Otakar Borůvka

Sur les surfaces dont les lignes de Segre sont des géodésiques

Tôhoku Math. Journal 32, 1930, 292-302

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500022

With the Author's Compliments

OTAKAR BORŮVKA:

Sur les surfaces dont les lignes de Segre sont des géodésiques

Extracted from
THE TÔHOKU MATHEMATICAL JOURNAL, Vol. 32, Nos. 3, 4,
edited by T. HAYASHI, M. FUJIWARA, T. KUBOTA, Y. OKADA and
T. TAKASU, College of Science, Tôhoku Imperial University,
Sendai, Japan

June 1930

Sur les surfaces dont les lignes de Segre sont des géodésiques,

par

Otakar Borůvka à Brno, Tchécoslovaquie.

Dans un récent article, M. G. Fubini[1] avait fait quelques remarques intéressantes sur une méthode de la recherche des surfaces dont la normale métrique, en chaque point, coïncide avec une droite quelconque du faisceau canonique et, dans cette connexion, il avait considéré, en particulier, la directrice de Wilczynski et la normale projective. Or, il me semble que la question de la recherche des surfaces jouissant de la propriété considérée par M. G. Fubini devient particulièrement intéressante, si l'on considère, dans le faisceau canonique, l'axe de Čech. En effet, dans un point quelconque d'une surface non réglée, cette axe étant définie comme la droite d'intersection des plans osculateurs de trois courbes de Segre, passant par le point considéré, il est clair que la recherche des surfaces dont la normale métrique, en chaque point, coïncide avec l'axe de Čech est équivalente à la recherche des surfaces dont les trois familles de lignes de Segre sont des géodésiques. On voit en particulier que, si sur une surface deux famille de courbes de Segre sont géodésiques il en est de même pour la troisième.

Je me suis occupé de la recherche de telles surfaces plongées dans l'espace euclidien, ayant appliqué la méthode du repère mobile de M. E. Cartan, et je me permets d'établir dans cet article, les considérations principales que j'ai faites à ce sujet. J'ai trouvé une famille de ∞^2 surfaces intéressées qui sont caractérisées par la propriété d'avoir les lignes de courbure formées par des courbes de Segre-Darboux; les surfaces en question appartiennent donc aux surfaces moulures. Elles sont des surfaces W, la relation entre les rayons principaux de courbure étant algébrique et du dixième degré. Malheureusement, il existe une lacune essentielle dans mes résultats: je ne sais pas si les surfaces trouvées sont toutes les surfaces intéressées ou bien s'il en existe encore d'autres. Pour répondre à cette ques-

(1) Invarianti proiettivi, metrici, affini di una superficie 1 Boll. dell'Unione Matematica Italiana, (1927).

tion j'étais amené aux calculs que je n'ai pu pas faire effectivement à cause de leur longueur. Mais, je suis parvenu de montrer que, s'il existe encore d'autres surfaces dont les lignes des Segre sont des géodésiques, elles dépendent de sept constantes arbitraires au plus.

1. Plaçons nous dans l'espace euclidien à trois dimensions et imaginons une surface (M). À chaque point M de cette surface faisons associer un repère mobile, formé par trois vecteurs rectangulaires unitaires e_1, e_2, e_3 ayant pour l'origine le point M. Si l'on passe du point M au point infiniment voisin M' le repère subit une variation et on aura les formules de la forme

$$(1)\qquad \begin{aligned} dM &= \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3, \\ de_i &= \omega_{i1} e_1 + \omega_{i2} e_2 + \omega_{i3} e_3, \quad (i=1,\ 2,\ 3) \end{aligned}$$

les ω étant des formes différentielles linéaires aux paramètres dont dépend la position du repère mobile. À cause des suppositions fait au sujet des vecteurs e, ces formes satisfont aux relations linéaires

$$(2)\qquad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0,$$

quelques soient les deux indices i, j (1, 2, 3) distincts ou non et en outre, elles verifient les formules de structure de l'espace euclidien ambiant

$$(3)\qquad \omega'_i = \sum_{r=1}^{3} [\omega_r \omega_{ri}]; \qquad \omega'_{ij} = \sum_{r=1}^{3} [\omega_{ir} \omega_{rj}].$$

2. Nous allons particulariser le choix du repère mobile de manière que 1° en chaque point M les vecteurs e_1, e_2 soient tangents à la surface 2° l'équation des lignes de courbure soit $\omega_1\omega_2 = 0$.

