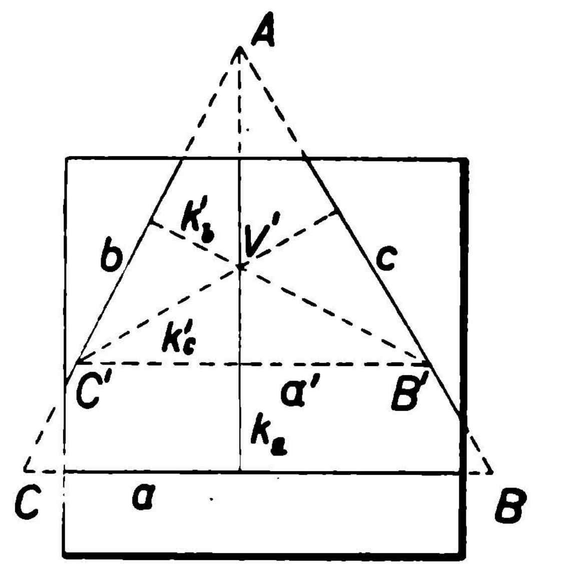
Obr. 11. Rozbor sestrojení spojnice s dvou nedostupných bodů A, S třetího řádu.

c) Nyní můžeme také nakresliti spojnici dvou nedostupných bodů řádu druhého nebo třetího. Na příklad v obr. 11 je naznačeno sestrojení spojnice dvou nedostupných bodů třetího řádu $A \equiv (a', a'')$, $S \equiv (s', s'')$. Na nákresně zvolme dva body M a N a spojme je s A i s S konstrukcí naznačenou v obr. 10. Tím je proměníme v nedostupné body pouze řádu prvého. Jejich spojnici s sestrojíme tedy nyní podle odst. B. V obr. 11 byly vynechány veškeré konstrukce, jichž provedení bylo již dříve vyloženo.

2,2. Metrické úlohy v omezené nákresně. A. Z nedostupného průsečíku A dostupných přímek b a c jest spustiti kolmici k_a na danou dostupnou přímku a.



Obr. 12. Spuštění kolmice k_a na přímku a z nedostupného bodu A prvního řádu.

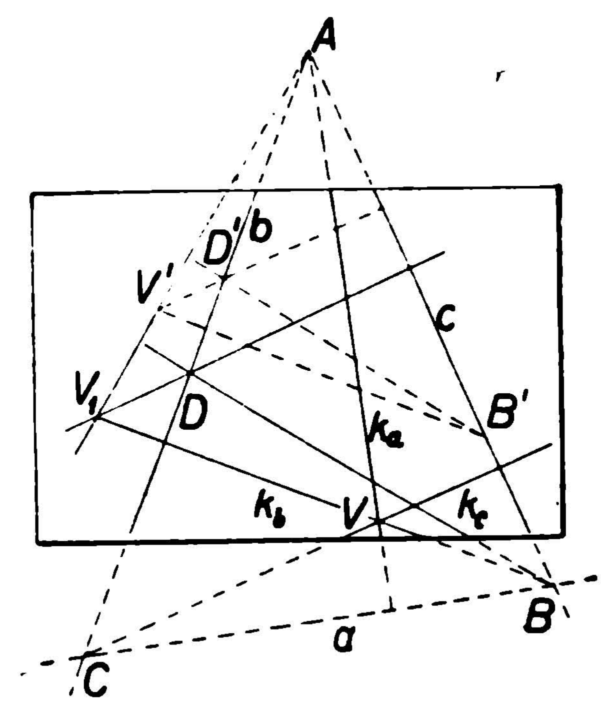


Obr. 13. Alternativa obr. 12, je-li jeden (příp. oba) z bodů B, C nepřístupný.

Užijeme věty, že výšky trojúhelníka, vytvořeného přímkami a, b, c se protínají v jednom bodě V.

a) Jsou-li $B \equiv (a, c)$ a $C \equiv (a, b)$ dostupné (obr. 12), jest sestrojení bodu V zřejmé. Je-li V dostupný, kolmice z něho spuštěná na a je hledanou k_a. Není-li V dostupný, jest nejvýš nedostupný prvého řádu. Hledanou výšku sestrojíme pak jako spojnici $k_a \equiv VA$ podle odst. 2,1 A nebo B.

