

Měřické chyby a jejich vyrovnání: (podle metody nejmenších čtverců)

Význam vyrovnávání methodou nejmenších čtverců

In: B. Kladivo (author): Měřické chyby a jejich vyrovnání: (podle metody nejmenších čtverců). (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1943. pp. 151–179.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405507>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

VII.

VÝZNAM VYROVNÁNÍ METHODOU NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ.

1. Význam výsledků vypočtených podle metody nejmenších čtverců, řídí-li se měřické chyby normálním zákonem četnosti. Ve II. kapitole jsme vyložili první Gaussovo zdůvodnění metody nejmenších čtverců. Viděli jsme (II, 2), že jsme oprávněni užití k vyrovnání měřických výsledků metody nejmenších čtverců vždy, kdykoli je platný postulát aritmetického průměru, t. j. je-li aritmetický průměr z výsledků přímých a stejně přesných měření v každém případě nejpravděpodobnější hodnotou a má-li mimo to funkce četnosti pro chybu ε_i tvar $\varphi_i(\varepsilon_i)$.

Protože z postulátu aritmetického průměru a z okolnosti, že funkce četnosti pro chybu ε_i má tvar $\varphi_i(\varepsilon_i)$ plyne, že se chyby zatěžující měření řídí normálním zákonem chyb, předpokládají výklady v kapitole II až IV, že se chyby zatěžující měření řídí tímto zákonem chyb.

V tom případě je mezi střední a pravděpodobnou chybou vztah

$$r = m \cdot 0,67449 \doteq \frac{2}{3}m$$

(srovn. I, (31)). K odhadu přesnosti měření a vyrovnaných výsledků lze v tomto případě užívatí buď střední nebo pravděpodobné chyby. Při deseti měřeních (při 200, 8000 měřeních) lze pak považovati za extrémní možnou chybu přibližně $\pm 2m$ ($\pm 3m$, $\pm 4m$) (srovn. I, 8).

Řídí-li se chyby zatěžující měření normálním zákonem chyb, jsou hodnoty neznámých, vypočtené podle metody nejmenších čtverců, nejpravděpodobnější hodnoty, jež plynou z výsledků měření l_1, l_2, \dots, l_n (srovn. na př. (III, 1)). Současně mají takto vypočtené hodnoty nejmenší střední chyby nebo největší váhy ze všech lineárních celistvých funkcí výsledků měření l_1, l_2, \dots, l_n (srovn. VII, 3).

Extrémní možné chyby vymezují pak obory, uvnitř nichž jsou pravděpodobně skutečné hodnoty neznámých výsledných hodnot.

2. Kdy se řídí měřické chyby normálním zákonem četnosti? Nyní budeme uvažovati o otázce, kdy se měřické chyby řídí normálním zákonem četnosti. Uvedeme některé okolnosti, jež přispívají k jejímu objasnění.

a) Tážeme se, kdy je platný postulát aritmetického průměru. [V takovém případě se budou měřické chyby řídit normálním zákonem chyb, má-li ovšem mimo to funkce četnosti pro chybu ε_i tvar $\varphi_i(\varepsilon_i)$.]

Postulát aritmetického průměru je na př. platný, jsou-li splněny tyto jednodušší předpoklady:

I. Zvětší-li se naměřené hodnoty k -násobně (vyjádří-li se v jednotce k -krát menší), zvětší se k -násobně i nejpravděpodobnější hodnota z nich odvozená. Jsou-li naměřené hodnoty $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ a označíme-li nejpravděpodobnější hodnotu $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, má býti

$$f(kx_1, kx_2, \dots, kx_n) = k f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

což znamená, že f jest homogenní funkce prvního stupně*).

II. Zvětší-li se všechny naměřené hodnoty o totéž číslo, zvětší se o totéž číslo i nejpravděpodobnější hodnota z nich odvozená, t. j. volba počátku měřítka posouvá nejpravděpodobnější hodnotu stejně jako naměřené hodnoty:

$$f(x_1 + h, x_2 + h, \dots, x_n + h) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + h.$$

III. Všechna měření, protože jsou stejně přesná, přispívají stejně k vytváření výsledku, takže chyba ε má stejný vliv na nejpravděpodobnější hodnotu, ať zatěžuje kteroukoli z naměřených hodnot.

Zatěžuje-li chyba ε naměřenou hodnotu x_i , je její vliv na výsledek roven

*) J. Vojtěch, l. c. str. 389. — K. Petr, l. c. str. 324.

$$\varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \dots,$$

jak plyne z rozvoje

$$f(x_1, x_2, \dots, x_i + \varepsilon, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

podle věty Taylorovy.

Z II. předpokladu plyne, rozvineme-li podle h v řadu Taylorovu $f(x_1 + h, \dots, x_n + h)$:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) + h \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) + \dots = \\ = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + h, \end{aligned}$$

a srovnáme-li koeficienty u h , tento vztah:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} = 1. \quad (1)$$

Podle III. předpokladu, podle něhož má býti

$$\varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \dots$$

stejně pro jakékoli i , musí býti

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

a tedy podle (1)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{1}{n}. \quad (2)$$

Z I. předpokladu plyne podle Eulerovy věty

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

a podle (2) plyne odtud

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Tato úvaha Schiaparelliho*) předpokládá mlčky spojitost funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a jejích prvních derivací.

Jestliže tedy jsou splněny uvedené jednodušší předpoklady o vlastnostech nejpravděpodobnější hodnoty, odvozené z naměřených hodnot, platí postulát aritmetického průměru. To v sobě zahrnuje, že se měřické chyby řídí normálním zákonem chyb a že jsme oprávněni vyrovnávat podle metody nejmenších čtverců, zase ovšem za předpokladu, že funkce četnosti pro chybu ε_i má tvar $\varphi_i(\varepsilon_i)$.

*

Závisí-li funkce četnosti pro chybu $\varepsilon_i = x - x_i$ nejen na rozdílu $\varepsilon_i = x - x_i$, nýbrž má-li obecnější tvar $\varphi(x_i, x)$, dá se ukázat, že postulát aritmetického průměru vede k obecnější funkci četnosti. Podle Poincarého**) lze to dokázat takto:

Je-li skutečná hodnota měřené veličiny x , nechť je pravděpodobnost, že výsledek pozorování byl mezi x_1 a $x_1 + dx_1$, rovna $\varphi(x_1, x) dx_1$. Dále nechť pravděpodobnost a priori, že veličina x je mezi x a $x + dx$, je rovna $\psi(x) dx$. V nejjednodušším případě, máme-li důvod předpokládati, že všechny hodnoty x v určitých mezích jsou a priori stejně pravděpodobné, přešla by funkce $\psi(x)$ v konstantu C .

Podle pravidla o násobení pravděpodobností je pravděpodobnost, že výsledky nezávislých pozorování jsou v mezích od x_1 do $x_1 + dx_1$, od x_2 do $x_2 + dx_2$, ... a od x_n do $x_n + dx_n$, a je-li měřená veličina x , rovna

$$\varphi(x_1, x) \varphi(x_2, x) \dots \varphi(x_n, x) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Pravděpodobnost, že měřená veličina je v mezích od x do $x + dx$ a při tom že výsledky měření jsou v uvedených mezích, bude podle pravidla o násobení pravděpodobností rovna

*) P. Pizzetti, l. c. str. 88—89. — E. Czuber, l. c. str. 31 až 33.