Pour que la première condition soit satisfaite il faut et il suffit que l'on ait

$$(4)\qquad \omega_3 = 0.$$

Cette équation conduit à la relation quadratique

$$(5)\qquad [\omega_1 \omega_{13}] + [\omega_2 \omega_{23}] = 0$$

de sorte qu'on voit que ω_{13}, ω_{23} sont des combinaisons linéaires de ω_1, ω_2 qui s'expriment par les formules de la forme

$$(6)\qquad \begin{aligned} \omega_{13} &= a\omega_1 + b\omega_2, \\ \omega_{23} &= b\omega_1 + c\omega_2, \end{aligned}$$

et on a

$$(7)\qquad \begin{aligned} &[\omega_1(da - 2b\omega_{12})] + [\omega_2(db + a - c\omega_{12})] = 0, \\ &[\omega_1(db + \overline{a - c}\,\omega_{12})] + [\omega_2(dc + 2b\omega_{12})] = 0. \end{aligned}$$

Quant à la deuxième condition, il faut et il suffit que, le long de $\omega_1\omega_2=0$, les normales à (M) forment des surfaces développables. Or, comme le vecteur e_3 est normal à (M), pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que l'équation

$$\omega_2\omega_{13}-\omega_1\omega_{23}=0,$$

ou bien

$$b(\omega_2^2-\omega_1^2)+\overline{a-c}\,\omega_1\omega_2=0,$$

soit satisfaite en vertu de $\omega_1\omega_2=0$. Cela donne

$$b=0,$$

de sorte que les formules (6) s'écrivent

$$\omega_{13}=a\omega_1, \qquad \omega_{23}=c\omega_2, \tag{8}$$

et les relations (7) deviennent

$$\begin{aligned}&[\omega_1 da]+\overline{a-c}[\omega_2\omega_{12}]=0,\\&\overline{a-c}[\omega_1\omega_{12}]+[\omega_2 dc]=0.\end{aligned} \tag{9}$$

Or, il est facile de voir la signification géométrique de fonctions a et c. En effet, si l'on se déplace sur une ligne de courbure quelconque de la famille $\omega_2=0$ par exemple, on vérifie facilement que la relation

$$M-\frac{1}{a}e_3=M+dM-\frac{1}{a}(e_3+de_3)$$

a lieu; par suite, en chaque point M de la surface, $\dfrac{1}{a}$ est le rayon principale de la courbure associé aux lignes de courbure $\omega_2=0$. De même, en chaque point M, $\dfrac{1}{c}$ est le rayon principale de la courbure associé aux lignes de courbure $\omega_1=0$. Dorénavant nous écrirons c_2 au lieu de a et c_1 au lieu de c et nous allons exclure de nos considérations les deux cas $c_1-c_2=0$, $c_1c_2=0$ qui, évidemment, ne présentent aucun intêret; nous allons donc supposer $c_1-c_2\neq 0$, $c_1c_2\neq 0$.

3. Cela étant, nous allons exprimer la condition que, sur la surface (M), les lignes de Segre soient des géodésiques. En désignant par u, v les variables indépendantes et en posant

$$F_2=(M, M_u, M_v, d^2M)=\lambda(a_{11}du^2+2a_{12}dudv+a_{22}dv^2),$$

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt[4]{|a_{11}a_{22}-a_{12}^2|}},$$

on sait que l'équation de courbes de Darboux est déterminée par la forme différentielle cubique, apolaire à la forme F_2,

$$F_3=\lambda(M, M_u, M_v, d^3M)-\frac{3}{2}dF_2.$$

On en déduit, par un calcul facile, l'équation de lignes de Darboux

$$\omega_1^2\left(\frac{3c_2}{c_1}dc_1-dc_2\right)-8\overline{c_2-c_1}\omega_1\omega_2\omega_3+\omega_2^2\left(\frac{3c_1}{c_2}dc_2-dc_1\right)=0. \tag{10}$$

Or, les formules (9) permettent de poser

$$\begin{aligned} dc_1&=c_{11}\omega_1+c_{12}\omega_2,\\ \overline{c_2-c_1}\omega_{12}&=c_{22}\omega_1+c_{11}\omega_2,\\ dc_2&=c_{21}\omega_1+c_{22}\omega_2, \end{aligned} \tag{11}$$

et, dans ces notations, l'équation (10) prend la forme

$$\left(\frac{3c_2}{c_1}c_{11}-c_{21}\right)\omega_1^3+\left(\frac{3c_2}{c_1}c_{12}-\cancel{6}c_{22}\right)\omega_1^2\omega_2 \tag{12}$$