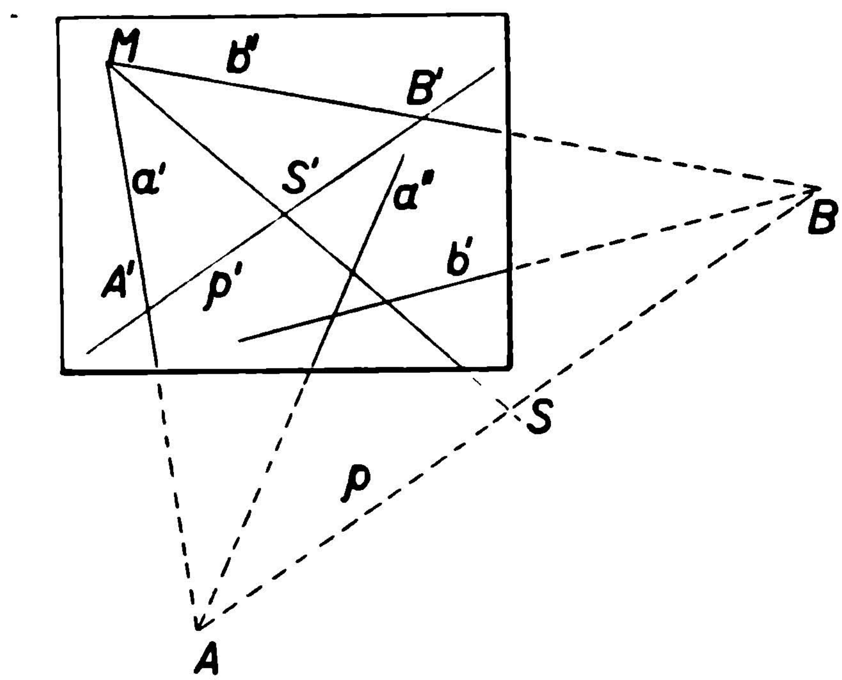
b) Je-li jeden nebo oba body $B \equiv (a, c)$ a $C \equiv (a, b)$ také



Obr. 14. Z nedostupného bodu A spustiti kolmici k_a na nedostupnou přímku a.

nedostupné, pomůžeme si rovnoběžkou $a' \parallel a$ (obr. 13) tak zvolenou, aby její průsečíky B' a C' s b a c již padly na nákresnu.

c) Kdyby také přímka a byla nedostupná (obr. 14), spojme podle odst. 2,1 C nedostupný bod druhého řádu $B \equiv (a, c)$ s bodem D, který jsme libovolně zvolili na b. Kol-



Obr. 15. Rozpůlení nedostupné úsečky AB.

mici k_b sestrojíme užitím průsečíku V_1 výšek v $\triangle ABD$. K sestrojení výšky na stranu BD musíme ovšem užíti obratu načrtnutého v obr. 13, je-li A nedostupný (v obr. 14 tato konstrukce je čárkovaná). Podobně sestrojíme kolmici k_c (její konstrukce v obr. 14 je již vynechána). Další konstrukce $k_a \equiv VA$ je stejná jako dříve.

d) Nyní dovedeme také bodem vésti rovnoběžku s nedostupnou přímkou a. Je to kolmice spuštěná z onoho bodu na libovolnou přímku $k \perp a$ (bez obrázku; srov. s odst. 2,1 B).

e) Na základě předešlých konstrukcí můžeme vztýčiti kolmici k přímce a v jejím nedostupném bodě A. Na nákresně veďme přímku $a' \parallel a$ a spusťme na ni kolmici z A (bez obrázku).

B. Rozpůliti úsečku AB, je-li nedostupný aspoň jeden z jejích koncových bodů.

Na nákresně veďme rovnoběžku p' s úsečkou AB (obr. 15). Promítněme na ni koncové body úsečky AB do $A'B'$ z bodu M tak zvoleného na nákresně, aby oba body A', B' byly dostupné. Půlí-li S' úsečku $A'B'$, prochází MS' středem S úsečky AB. Je to bod dostupný nebo nedostupný nejvýš druhého řádu.

Podobně bychom rozdělili nedostupnou úsečku AB na libovolný jiný počet stejných dílů. Stejně promítáním řešíme úlohu: Na přímce p budiž dána zčásti neb zcela nedostupná úsečka. Jest ji zdvojnásobiti, ztrojnásobiti atd.

Nyní dovedeme také nakresliti symetrálu nedostupné úsečky AB. Je to kolmice v S na AB. Sestrojíme ji podle odst. A spuštěním kolmice z S na p'.