**) H. Poincaré: Calcul des probabilités, 2. éd., Paris 1912, str. 169—176.

$$p = \psi(x) dx \cdot \varphi(x_1, x) \varphi(x_2, x) \dots \varphi(x_n, x) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Podle pravidla o součtu pravděpodobností bude pravděpodobnost, že výsledky měření jsou v uvedených mezích a že měřená veličina může mít jakoukoli hodnotu v mezích od $-\infty$ do $+\infty$, rovna integrálu

$$dx_1 dx_2 \dots dx_n \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \varphi(x_1, x) \varphi(x_2, x) \dots \varphi(x_n, x) dx.$$

Jestliže nastal případ, že výsledky měření jsou v uvedených mezích, a označíme-li pravděpodobnost (a posteriori), že měřená veličina je při tom v mezích od x do $x + dx$, písmenem P , můžeme podle pravidla o násobení pravděpodobností psát

$$p = P dx_1 dx_2 \dots dx_n \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \varphi(x_1, x) \varphi(x_2, x) \dots \varphi(x_n, x) dx,$$

tedy

$$P = \frac{\psi(x) dx \cdot \varphi(x_1, x) \varphi(x_2, x) \dots \varphi(x_n, x)}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \varphi(x_1, x) \varphi(x_2, x) \dots \varphi(x_n, x) dx}.$$

Podle Gausse zavádí se k určení veličiny x podmínka, aby pravděpodobnost P byla maximální pro

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

to značí, aby pro toto x byl maximální výraz $\psi(x) \varphi(x_1, x) \cdot \varphi(x_2, x) \dots \varphi(x_n, x)$, nebo, což vede k stejnému výsledku, výraz

$$\lg \psi(x) \varphi(x_1, x) \varphi(x_2, x) \dots \varphi(x_n, x).$$

Podmínka pro extrém je

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} + \frac{\varphi'(x_1, x)}{\varphi(x_1, x)} + \frac{\varphi'(x_2, x)}{\varphi(x_2, x)} + \dots + \frac{\varphi'(x_n, x)}{\varphi(x_n, x)} = 0.$$

Píšeme-li

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \chi(x), \quad \frac{\varphi'(x_i, x)}{\varphi(x_i, x)} = F(x_i, x),$$

je předcházející podmínka

$$F(x_1, x) + F(x_2, x) + \dots + F(x_n, x) + \chi(x) = 0. \quad (3)$$

Tato podmínka má být identická s podmínkou

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = nx. \quad (3')$$

Zavedeme místo x_1, x_2, \dots, x_n po řadě $x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \dots, x_n + dx_n$, kde přírůstky dx_1, dx_2, \dots, dx_n jsou takové, že x zůstane nezměněné. To znamená, že z podmínky (2) plyne

$$\frac{\partial F(x_1, x)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F(x_2, x)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial F(x_n, x)}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

a z podmínky (3')

$$dx_1 + dx_2 + \dots + dx_n = 0.$$

Protože tyto rovnice mají být identické, musí být

$$\frac{\partial F(x_1, x)}{\partial x_1} = \frac{\partial F(x_2, x)}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial F(x_n, x)}{\partial x_n} = A'(x),$$

funkce jen proměnné x , a odtud

$$F(x_i, x) = A'(x) x_i + B'(x).$$

Podmínka (2) pro extrém je tedy

$$\sum_{i=1}^n \{A'(x) x_i + B'(x)\} + \chi(x) = 0,$$

čili

$$A'(x) \sum_{i=1}^n x_i + n B'(x) + \chi(x) = 0.$$

Zavedeme-li sem $\sum_{i=1}^n x_i = nx$, bude

$$n \{x A'(x) + B'(x)\} + \chi(x) = 0. \quad (4)$$

Protože tato podmínka má být splněna pro každé n a pro každé x , musí

$$\chi(x) = \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = 0,$$

tedy $\psi(x)$ musí být rovno konstantě a mezi funkcemi A' a B' musí být vztah

$$x A'(x) + B'(x) = 0. \quad (5)$$

Pak z rovnice

$$\frac{\varphi'(x_i, x)}{\varphi(x_i, x)} = \frac{\partial}{\partial x} \lg \varphi(x_i, x) = A'(x) x_i + B'(x)$$

plyne (je-li $dA : dx = A'$, $dB : dx = B'$) integrací

$$\lg \varphi(x_i, x) = A(x) x_i + B(x) + \lg \Theta(x_i),$$

čili

$$\varphi(x_i, x) = \Theta(x_i) e^{A(x)x_i + B(x)}. \quad (6)$$

Zde jsou dvě funkce $\Theta(x_i)$ a $A(x)$ libovolné, funkce B vychází pak z podmínky (5).

To tedy vyplývá z Gaussovy podmínky, aby — jsou-li výsledky měření x_1, x_2, \dots, x_n — byla nejpravděpodobnější hodnota rovna aritmetickému průměru. Jak je viděti, jest normální funkce četnosti

$$\varphi(x - x_i) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-x_i)^2}$$

jen zvláštním případem obecného vzorce (6).

b) Je-li skutečná chyba nějaké veličiny rovna lineární funkci částečných chyb, z nichž každá se řídí normálním zákonem chyb, řídí se normálním zákonem i chyba uvažované veličiny.

Budeme předpokládati, že částečné chyby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ se řídí normálním zákonem, t. j. pravděpodobnost, že ε_i je v intervalu $< \Delta, \Delta + d\Delta >$, jest

$$\frac{h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2 \Delta^2} d\Delta.$$

Tážeme se, jaká je pravděpodobnost, že chyba $\varepsilon = \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \dots + \lambda_n\varepsilon_n$ je v mezích od ε do $\varepsilon + d\varepsilon$?

- Pravděpodobnost, že chyby $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ nabudou současně hodnot $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, jest

$$\frac{h_1 h_2 \dots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-(h_1^2 \varepsilon_1^2 + h_2^2 \varepsilon_2^2 + \dots + h_n^2 \varepsilon_n^2)} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n. \quad (7)$$

A pravděpodobnost, že $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \dots + \lambda_n\varepsilon_n$ nabude hodnoty v mezích od E_1 do E_2 , bude rovna integrálu výrazu (7), při čemž integrační obor je takový, že

$$E_1 < \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \dots + \lambda_n\varepsilon_n < E_2.$$

Abychom provedli tuto integraci, násobíme nejprve výraz (7) integrálem

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta \int_{E_1}^{E_2} d\tau e^{i\Theta(\tau - \lambda_1\varepsilon_1 - \lambda_2\varepsilon_2 - \dots - \lambda_n\varepsilon_n)}, \quad (8)$$

o němž víme, že je rovný 1, pokud $E_1 < \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \dots + \lambda_n\varepsilon_n < E_2$, a je roven 0, když $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \dots + \lambda_n\varepsilon_n$ neleží uvnitř těchto mezí. Pak můžeme integrovati výsledný výraz v celém oboru všech proměnných, neboť omezení oboru nerovninou

$$E_1 < \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \dots + \lambda_n\varepsilon_n < E_2$$

je provedeno tím, že jsme násobili integrálem (8).