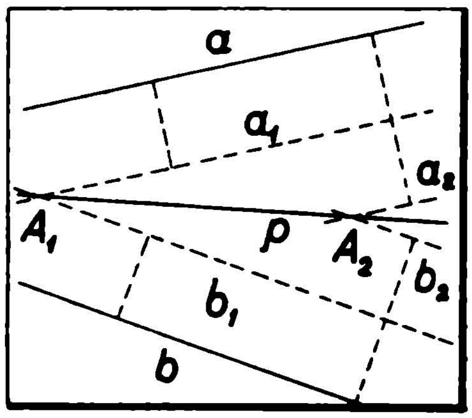
Rovněž dovedeme najíti střed kružnice, jdoucí třemi body A, B, C, z nichž některé nebo všechny mohou býti nedostupné. Je to průsečík symetrál úseček AB a BC. Za kontrolu správné konstrukce slouží, že jím také prochází symetrála úsečky CA (bez obrázku).

C. Rozpůliti úhel s nedostupným vrcholem.

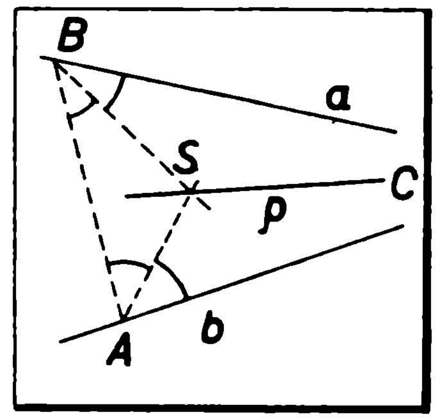
a) Půlící přímka p je geometrickým místem bodů stejně vzdálených od obou ramen a, b úhlu (obr. 16a).

b) Na ramenech zvolme dostupné body A, B a označme C jeho nedostupný vrchol (obr. 16b). V $\triangle ABC$ symetrály úhlů se protínají v jednom bodě S, který najdeme jako průsečík dostupných symetrál $\sphericalangle CBA$ a $\sphericalangle CAB$. Hledaná symetrála $\sphericalangle ACB$ je spojnice SC.

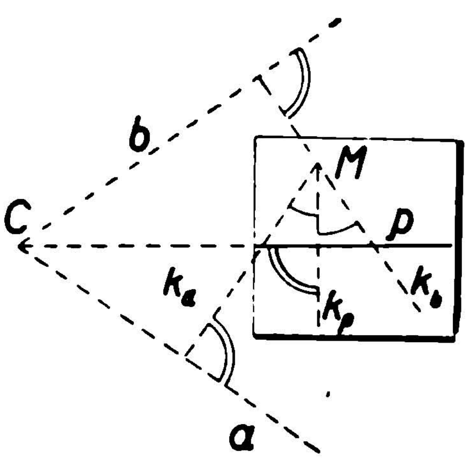
c) Dosud jsme mlčky předpokládali, že obě ramena úhlu, který půlíme, jsou dostupná. Jsou-li jedno nebo obě ramena úhlu nedostupná, spusťme podle odst. A na ně kolmice k_a a k_b z vhodně zvoleného bodu M na nákresně (obr. 16c). Budiž k_p symetrála úhlu jimi sevřeného, která je patrně dostupná. Z vrcholu $C \equiv (a, b)$ spuštěná $p \perp k_p$ (odst. A) je hledaná půlící přímka.



Obr. 16a.



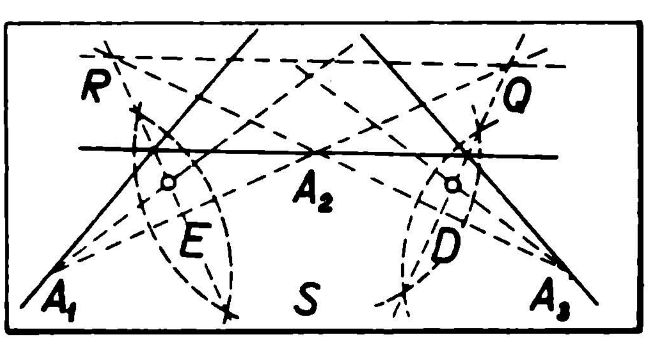
Obr. 16b.



Obr. 16c.

Obr. 16. Rozpůlení úhlu s nedostupným vrcholem.

D. Kružnice procházející dostupnými body A_1, A_2, A_3 mějž nedostupný střed S (obr. 17). Pak není možno kružítkem sestrojiti její dostupný oblouk. Můžeme však sestrojiti tečny kružnice v A_1, A_2, A_3 a takový počet dalších dostupných bodů na ní, aby ji bylo možno jimi proložiti s dostatečnou přesností od ruky.