Hledaná pravděpodobnost tedy bude

$$P = \frac{h_1 h_2 \dots h_n}{(\sqrt{\pi})^n 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta \int_{E_1}^{E_2} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots$$

$$\dots d\varepsilon_n e^{i\Theta(\tau - \lambda_1\varepsilon_1 - \lambda_2\varepsilon_2 - \dots - \lambda_n\varepsilon_n) - h_1^2 \varepsilon_1^2 - h_2^2 \varepsilon_2^2 - \dots - h_n^2 \varepsilon_n^2}.$$

Integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon_i e^{i\Theta(-\lambda_i \varepsilon_i) - h_i^2 \varepsilon_i^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos \Theta \lambda_i \varepsilon_i - i \sin \Theta \lambda_i \varepsilon_i) e^{-h_i^2 \varepsilon_i^2} d\varepsilon_i =$$

$$= 2 \int_0^{\infty} \cos \Theta \lambda_i \varepsilon_i e^{-h_i^2 \varepsilon_i^2} d\varepsilon_i,$$

a protože

$$\int_0^{\infty} e^{-Ax^2} \cos hx dx = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{A} e^{-\frac{1}{4} h^2 : A},$$

bude předcházející integrál roven

$$\frac{\sqrt{\pi}}{h_i} e^{-\Theta^2 \lambda_i^2 : 4h_i^2},$$

tedy

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta \int_{E_1}^{E_2} e^{i\Theta\tau - \frac{\Theta^2}{4} \left(\frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \frac{\lambda_2^2}{h_2^2} + \dots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2} \right)} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{E_1}^{E_2} d\tau 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{\Theta^2}{4} \left(\frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \frac{\lambda_2^2}{h_2^2} + \dots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2} \right)} \cos \Theta\tau d\Theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{E_1}^{E_2} \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \dots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2}}} e^{-\tau^2 : \left(\frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \dots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2} \right)} d\tau. \end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že chyba $\lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n$ je v mezích od ε do $\varepsilon + d\varepsilon$, jest tedy

$$\frac{d\varepsilon}{\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \dots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2}}} e^{-\varepsilon^2 : \left(\frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \dots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2} \right)}.$$

Srovnáme-li tento výraz s výrazem pro normální zákon, vidíme, že chyba $\lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n$ se řídí rovněž nor-

normálním zákonem, jenže míra přesnosti je nyní

$$H = \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \dots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2}}},$$

čili

$$\frac{1}{H^2} = \frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \frac{\lambda_2^2}{h_2^2} + \dots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2}. \quad (9)$$

A protože mezi mírou přesnosti h_i a střední chybou m_i je vztah

$$m_i h_i = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

plyne pro čtverec M^2 střední hodnoty chyby ε vzorec

$$M^2 = \lambda_1^2 m_1^2 + \lambda_2^2 m_2^2 + \dots + \lambda_n^2 m_n^2 \quad (10)$$

[viz I, (12'')].

Užití.

α) V odstavci II, 4 byl dokázán vztah (15) mezi odchylkami v_i a skutečnými chybami ε_i . V případě stejných vah přejde onen vztah ve vzorec

$$v_i = \frac{1}{n} \{ -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \dots + (n-1)\varepsilon_i - \dots - \varepsilon_n \}.$$

Protože tedy odchylky v_i se dají vyjádřit jako lineární funkce skutečných chyb ε , je podle právě dokázaného patrné:

Řídí-li se skutečné chyby normálním zákonem četnosti, řídí se odchylky od aritmetického průměru rovněž normálním zákonem a naopak, neřídí-li se odchylky od aritmetického průměru normálním zákonem, neřídí se jím aspoň některá ze skutečných chyb (kdyby se jím řídily všechny skutečné chyby, musely by se jím řídit i odchylky od aritmetického průměru).

Označíme-li $\left\{ \begin{array}{l} h \\ h' \end{array} \right.$ míru přesnosti pro $\left\{ \begin{array}{l} \text{skutečné chyby} \\ \text{odchylky} \end{array} \right.$, bude

podle vzorce (9)

$$\frac{1}{h'^2} = \frac{n-1}{n^2 h^2} + \frac{(n-1)^2}{n^2 h^2} = \frac{n-1}{n h^2},$$

čili

$$h' = h \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Tedy pravděpodobnost, že odchylka v je v mezích od v do $v + dv$, bude

$$\frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2 v^2} dv = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{n}{n-1}} e^{-\frac{h^2 n v^2}{n-1}} dv.$$

β) Všimněme si trojúhelníkové sítě. Měřené úhly trojúhelníka označíme A, B, C . Součet úhlů podle měření je $A + B + C$. Protože známe, jaký tento součet má být ($180 + \varepsilon'$, kde ε' je nadbytek uvažovaného trojúhelníka), známe skutečnou chybu ε v uzávěru trojúhelníka, t. j.

$$\varepsilon = 180 + \varepsilon' - (A + B + C).$$

Označíme-li skutečné chyby v jednotlivých úhlech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, jest

$$\varepsilon = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3.$$

Z předcházejícího výsledku je patrné: Řídí-li se $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ normálním zákonem četnosti, řídí se jím i chyba v uzávěru a naopak, neřídí-li se chyba v uzávěru normálním zákonem, neřídí se jím aspoň některá z chyb v měřených úhlech.

Je-li

$\left\{ \begin{array}{l} h \\ h' \end{array} \right.$ míra přesnosti pro $\left\{ \begin{array}{l} \text{skutečné chyby úhlů } A, B, C, \\ \text{chybu v uzávěru trojúhelníka } ABC, \end{array} \right.$
bude podle vzorce (9)

$$\frac{1}{h'^2} = \frac{3}{h^2} \quad \text{čili} \quad h' = \frac{h}{\sqrt{3}}.$$

Tedy pravděpodobnost, že chyba ε je v mezích od ε do $\varepsilon + d\varepsilon$, bude

$$\frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{3\pi}} e^{-\frac{1}{3}h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Označíme-li střední chybu měřeného úhlu písmenem m a střední hodnotu chyby v uzávěru písmenem M , plyne ze vzorce (10)

$$M^2 = 3m^2 \quad \text{čili} \quad m = \frac{M}{\sqrt{3}}. \quad (11)$$

A vypočteme-li podle vzorce I, (10')

$$M^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n},$$

kde n je počet chyb v uzávěrech, bude

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{3n}}. \quad (11')$$

c) Podobně jako v odstavci b) uvažujeme o obecnějším případě,*) kdy skutečná chyba nějaké veličiny je rovna lineární funkci $\lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n$ částečných chyb $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, při čemž ε_i se řídí zákonem četnosti $\varphi_i(\varepsilon_i)$. (Pro různá i mohou býti funkce φ_i různé.)

Pravděpodobnost, že chyby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ nabudou současně hodnot $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, jest

$$\varphi_1(\varepsilon_1) \varphi_2(\varepsilon_2) \dots \varphi_n(\varepsilon_n) d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n. \quad (12)$$

A pravděpodobnost, že $\lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n$ má hodnotu mezi w_1 a w_2 , bude rovna integrálu výrazu (12), při čemž obor je takový, že

$$w_1 < \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n < w_2.$$

Stejně jako v odstavci b) bude tedy pravděpodobnost P , že celková chyba $\lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n$ je v mezích od w_1 do w_2 , rovna

*) Whittaker-Robinson, l. c. str. 168—173.

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta \int_{w_1}^{w_2} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Theta(\tau - \lambda_1 \varepsilon_1 - \lambda_2 \varepsilon_2 - \dots - \lambda_n \varepsilon_n)} \cdot \varphi_1(\varepsilon_1) \varphi_2(\varepsilon_2) \dots \varphi_n(\varepsilon_n) d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n.$$

Píšeme-li

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\Theta x} \varphi_r(x) dx = \Omega_r(\Theta),$$

bude

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta \int_{w_1}^{w_2} e^{i\Theta \tau} \Omega_1(\lambda_1 \Theta) \Omega_2(\lambda_2 \Theta) \dots \Omega_n(\lambda_n \Theta) d\tau.$$

Uvážíme-li, že

$$\int_{w_1}^{w_2} e^{i\Theta \tau} d\tau = \frac{1}{i\Theta} (e^{i\Theta w_2} - e^{i\Theta w_1}),$$

a zavedeme-li označení $\Omega(\Theta) = \Omega_1(\lambda_1 \Theta) \Omega_2(\lambda_2 \Theta) \dots \Omega_n(\lambda_n \Theta)$, jest

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega(\Theta)}{i\Theta} (e^{i\Theta w_2} - e^{i\Theta w_1}) d\Theta.$$

Pravděpodobnost P' , že $\lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n$ je mezi ε a $\varepsilon + d\varepsilon$, bude

$$[\text{protože } \frac{1}{i\Theta} (e^{i\Theta(\varepsilon+d\varepsilon)} - e^{i\Theta\varepsilon}) = \frac{1}{i\Theta} e^{i\Theta\varepsilon} (e^{i\Theta d\varepsilon} - 1) \doteq e^{i\Theta\varepsilon} d\varepsilon].$$

$$P' = \frac{d\varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(\Theta) e^{i\Theta\varepsilon} d\Theta,$$

tedy rovna $\varphi(\varepsilon) d\varepsilon$, kde

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(\Theta) e^{i\Theta\varepsilon} d\Theta. \quad (13)$$

Zavedeme označení

$$s_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \varphi_r(x) dx. \quad (14)$$

Pak podle definice $\Omega_r(\Theta)$ bude

$$\begin{aligned} \Omega_r(\Theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\Theta x} \varphi_r(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{i\Theta x}{1!} - \frac{(\Theta x)^2}{2!} + \frac{i(\Theta x)^3}{3!} + \frac{(\Theta x)^4}{4!} - \dots \right) \varphi_r(x) dx = \\ &= 1 - i\Theta s_1 - \frac{\Theta^2}{2!} s_2 + \frac{i\Theta^3}{3!} s_3 + \frac{\Theta^4}{4!} s_4 + \dots \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} \lg \Omega_r(\Theta) &= \lg \left(1 - i\Theta s_1 - \frac{\Theta^2}{2!} s_2 + \frac{i\Theta^3}{3!} s_3 + \frac{\Theta^4}{4!} s_4 + \dots \right) = \\ &= -i\Theta s_1 - \frac{\Theta^2}{2} (-s_1^2 + s_2) + \frac{i\Theta^3}{3!} (s_3 - 3s_1 s_2 + 2s_1^3) + \\ &\quad + \frac{\Theta^4}{4!} (s_4 - 4s_1 s_3 - 3s_2^2 + 12s_1^2 s_2 - 6s_1^4) + \dots = \\ &= -i\Theta p_1 - \frac{\Theta^2}{2!} p_2 + \frac{i\Theta^3}{3!} p_3 + \frac{\Theta^4}{4!} p_4 + \dots, \end{aligned}$$

kde

$$p_1 = s_1, \quad p_2 = - \begin{vmatrix} s_1 & 1 \\ s_2 & s_1 \end{vmatrix}, \quad p_3 = \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 \\ s_2 & s_1 & 1 \\ s_3 & s_2 & 2s_1 \end{vmatrix},$$

$$p_4 = - \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 1 & 0 \\ s_3 & s_2 & 2s_1 & 1 \\ s_4 & s_3 & 3s_2 & 3s_1 \end{vmatrix}.$$

Veličině p_k se říká seminvariant řádu k nebo k -tý seminvariant. Uvážíme-li, že

$$\lg \Omega(\Theta) = \sum_{h=1}^n \lg \Omega_h(\lambda_h \Theta),$$

vidíme, že na př. pro součet odchylek $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$ bude

$$\begin{aligned} \lg \Omega(\Theta) &= \sum_{h=1}^n \lg \Omega_h(\Theta) = \\ &= -i\Theta \sum p_1 - \frac{\Theta^2}{2!} \sum p_2 + \frac{i\Theta^3}{3!} \sum p_3 + \dots, \end{aligned}$$

čili, že lze psáti

$$\lg \Omega(\Theta) = -i\Theta P_1 - \frac{\Theta^2}{2!} P_2 + \frac{i\Theta^3}{3!} P_3 + \dots,$$

kde P_k je rovno součtu k -tých seminvariantů jednotlivých odchylek. Uvažujeme-li celkovou chybu $\varepsilon = \lambda_1 \varepsilon_1$, jest

$$\begin{aligned} \lg \Omega(\Theta) &= \lg \Omega_1(\lambda_1 \Theta) = -i\Theta P_1 - \frac{\Theta^2}{2!} P_2 + \frac{i\Theta^3}{3!} P_3 + \dots = \\ &= -i\lambda_1 \Theta p_1 - \frac{\lambda_1^2 \Theta^2}{2!} p_2 + \frac{i\lambda_1^3 \Theta^3}{3!} p_3 + \dots \end{aligned}$$

V tomto případě je tedy P_k rovno k -tému seminvariantu chyby ε_1 , násobenému λ_1^k .

Obecně, je-li $\varepsilon = \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n$, plyne, že

$$\begin{aligned} \lg \Omega(\Theta) &= \sum_{h=1}^n \lg \Omega_h(\lambda_h \Theta) = \\ &= \sum_{h=1}^n \left\{ -i\lambda_h \Theta p_{1h} - \frac{\lambda_h^2 \Theta^2}{2!} p_{2h} + i \frac{\lambda_h^3 \Theta^3}{3!} p_{3h} + \dots \right\}, \end{aligned}$$

čili, že lze $\lg \Omega(\Theta)$ psáti zase ve tvaru

$$\lg \Omega(\Theta) = -i\Theta P_1 - \frac{\Theta^2}{2!} P_2 + \frac{i\Theta^3}{3!} P_3 + \dots,$$

kde

$$\begin{aligned} P_1 &= \lambda_1 p_{11} + \lambda_2 p_{12} + \dots + \lambda_n p_{1n}, \\ P_2 &= \lambda_1^2 p_{21} + \lambda_2^2 p_{22} + \dots + \lambda_n^2 p_{2n}, \\ P_3 &= \lambda_1^3 p_{31} + \lambda_2^3 p_{32} + \dots + \lambda_n^3 p_{3n} \text{ atd.} \end{aligned}$$

Nyní budeme předpokládati, že jednotlivé chyby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ jsou velmi četné a velmi malé. Protože první seminvariant je podle definice roven

$$p_{1h} = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_h \varphi_h(\varepsilon_h) d\varepsilon_h,$$

tedy vlastně roven aritmetickému průměru všech hodnot chyby ε_h , můžeme docílit vhodnou volbou středu, od něhož čítáme chyby, že první seminvariant vymizí.

Předpokládáme, že jsme to učinili pro všechny chyby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, a označíme

$$\left\{ \begin{array}{l} 0, p_{21}, p_{31}, p_{41}, \dots \\ 0, p_{22}, p_{32}, p_{42}, \dots \end{array} \right. \text{seminvarianty chyby } \left. \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{array} \right\} \text{ atd.}$$

Pak podle předcházejícího pro výslednou chybu

$$\varepsilon = \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n$$

bude

$$\begin{aligned} P_1 &= 0, \\ P_2 &= \lambda_1^2 p_{21} + \lambda_2^2 p_{22} + \dots + \lambda_n^2 p_{2n}, \\ P_3 &= \lambda_1^3 p_{31} + \lambda_2^3 p_{32} + \dots + \lambda_n^3 p_{3n}. \end{aligned}$$

Při tom ze vzorců pro p_2, p_3, p_4 plyne, že pro $p_1 = s_1 = 0$ bude $p_2 = s_2, p_3 = s_3, p_4 = s_4 - 3s_2^2$, podle vzorce (14) značí tedy p_2 a p_3 střední hodnoty druhých a třetích mocnin chyb.