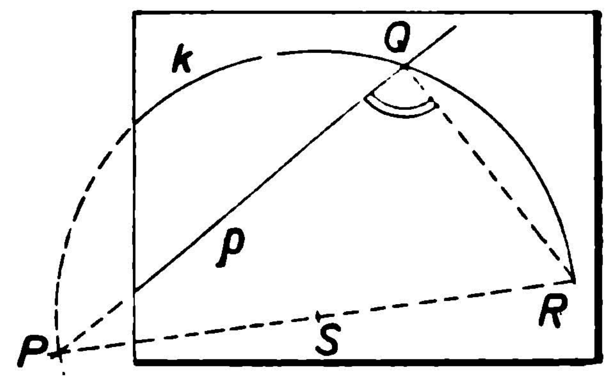


Obr. 17. V bodech A_1, A_2, A_3 kružnice (s nedostupným středem) sestrojiti její tečny a sestrojiti další body na kružnici.

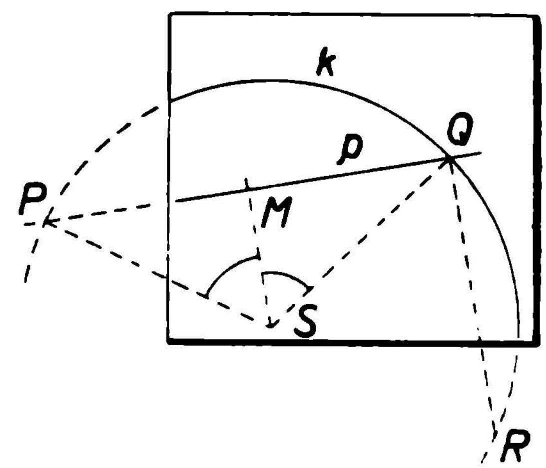
Sestrojme symetrály DQ a ER tětiv A_2A_3 a A_1A_2. Najděme průsečíky R a Q těchto tětiv se symetrálami. Spojnice RQ je rovnoběžná s tečnou kružnice v A_2. Neboť A_2 je průsečík výšek v trojúhelníku RQS, takže $SA_2 \perp RQ$, charakteristická to vlastnost tečny kružnice. Tečny kružnice v A_1 a A_3 protínají se s tečnou v A_2 na symetrálách. Rozpůlíme-li úhel tečny a tětivy (čárkovaně), dostaneme další bod kružnice na symetrále tětivy (označený kroužkem). Jinou konstrukci dalších bodů kružnice poskytuje Pascalova věta, dobře známá ze střední školy, považujeme-li kružnici za kuželosečku určenou třemi body a tečnami ve dvou z nich. Nebo můžeme užíti i věty Brianchonovy (tři tečny kuželosečky se dvěma body dotyku).

E. Přímka p protíná kružnici k v nedostupném bodě P. Jest jím vésti další přímku, aby byl určen jako průsečík dvou přímek. Ve všech dosavadních konstrukcích byly totiž nedostupné body určeny vždy tímto způsobem.

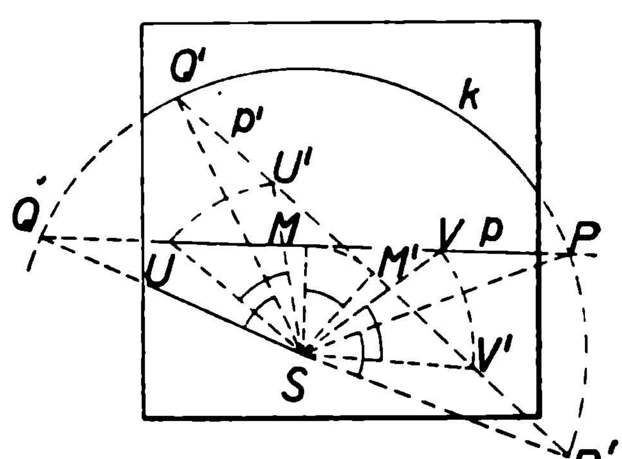
a) Je-li dostupný střed S kružnice a druhý průsečík Q přímky a kružnice (obr. 18), vztyčme $QR \perp p$. Protne-li tato kolmice kružnici po druhé v dostupném bodě R, spojnice RS jde bodem P.



Obr. 18.



Obr. 19.



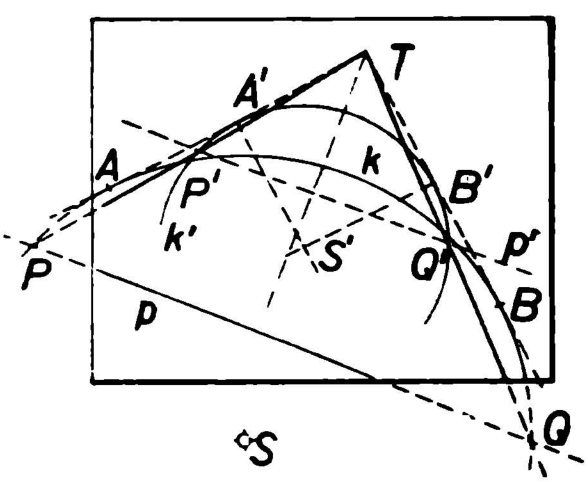
Obr. 20.