Budeme předpokládati, že P_2 je konečné; dále, že počet chyb ε_i jest velmi značný a že střední hodnoty čtverců chyb $p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2n}$ jsou přibližně stejného řádu. Pak podmínka, že P_2 je konečné, předpokládá, že každá z hodnot $\lambda_h^2 p_{2h}$ je konečná hodnota, násobená $1 : n$, takže $\lambda_h \sqrt{p_{2h}}$ je řádu $1 : \sqrt{n}$.

Potom $\lambda^3 h p_{3h}$ je řádu $\frac{p_{3h}}{p_{2h}^{\frac{3}{2}} n^{\frac{3}{2}}}$, tedy P_3 bude řádu $\frac{p_{3h}}{p_{2h}^{\frac{3}{2}} n^{\frac{3}{2}}}$.

Pokud veličina $\frac{p_{3h}}{p_{2h}^{\frac{3}{2}}}$ bude konečná, bude P_3 — vzhledem k faktoru $n^{-\frac{3}{2}}$ — malé proti P_2 .

Podobně plyne, že P_4 je malé proti P_3 . Pro výslednou chybu tedy bude

$$\lg \Omega(\Theta) = -\frac{\Theta^2}{2} P_2 + i \frac{\Theta^3}{3!} P_3 + \frac{\Theta^4}{4!} P_4 + \dots,$$

kde P_i klesá s rostoucím i .

Pravděpodobnost, že výsledná chyba je mezi ε a $\varepsilon + d\varepsilon$, bude podle vzorce (13) rovna

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(\Theta) e^{i\Theta\varepsilon} d\Theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Theta\varepsilon - \frac{\Theta^2}{2} P_2 + i \frac{\Theta^3}{3!} P_3 + \frac{\Theta^4}{4!} P_4 + \dots} d\Theta. \end{aligned} \quad (15)$$

Dají-li se zanedbati členy s P_3 a P_4 proti členu s P_2 , jest

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Theta\varepsilon - \frac{1}{2}\Theta^2 P_2} d\Theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\Theta^2 P_2} (\cos \Theta\varepsilon + i \sin \Theta\varepsilon) d\Theta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\Theta^2 P_2} \cos \Theta\varepsilon d\Theta, \end{aligned}$$

a protože

$$\int_0^{\infty} e^{-A\varepsilon^2} \cos b\varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-\frac{b^2}{4A}}, \quad *)$$

*) K. Petr: Počet integrální, Praha 1915, str. 225.

bude

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi P_2}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2P_2}}, \quad (15')$$

kde

$$P_2 = \lambda_1^2 p_{21} + \lambda_2^2 p_{22} + \dots + \lambda_n^2 p_{2n}.$$

Ve 2. odstavci jsme uvedli některé podmínky, jejichž splnění zajišťuje, že měřické chyby se řídí normálním zákonem četnosti. Byly to:

a) Podmínky Schiaparelliho o vlastnostech nejpravděpodobnější hodnoty odvozené z měření, doplněné další podmínkou, že funkce četnosti pro uvažované chyby mají tvar $\varphi_i(\varepsilon_i)$.

b) Podmínka, že skutečná měřická chyba je rovna lineární celistvé funkci částečných chyb, z nichž každá se řídí normálním zákonem četnosti.

c) Podmínka, že skutečná měřická chyba je rovna lineární celistvé funkci částečných chyb, z nichž každá se řídí zákonem četnosti $\varphi_i(\varepsilon_i)$, jestliže počet částečných chyb je dostatečně velký a jsou-li splněny jisté podmínky o středních hodnotách druhých a vyšších mocnin částečných chyb.

Je-li některý z předpokladů a), b) nebo c) splněn, můžeme býti jisti, že měřické chyby se řídí normálním zákonem četnosti, a z toho plyne, že je nutno v těchto případech vyrovnávat podle metody nejmenších čtverců; dále, že hodnoty neznámých takto vypočtené jsou nejpravděpodobnější hodnoty, jež plynou z výsledků měření; že mají nejmenší střední chyby a největší váhy ze všech lineárních celistvých funkcí výsledků měření l_1, l_2, \dots, l_n ; a konečně, že extrémní možné chyby, jež jsou podle počtu měření rovné dvojnásobným, trojnásobným nebo čtyřnásobným středním chybám, vymezují obory, uvnitř nichž jsou pravděpodobně skutečné hodnoty neznámých výsledných hodnot.

3. Druhé zdůvodnění metody nejmenších čtverců.
Nechť hledané veličiny x, y, z mají býti zase určeny z rovnic

$$a_i x + b_i y + c_i z = l_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (16)$$

kde l_i jsou prosté členy odvozené z výsledků měření. Předpokládáme, že l_i nemají stejnou váhu.

Laplace uvažuje o této úloze asi takto: Rovnice (16) nutno nějak kombinovati, abychom dostali konečné rovnice pro výpočet neznámých. Ale jak to udělati nejvýhodněji?

Nechceme užívatí jiných konečných rovnic než lineárních. To je podmínka nutná, jde-li o velký počet pozorování, jinak by vylučování neznámých a jejich výpočet byl nepraktický.

Všechny způsoby kombinací rovnic (16), má-li z nich býti vytvořena konečná rovnice lineární, vedou k násobení rovnic (16) jistými faktory a k utvoření součtu těchto součinů. Označíme-li faktory k výpočtu neznámé x písmeny $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, budeme míti pro x konečnou rovnici

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i x + b_i y + c_i z - l_i) = 0,$$

při čemž

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i = 0, \quad (17)$$

takže

$$x = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \dots + \lambda_n l_n. \quad (17')$$

Kdyby $n = 3$, stačily by rovnice (17) k výpočtu faktorů $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ i k výpočtu neznámé $x = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \lambda_3 l_3$. Pokud však $n > 3$, nestačí rovnice (17) k určení faktorů λ . Nutno tedy připojiti další podmínku. Chceme-li dostati postup nejvýhodnější, musíme hledati takovou soustavu faktorů $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, aby čtverec střední chyby v každé vypočtené neznámé byl nejmenší, nebo její váha největší.

Podle této úvahy Laplaceovy*) postupujeme takto: Jak jsme viděli (I, 3) a ještě uvidíme (VII, 3b), je za jistých předpokladů převrácená hodnota váhy p_x pro neznámou x ,

*) Théorie analytique des probabilités, II, § 24.

plynoucí ze vzorce (17'), rovna

$$\frac{1}{p_x} = \frac{\lambda_1^2}{p_1} + \frac{\lambda_2^2}{p_2} + \dots + \frac{\lambda_n^2}{p_n}, \quad (18)$$

jsou-li p_1, p_2, \dots, p_n váhy jednotlivých rovnic (16).