Obr. 18.—20. Spojiti bod S s nedostupným průsečíkem P přímky p a kružnice k.

Je-li také R nedostupný (obr. 19), spusťme z S kolmici SM na p a přenesením učiňme $\sphericalangle QSM = \sphericalangle MSP$. Toto řešení platí ostatně i při dostupném R.

Je-li také Q nedostupný (obr. 20), otočme přímku p okolo středu S do takové polohy p', aby aspoň jeden průsečík $Q' \equiv (p', k)$ byl dostupný. Otočení přímky provedeme buď otočením kolem středu S nejbližšího bodu M na ní nebo otočením dvou bodů U, V přímky o stejný úhel. Právě vyloženým způsobem najdeme SP' a body P' a Q' otočíme kolem S zpátky o stejný úhel

$\sphericalangle P'SP = \sphericalangle Q'SQ = \sphericalangle U'SU = \sphericalangle V'SV$ ($= \sphericalangle M'SM$ jestliže jsme k otáčení přímky užili bodu M).

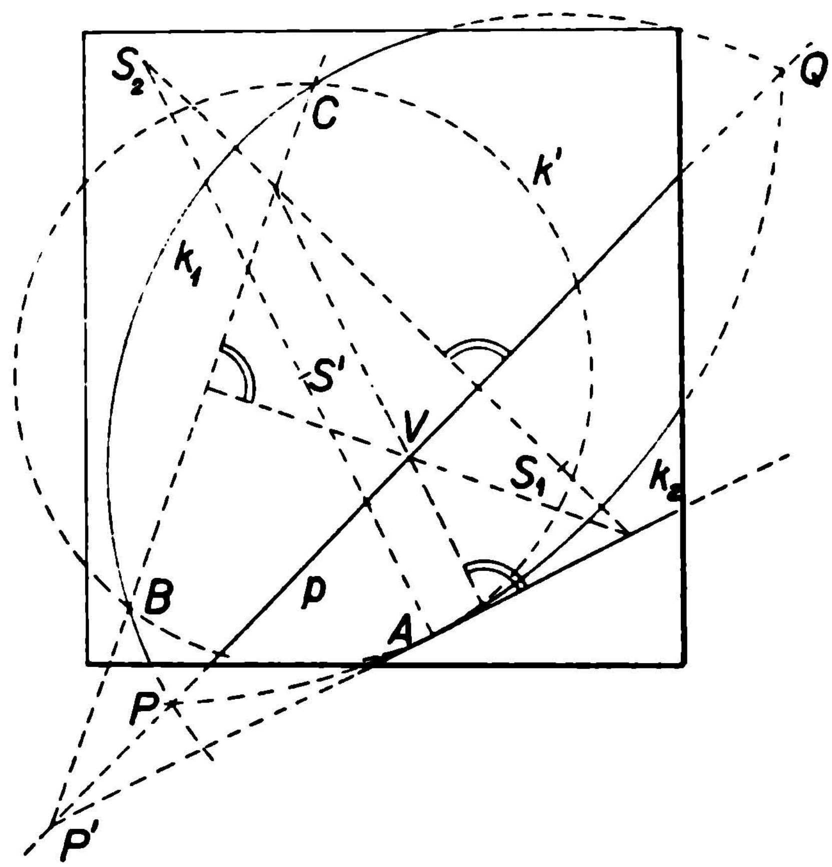


Obr. 21. Sestrojení přímek nedostupnými průsečíky přímky p s kružnicí k o nedostupném středu S.

b) Je-li střed S kružnice k nedostupný, nemůžeme její dostupný oblouk sestrojiti kružítkem (odst. D). Proto také nemůžeme na ní přímo sestrojiti žádný z obou průsečíků P, Q kružnice k a přímky p, i když padne na nákresnu. Sestrojme však ke kružnici tečny ve dvou jejích dostupných bodech A, B (odst. D) tak zvolených, aby průsečík T obou tečen byl dostupný (obr. 21). Sestrojme kružnici k' a přímku p', které jsou s k a p stejnolehlé podle středu T. Padnou-li průsečíky P', $Q' \equiv \equiv (k', p')$ na nákresnu, procházejí TP' a TQ' průsečíky P, $Q \equiv (k, p)$.

c) Úloha: určiti nedostupné průsečíky P, Q dvou kružnic k_1 a k_2 jako průsečíky přímek se převede na předešlou sestrojením chordály p obou kružnic. K tomu užíváme nejčastěji poznatku, že chordály tří kružnic procházejí týmž bodem, jemuž říkáme potenční střed těch tří kružnic.

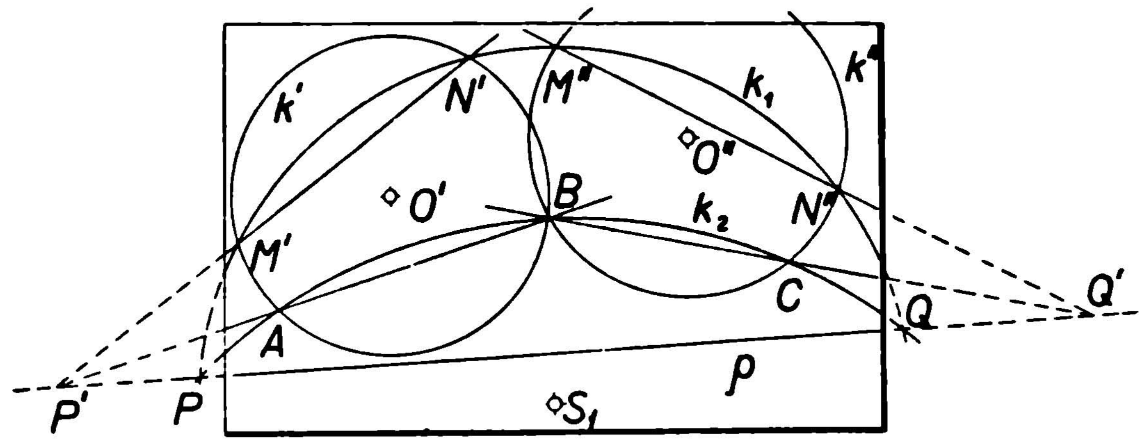
Jsou-li středy S_1, S_2 obou kružnic dostupné (obr. 22), nakresleme libovolnou kružnici k' s dostupným středem S', která protíná dané kružnice v dostupných bodech. Sestrojme chordály kružnic $(k_1, k') \equiv BC$ a kružnic k_2, k'. Pro jednoduchost jsme volili k' dotýkající se k_2 v A. Proto jejich chordála je jejich společnou tečnou v A. Průsečíkem P' obou chordál jde i chordála $(k_1, k_2) \equiv p \perp S_1S_2$ (odst. A).



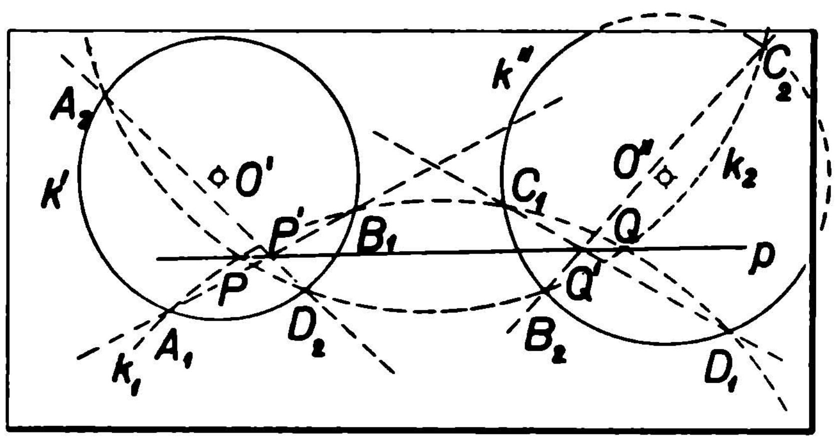
Obr. 22. Sestrojení chordály p kružnic k_1, k_2 s dostupnými středy, jsou-li průsečíky P, Q obou kružnic nedostupné.

Má-li jedna z obou kružnic nedostupný střed (k_2 v obr. 23), sestrojme na ní tři body A, B, C (odst. D). Body A, B proložme kružnicí k' s dostupným středem O' a sestrojme průsečík P' chordál $(k_2, k') \equiv AB$ a $(k_1, k') \equiv M'N'$. Jím prochází také hledaná chordála $p \equiv (k_1, k_2)$. Pomocnou kružnici k'' vedenou body B, C sestrojme podobně bod Q' na chordále $p \equiv (P', Q')$. Kontrolou je, že $p \perp S_1S_2$. Chordálu p

dvou kružnic k_1 a k_2, z nichž jedna má nedostupný střed, sestrojujeme stejným způsobem i tehdy, protínají-li se obě kružnice v dostupných bodech P, Q, které však nemůžeme najíti přímo protnutím oblouků obou kružnic, protože kružítkem nemůžeme sestrojiti oblouk kružnice s nedostupným středem.