Má tedy býti výraz (18) minimem při podmínkách (17). Funkce F (viz IV, 2) je zde rovna

$$F = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{p_i} - 2k_1 \sum_{i=1}^n (\lambda_i a_i - 1) - 2k_2 \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i - 2k_3 \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i.$$

Podmínky minima jsou

$$\frac{\lambda_i}{p_i} = k_1 a_i + k_2 b_i + k_3 c_i. \quad (19)$$

Dosadíme-li odtud za λ_i do podmínek (17), bude

$$\begin{aligned} k_1 [paa] + k_2 [pab] + k_3 [pac] &= 1, \\ k_1 [pab] + k_2 [pbb] + k_3 [pbc] &= 0, \\ k_1 [pac] + k_2 [pbc] + k_3 [pcc] &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

a při tom

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \dots + \lambda_n l_n = \\ &= k_1 [pal] + k_2 [pbl] + k_3 [pcl]. \end{aligned} \quad (20')$$

Označíme-li písmenem Δ determinant soustavy rovnic (20), bude

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} [pbb], [pbc] \\ [pbc], [pcc] \end{vmatrix}, & k_2 &= -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} [pab], [pbc] \\ [pac], [pcc] \end{vmatrix}, \\ k_3 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} [pab], [pbb] \\ [pac], [pbc] \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

a tedy podle vzorce (20') bude

$$x = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} [pal], [pab], [pac] \\ [pbl], [pbb], [pbc] \\ [pcl], [pcb], [pcc] \end{vmatrix}. \quad (21)$$

Kdybychom k určení neznámých x, y, z položili podmínku,

aby byl minimální součet čtverců odchylek $v_i = a_i x + b_i y + c_i z - l_i$, při čemž každý sčítanec v_i^2 vchází do součtu násobený příslušnou vahou p_i , t. j. má-li býti minimální součet

$$\sum_{i=1}^n p_i (a_i x + b_i y + c_i z - l_i)^2,$$

musí býti (srovn. III, 1)

$$\begin{aligned} [paa] x + [pab] y + [pac] z &= [pal], \\ [pab] x + [pbb] y + [pbc] z &= [pbl], \\ [pac] x + [pbc] y + [pcc] z &= [pcl], \end{aligned}$$

a odtud zase

$$x = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} [pal], [pab], [pac] \\ [pbl], [pbb], [pbc] \\ [pcl], [pcb], [pcc] \end{vmatrix}.$$

[viz (21)]. Podobně pro y a z .

Je tedy patrné: Podmínky, aby konečné rovnice pro neznámé x, y, z byly lineární a aby váhy p_x, p_y, p_z neznámých x, y, z byly maximální, vedou ke stejným hodnotám neznámých jako metoda nejmenších čtverců.

A naopak: Methoda nejmenších čtverců vede k takovým hodnotám neznámých x, y, z , které mají největší váhy (nejmenší střední chyby) ze všech lineárních celistvých funkcí hodnot l_1, l_2, \dots, l_n .

Podle tohoto druhého zdůvodnění metody nejmenších čtverců nejsou vyrovnané hodnoty neznámých nejpravděpodobnějšími hodnotami, jako byly v případě, kdy jsme mohli předpokládati, že měřické chyby se řídí normálním zákonem četnosti. Střední a extrémní možná chyba nemá v tomto případě významu pro vymezení oboru, v němž jsou pravděpodobně skutečné hodnoty neznámých.

K tomuto druhému zdůvodnění metody nejmenších čtverců připojíme několik doplňků.

a) Podmínku, aby konečné rovnice pro výpočet neznámých byly lineární, autoři po Laplaceovi skoro vesměs pře-

cházejí bez povšimnutí. Ch. A. Vogler*) odůvodňuje lineárnost konečných rovnic pro výpočet neznámých asi takto:

Vyrovnané hodnoty neznámých x, y, z jsou jakési funkce prostých členů, a to takové funkce, že

1. hodnoty neznámých, které vyhovují všem odchylkovým rovnicím, musí zůstatí nezměněny a

2. přesné hodnoty prostých členů vedou k přesným hodnotám neznámých, které zase splňují všechny přesné odchylkové rovnice.

Píšeme vyrovnané hodnoty

$$x = f_x(l_1, l_2, \dots, l_n), \quad y = f_y(l_1, l_2, \dots, l_n), \quad z = f_z(l_1, l_2, \dots, l_n).$$

Dosadíme-li tyto hodnoty za x, y, z do rovnic (16), bude

$$a_i x + b_i y + c_i z = l_i + \bar{l}_i, \quad (16')$$

takže $l_i + \bar{l}_i$ můžeme považovati za takové prosté členy, že všechny odchylkové rovnice (16') se dají splniti neznámými

$$\begin{aligned} x &= f_x(l_1 + \bar{l}_1, l_2 + \bar{l}_2, \dots, l_n + \bar{l}_n), \\ y &= f_y(l_1 + \bar{l}_1, l_2 + \bar{l}_2, \dots, l_n + \bar{l}_n), \\ z &= f_z(l_1 + \bar{l}_1, l_2 + \bar{l}_2, \dots, l_n + \bar{l}_n), \end{aligned}$$

při čemž podle předpokladu 1:

$$\begin{aligned} f_x(l_1, l_2, \dots, l_n) &= f_x(l_1 + \bar{l}_1, l_2 + \bar{l}_2, \dots, l_n + \bar{l}_n), \\ f_y(l_1, l_2, \dots, l_n) &= f_y(l_1 + \bar{l}_1, l_2 + \bar{l}_2, \dots, l_n + \bar{l}_n), \\ f_z(l_1, l_2, \dots, l_n) &= f_z(l_1 + \bar{l}_1, l_2 + \bar{l}_2, \dots, l_n + \bar{l}_n). \end{aligned} \quad (22)$$

Označíme-li $l_i + \varepsilon_i$ přesné hodnoty prostých členů a $x + \xi, y + \eta, z + \zeta$ přesné hodnoty neznámých, musí býti podle předpokladu 2:

$$\begin{aligned} x + \xi &= f_x(l_1 + \varepsilon_1, l_2 + \varepsilon_2, \dots, l_n + \varepsilon_n), \\ y + \eta &= f_y(l_1 + \varepsilon_1, l_2 + \varepsilon_2, \dots, l_n + \varepsilon_n), \\ z + \zeta &= f_z(l_1 + \varepsilon_1, l_2 + \varepsilon_2, \dots, l_n + \varepsilon_n). \end{aligned} \quad (23)$$

*) Didaktisches zur Ausgleichungsrechnung. Z. f. Vermessungswesen, Bd. 33 (1904), str. 394—402 a 609—613.

Jde-li o druhé zdůvodnění metody nejmenších čtverců, založené na vzorci pro váhu výsledné hodnoty, jejíž chyba je lineární funkcí částečných chyb $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, musíme předpokládati, že ε_i jsou tak malé veličiny, že v Taylorových rozvojiích funkcí f_x, f_y, f_z můžeme zanedbat členy od druhého řádu, že tedy místo (23) stačí psáti

$$\begin{aligned}\xi &= \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n, \\ \eta &= \lambda'_1 \varepsilon_1 + \lambda'_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda'_n \varepsilon_n, \\ \zeta &= \lambda''_1 \varepsilon_1 + \lambda''_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda''_n \varepsilon_n,\end{aligned}\tag{23'}$$

kde

$$\lambda_i = \frac{\partial f_x}{\partial l_i}, \quad \lambda'_i = \frac{\partial f_y}{\partial l_i}, \quad \lambda''_i = \frac{\partial f_z}{\partial l_i}.$$

Tyto derivace se mohou vypočísti na př. pro střední hodnoty l'_1, l'_2, \dots, l'_n v uvažovaném oboru.

Je zřejmé, že v téže úvaze nemůžeme jednou klásti za funkce f lineární výrazy a po druhé přesné výrazy, pokud proměnné jsou v přibližně stejných mezích. Předpokládáme-li tedy, že odchylky \bar{l}_i jsou přibližně ve stejných mezích jako skutečné chyby ε_i , musíme místo rovnic (22) psáti

$$\begin{aligned}\lambda_1 \bar{l}_1 + \lambda_2 \bar{l}_2 + \dots + \lambda_n \bar{l}_n &= 0, \\ \lambda'_1 \bar{l}_1 + \lambda'_2 \bar{l}_2 + \dots + \lambda'_n \bar{l}_n &= 0, \\ \lambda''_1 \bar{l}_1 + \lambda''_2 \bar{l}_2 + \dots + \lambda''_n \bar{l}_n &= 0.\end{aligned}\tag{22'}$$

Protože podle předpokladu 2 musí býti odchylkové rovnice (16) splněny, klademe-li místo l_i všude $l_i + \varepsilon_i$ a místo x, y, z po řadě $x + \xi, y + \eta, z + \zeta$, bude

$$a_i (x + \xi) + b_i (y + \eta) + c_i (z + \zeta) = l_i + \varepsilon_i,$$

a odečteme-li od této rovnice

$$a_i x + b_i y + c_i z = l_i + \bar{l}_i, \quad - \tag{16'}$$

bude

$$a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta = \varepsilon_i - \bar{l}_i.$$

Násobíme-li po řadě λ_i a sečteme, bude — vzhledem k (22')

a k (23')

$$[a\lambda] \xi + [b\lambda] \eta + [c\lambda] \zeta = [\varepsilon\lambda] = \xi,$$

podobně

$$[a\lambda'] \xi + [b\lambda'] \eta + [c\lambda'] \zeta = [\varepsilon\lambda'] = \eta, \quad (24)$$

$$[a\lambda''] \xi + [b\lambda''] \eta + [c\lambda''] \zeta = [\varepsilon\lambda''] = \zeta.$$

Mysleme si několik řad měření a necht' hodnoty l_1, l_2, \dots, l_n jsou vždy v uvažovaném oboru. Pak pro každou řadu dojdeme k rovnicím (24) se stejnými koeficienty, ale nestejnými ξ, η, ζ . Z toho je patrné, že rovnice (24) musí býti splněny identicky pro jakékoli ξ, η, ζ , t. j. musí býti

$$\begin{aligned} [a\lambda] &= 1, [b\lambda] = 0, [c\lambda] = 0, \\ [a\lambda'] &= 0, [b\lambda'] = 1, [c\lambda'] = 0, \\ [a\lambda''] &= 0, [b\lambda''] = 0, [c\lambda''] = 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Rovnice (22'), dosadíme-li do nich z rovnic (16') za \bar{l}_i , nabudou tvaru

$$[a\lambda] x + [b\lambda] y + [c\lambda] z - [l\lambda] = 0,$$

z nich podle (25) dostaneme $x = [l\lambda]$, $y = [l\lambda']$ a $z = [l\lambda'']$ [viz (17')].

b) Zbývá ukázati, jak byl odvozen vzorec

$$\frac{1}{p_x} = \frac{\lambda_1^2}{p_1} + \frac{\lambda_2^2}{p_2} + \dots + \frac{\lambda_n^2}{p_n} \quad (18)$$

pro váhu lineární funkce částečných chyb.

α) V odstavci VII, 1b) bylo dokázáno: Řídí-li se chyby ε_i , $i = 1, 2, \dots, n$, normálním zákonem četnosti

$$\frac{h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2 \varepsilon_i^2},$$

bude pravděpodobnost, že výsledná chyba $\varepsilon = \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n$ je v mezích od ε do $\varepsilon + d\varepsilon$, rovna

$$\frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 \varepsilon^2} d\varepsilon,$$

kde míra přesnosti

$$H = \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \frac{\lambda_2^2}{h_2^2} + \dots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2}}}.$$

Pravděpodobnost, že výsledná chyba jest v mezích od $-\varepsilon$ do $+\varepsilon$ bude tedy $\Phi(H\varepsilon)$ (srovn. I, 8). Ať je ε jakékoli, bude tato pravděpodobnost větší, je-li větší míra přesnosti H . Podobnou úvahou došel Laplace k požadavku, že míra přesnosti H má býti co možná největší.

A zavedeme-li místo míry přesnosti h_i a H váhy p_i a p_x , při čemž

$$h_i m_i = h_i \frac{m_0}{\sqrt{p_i}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

[viz I, (24') a (16')], čili

$$\frac{1}{h_i^2} = \frac{2m_0^2}{p_i} \text{ a podobně } \frac{1}{H^2} = \frac{2m_0^2}{p_x},$$

bude

$$\frac{1}{p_x} = \frac{\lambda_1^2}{p_1} + \frac{\lambda_2^2}{p_2} + \dots + \frac{\lambda_n^2}{p_n}. \quad (18)$$

Tento výsledek je tedy založen na předpokladu, že chyb ε_i je konečný počet (rovný zde počtu měření) a že se všechny řídí normálním zákonem četnosti.

β) Gauss vyšel od pojmu střední chyby a ze vzorce [I, (12'')] pro lineární funkci částečných chyb, který byl dokázán za předpokladu, že měřené veličiny jsou na sobě nezávislé a že funkce četnosti částečných chyb jsou sudé funkce.

Zavedeme-li zase váhy jako veličiny nepřímo úměrné čtvercům středních chyb (srovn. I, 6), dostaneme zase vzorec (18).

γ) Vzorec (18) byl konečně odvozen*) z těchto jednodušších předpokladů o vlastnostech váhy:

*) F. Bernstein und W. S. Baer: Ein Axiomensystem der Methode der kleinsten Quadrate, Math. Annalen, 1915, str. 284—294. — Whittaker-Robinson, l. c. str. 228—231.

1. Je-li x_i naměřená hodnota pro veličinu x , označíme-li váhu veličiny x_i písmenem p_i a je-li λ nějaké číslo, pak hodnotě λx_i veličiny λx přísluší váha $p_i f(\lambda)$, kde $f(\lambda)$ je nějaká funkce λ .

2. Přísluší-li hodnotě x_i veličiny x váha p_i a nezávisle naměřené hodnotě y_i veličiny y váha q_i , přísluší hodnotě $x_i + y_i$ pro součet $x + y$ váha r_i , při čemž

$$\psi(r_i) = \psi(p_i) + \psi(q_i). \quad (26)$$

3. Přísluší-li dvěma nezávisle naměřeným hodnotám téže veličiny stejná váha rovná 1, přísluší aritmetickému průměru obou naměřených hodnot váha 2.

4. Přísluší-li naměřeným hodnotám x_1, \dots, x_n stejná váha rovná 1, přísluší součtu $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ váha řádu $1 : n$, t. j. násobíme-li váhu součtu $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ počtem n , je součin konečný, roste-li n nad každé číslo.