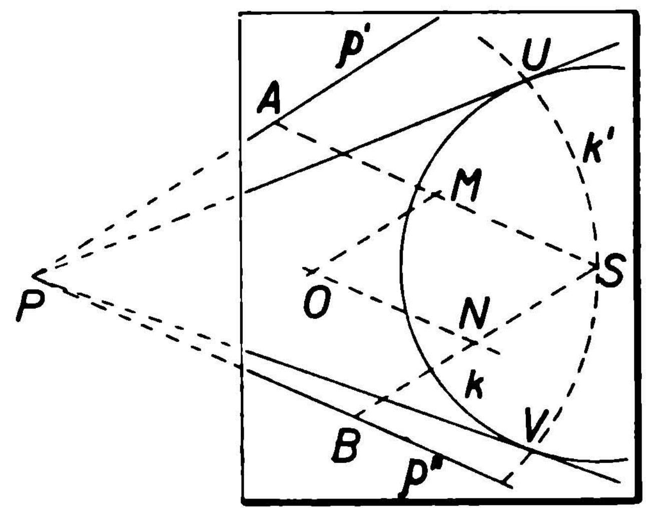
Obr. 23. Sestrojení chordály p kružnic k_1, k_2, je-li střed kružnice k_2 nedostupný.



Obr. 24. Sestrojení chordály p kružnic k_1, k_2 s nedostupnými středy.

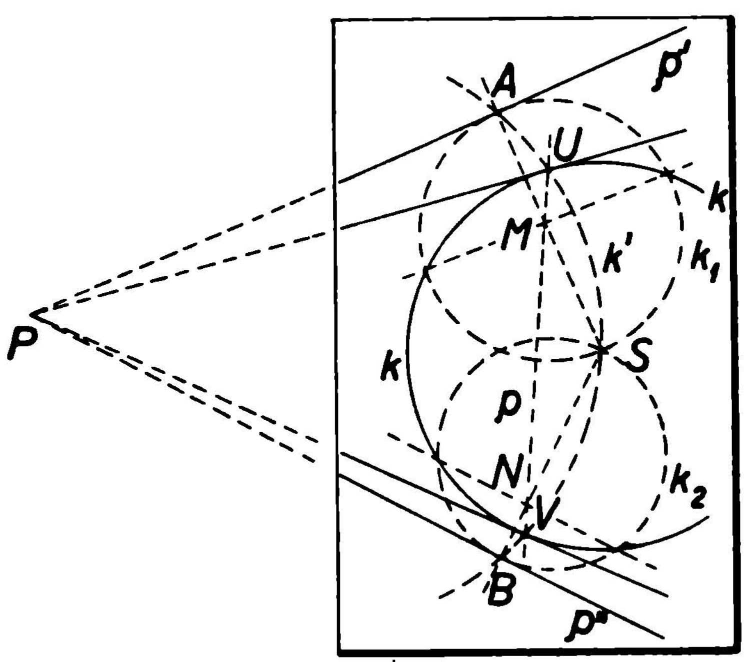
Jsou-li nedostupné středy obou kružnic k_1, k_2, sestrojme na každé z nich tři dostupné body A_1, B_1, C_1, resp. A_2, B_2, C_2 (obr. 24). Body $A_2A_1B_1$ proložme kružnici k' s dostupným středem O'. Z kružnic k' a k_1 jedna má střed dostupný a druhá nedostupný. Jejich chordálu A_2D_2 dovedeme sestrojiti (podobně jako v obr. 23). Průsečík $P' \equiv (A_2D_2, A_1B_1)$ je potenčním středem kružnic (k_1, k_2, k') a leží proto na hledané chordále $p \equiv (k_1, k_2)$. Podobně pomocnou kružnicí k'' s dostupným středem O'', proloženou body B_2, C_2, C_1 najdeme další bod Q' na chordále p. Průsečíky P, Q chordály $P'Q'$ s kteroukoliv z kružnic k', k'' jsou také průsečíky obou kružnic a sestrojíme je podle b).