Z axiomu 1 plyne: Je-li u nějaké číslo, přísluší hodnotě $u\lambda x_i$ veličiny $u\lambda x$ váha rovná $p_i f(u\lambda)$, ale také rovná $p_i f(u) \cdot f(\lambda)$. Funkce f musí tedy splňovati podmínku (t. zv. funkcionální rovnici)

$$f(u\lambda) = f(u) \cdot f(\lambda). \quad (27)$$

Jediná funkce $f(\lambda)$ proměnné $\lambda > 0$, která je konečná v intervalu $\varepsilon, \varepsilon'$, při čemž $0 < \varepsilon < \varepsilon'$, a která hová funkcionální rovnici (27) pro všechny kladné hodnoty proměnných λ, u , jest funkce λ^k , kde k je reálná konstanta.*) Tedy: váha příslušná hodnotě λx_i veličiny λx je

$$p_i \lambda^k. \quad (27')$$

Podobně váha příslušná hodnotě λy_i veličiny λy je $q_i \lambda^k$ a váha příslušná hodnotě $\lambda (x_i + y_i)$ je $r_i \lambda^k$, při čemž podle předpokladu 2 musí býti

$$\psi(r_i \lambda^k) = \psi(p_i \lambda^k) + \psi(q_i \lambda^k). \quad (28)$$

Veličina r_i je podle vzorce (26) funkcí proměnných p_i a q_i . Derivujeme-li rovnici (26) podle p_i , jest

*) K. Petr: Počet diferenciální, str. 117.

$$\psi'(r_i) \frac{\partial r_i}{\partial p_i} = \psi'(p_i)$$

a podobně z rovnice (28):

$$\psi'(r_i \lambda^k) \frac{\partial r_i}{\partial p_i} \lambda^k = \psi'(p_i \lambda^k) \lambda^k,$$

tedy dělením

$$\frac{\psi'(p_i \lambda^k)}{\psi'(p_i)} = \frac{\psi'(r_i \lambda^k)}{\psi'(r_i)} = \frac{\psi'(q_i \lambda^k)}{\psi'(q_i)}.$$

Odtud je patrné, že podíl $\frac{\psi'(z \lambda^k)}{\psi'(z)}$ je nezávislý na z . A protože $z \lambda^k$ je souměrná funkce vzhledem k z a λ^k , nezávisí funkce $\frac{\psi'(z \lambda^k)}{\psi'(z) \psi'(\lambda^k)}$ ani na z , ani na λ^k a je rovna konstantě c . Píšeme-li u místo λ^k , musí funkce ψ' splňovati funkcionální rovnici $\psi'(zu) = c \psi'(z) \psi'(u)$. Podle dřívějšího musí býti funkce $\psi'(z)$ rovna $\frac{1}{c} \cdot z^{k'}$ a tedy $\psi(z) = \frac{1}{c(k' + 1)} z^{k' + 1}$.

Konstantou $\frac{1}{c(k' + 1)}$ můžeme ve vzorci (26) krátiti, takže můžeme psáti

$$\psi(z) = z^{k''}, \quad (29)$$

kde $k'' = k' + 1$.

Necht' jsou x_1, x_2 dvě nezávislé hodnoty veličiny x , každá o váze 1. Pak $\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2$ jsou dvě nezávislé hodnoty veličiny $\frac{1}{2}x$, každá o váze $\frac{1}{2}k$ [srovn. vzorec (27')]. A $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ jest hodnota veličiny x , jíž přísluší podle vzorce (26) a (29) váha r , a jest

$$(r)^{k' + 1} = \frac{1}{2^{kk''}} + \frac{1}{2^{kk''}} = \frac{1}{2^{kk'' - 1}}.$$

Podle předpokladu 3 musí býti $r = 2$, tedy $2^{k''} = \frac{1}{2^{kk'' - 1}}$,

čili $k''(k + 1) = 1$. (30)

Je-li x'_1 hodnota veličiny x_1 o váze p_1 a x'_2 nezávisle určená hodnota veličiny x_2 o váze p_2 , pak $\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2$ je hodnota veličiny $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ o váze r , při čemž

$$r^{k''} = (p_1 \lambda_1^k)^{k''} + (p_2 \lambda_2^k)^{k''} = p_1^{k''} \lambda_1^{1-k''} + p_2^{k''} \lambda_2^{1-k''}. \quad (31)$$

Je-li dále x'_3 nezávisle určená hodnota veličiny x_3 o váze p_3 , pak $\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 + \lambda_3 x'_3$ je hodnota veličiny $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$ o váze r' , při čemž

$$r'^{k''} = r^{k''} + (p_3 \lambda_3^k)^{k''} = p_1^{k''} \lambda_1^{1-k''} + p_2^{k''} \lambda_2^{1-k''} + p_3^{k''} \lambda_3^{1-k''}$$

atd.

$$(31')$$

Jsou-li x'_1, x'_2, \dots, x'_n hodnoty pro veličiny x_1, x_2, \dots, x_n , každá o váze rovné 1, pak $x'_1 + x'_2 + \dots + x'_n$ je hodnota pro součet $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ a příslušná váha r plyne podle

vzorce (31') z rovnice $r^{k''} = n$, tedy $r = n^{\frac{1}{k''}}$. Podle předpo-

kladu 4 musí býti $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{k''} + 1}$ konečná, tedy

$$\frac{1}{k''} + 1 = 0, \quad k'' = -1.$$

Jsou-li tedy x'_1, x'_2, \dots, x'_n hodnoty pro veličiny x_1, x_2, \dots, x_n o vahách rovných p_1, p_2, \dots, p_n , je $\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 + \dots + \lambda_n x'_n$ hodnota veličiny $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$, jejíž váha p_x je dána podle vzorce (31') vzorcem

$$\frac{1}{p_x} = \frac{\lambda_1^2}{p_1} + \frac{\lambda_2^2}{p_2} + \dots + \frac{\lambda_n^2}{p_n}. \quad (18)$$

*

Ve 3. odstavci jsme uvedli některé podmínky, za nichž je platné druhé zdůvodnění metody nejmenších čtverců. Kromě případu, kdy se chyby měřických výsledků řídí normálním zákonem četnosti (srovn. odst. 2), uvedli jsme tyto podmínky:

a) Výsledné hodnoty mají býtí lineární celistvé funkce hodnot l_1, l_2, \dots, l_n plynoucích z měření.

b) Je-li váha chyby ε_i rovna p_i , je váha p_x funkce $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \dots + \lambda_n\varepsilon_n$ dána vzorcem

$$\frac{1}{p_x} = \frac{\lambda_1^2}{p_1} + \frac{\lambda_2^2}{p_2} + \dots + \frac{\lambda_n^2}{p_n}.$$

Tato druhá podmínka byla odvozena jednak (podle Gausse) pro případ, že měřené veličiny jsou na sobě nezávislé a že funkce četnosti jednotlivých chyb $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ jsou sudé funkce, jednak z některých jednodušších předpokladů o vlastnostech váhy. [Viz β) resp. γ).]

Je-li splněn předpoklad β) nebo γ), a uznáme-li jako nutný předpoklad a), pak nutno zase vyrovnávati podle metody nejmenších čtverců. Hodnoty neznámých, takto vypočtené, mají nejmenší střední chyby a největší váhy. Nejsou to však nejpravděpodobnější hodnoty, plynoucí z výsledků měření, a střední a extrémní možné chyby nemají v tomto případě významu pro vymezení oboru, v němž jsou pravděpodobně skutečné hodnoty neznámých.

4. Měřické chyby se neřídí ani normálním zákonem četnosti, ani nejsou splněny předpoklady druhého zdůvodnění metody nejmenších čtverců. (Viz odst. 3. Na př. funkce četnosti není sudá funkce, nebo měřické chyby nejsou nahodilé atd.) V tomto případě vyrovnání podle metody nejmenších čtverců nepodává ani hodnoty nejpravděpodobnější, ani hodnoty o největší váze a nemá také smyslu odhadovati přesnost měření a výsledků pomocí středních nebo průměrných chyb, protože (podle odst. I, 3) to předpokládá, že funkce četnosti jsou sudé funkce.

Ale i v tom případě podává metoda nejmenších čtverců snadno vypočítatelné a určité vyrovnané hodnoty; má ty výhody, na něž upozornil již Legendre.