F. Z nedostupného bodu $P \equiv (p', p'')$ vésti tečny ke kružnici k.



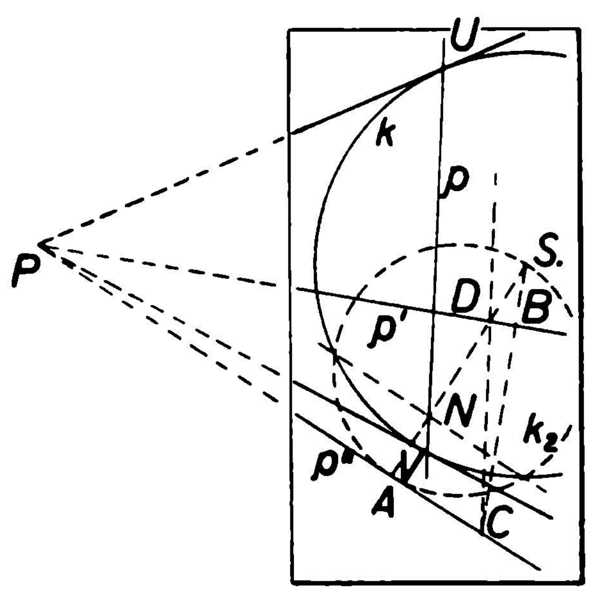
Obr. 25. Sestrojení tečen vedených z nepřístupného bodu P ke kružnici k s dostupným středem S.

a) Je-li dostupný střed S kružnice (obr. 25), veďme jím libovolné přímky SA a SB až protnou p' a p'' v dostupných bodech A, B, rozpůlme úsečky SA a SB body M, N a veďme $MO \parallel p'$ a $NO \parallel p''$. O je středem kružnice k' o průměru SP, která prochází dotykovými body U, V tečen z P vedených ke k. Konstrukce je výhodná, padne-li i O na nákresnu. Je-li úhel přímek p' a p'' malý, je tato konstrukce nepřesná.

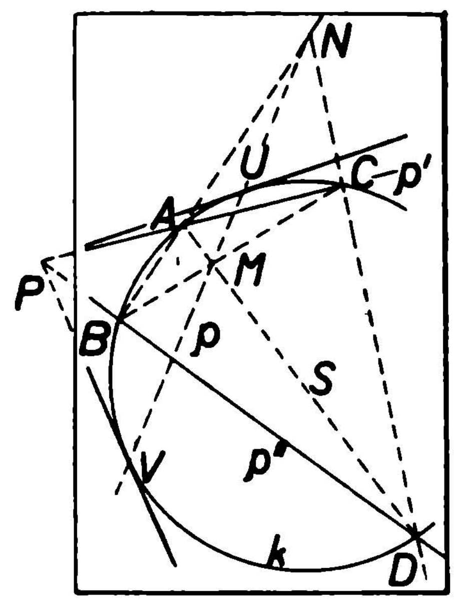


Obr. 26. Sestrojení bodů dotyku U, V tečen vedených ke kružnici k z nepřístupného bodu P.

b) Buďtež A, B paty kolmic, spuštěných z S na p' a p'' (obr. 26). Tyto body leží na kružnici k' nad průměrem PS, která prochází body dotyku U, V tečen, vedených ke k z P. Body U, V najdeme na k bez kreslení kružnice k' chordálou p kružnic (k, k'). Chordálu sestrojíme podle odst. E. Nejlépe užijeme pomocných kružnic k_1 a k_2 nad průměry AS a BS, které poskytnou potenční středy M a N na p. Spojnice $p \equiv MN$ vytíná na k hledané body dotyku U, V. Jelikož není potřebí kresliti kružnici k', může její střed O býti i nedostupný.



Obr. 27. Sestrojení tečen vedených z nedostupného bodu P ke kružnici k.



Obr. 28. Sestrojení tečen vedených z nedostupného bodu P ke kružnici k.

c) Tato konstrukce je nevýhodná, probíhá-li jedna z přímek p', p'' blízko S (v obr. 27 je to p'). Pak potenční střed M padá zpravidla mimo nákresnu. Jsou-li však C a D průsečíky kolmic SB s p'' a SA s p', jest S průsečíkem výšek v $\triangle\ PDC$. Proto spojnice CD stojí kolmo na spojnici PS, t. j. je rovnoběžná s hledanou chordálou p. Stačí na ní sestrojiti proto jediný další bod N stejnou konstrukcí jako dříve.

d) Jiná konstrukce (obr. 28): Zvolme na k body A, B, spojme je s P a najděme druhé průsečíky C, D spojnic AP a BP s k. Body $(AD, BC) \equiv M$, $(AB, CD) \equiv N$ leží na poláře p bodu P vzhledem ke kružnici. Dotykové body U, V

jsou průsečíky poláry p a kružnice k. Konstrukce je zvláště výhodná, protínají-li již přímky p' a p'' kružnici k v dostupných bodech, které volíme přímo za $ABCD$.

Konstrukci podle b), c) nebo d) můžeme provésti, ovšem s jistými obtížemi, i tehdy, je-li střed kružnice nedostupný.