/ 9

$$+\left(\frac{3c_1}{c_2}c_{21}-\cancel{6}c_{11}\right)\omega_1\omega_2^2+\left(\frac{3c_1}{c_2}c_{22}-c_{12}\right)\omega_2^3=0.$$

Si l'on introduit les combinaisons linéaires

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_1&=\sqrt{c_2}\omega_1+i\sqrt{c_1}\omega_2,\\ \omega_2&=\sqrt{c_2}\omega_1-i\sqrt{c_1}\omega_2, \end{aligned}\qquad (i=\sqrt{-1}) \tag{13}$$

cette équation s'écrit tout simplement

$$\left(\frac{1}{\sqrt{c_2}}\cdot\overline{\frac{3c_{11}}{c_1}-\frac{c_{21}}{c_2}}+\frac{i}{\sqrt{c_1}}\cdot\overline{\frac{3c_{22}}{c_2}-\frac{c_{12}}{c_1}}\right)\overline{\omega}_1^3 \tag{14}$$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{c_2}}\cdot\overline{\frac{3c_{11}}{c_1}-\frac{c_{21}}{c_2}}-\frac{i}{\sqrt{c_1}}\cdot\overline{\frac{3c_{22}}{c_2}-\frac{c_{12}}{c_1}}\right)\omega_2^3=0.$$

On en voit que, en posant pour simplifier

$$p=\frac{1}{\sqrt{c_2}}\left(\frac{3c_{11}}{c_1}-\frac{c_{21}}{c_2}\right),\qquad q=\frac{1}{\sqrt{c_1}}\left(\frac{3c_{22}}{c_2}-\frac{c_{12}}{c_1}\right), \tag{15}$$

l'équation des lignes de Segre est

$$(p+iq)\omega_1^3-(p-iq)\overline{\omega}_2^3=0. \tag{16}$$

Évidemment, pour que les lignes de Segre soient des géodésiques il faut et il suffit que, en se déplaçant sur une ligne de Segre quelconque, le point d^2M soit une combinaison linéaire de M, dM, $e^{\prime}$ seulement. On trouve facilement, pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que l'on ait, sur une ligne de Segre quelconque,

$$\omega_2 d\omega_1 - \omega_1 d\omega_2 - \omega_{12}(\omega_1^2 + \omega_2^2) = 0.$$

Or, en tenant compte des formules (13) et (11) on déduit facilement que l'équation en question est équivalente à l'équation suivante

$$(17) \qquad \omega_2 d\omega_1 - \omega_1 d\bar{\omega}_2 = \frac{1}{8}\left(p + iq\omega_1^3 - p - iq\omega_2^3\right)$$

$$+\left(\frac{p-iq}{8} - \frac{c_{11}\sqrt{c_2}}{c_1c_2 - c_1} - \frac{ic_{22}\sqrt{c_1}}{c_2c_2 - c_1}\right)\bar{\omega}_1^2\omega_2$$

$$-\left(\frac{p-iq}{8} - \frac{c_{11}\sqrt{c_2}}{c_1c_2 - c_1} + \frac{ic_{22}\sqrt{c_1}}{c_2c_2 - c_1}\right)\omega_1\, \omega_2^2.$$

Comme cette équation doit être satisfaite sur une ligne de Segre quelconque on voit que l'on doit avoir, sur une telle ligne

$$(18) \qquad d\log\frac{\omega_1}{\omega_2} = \left(\frac{p-iq}{8} - \frac{c_{11}\sqrt{c_2}}{c_1c_2 - c_1} - \frac{ic_{22}\sqrt{c_1}}{c_2c_2 - c_1}\right)\omega_1$$

$$-\left(\frac{p+iq}{8} - \frac{c_{11}\sqrt{c_2}}{c_1c_2 - c_1} + i\frac{c_{22}\sqrt{c_1}}{c_2c_2 - c_1}\right)\omega_2.$$

Or, d'après (16), le premier membre de cette équation étant $\frac{2}{3}i\,\frac{qdp-pdq}{p_2+q_2}$, l'équation (18) est

$$(19) \qquad \frac{2}{3}i\frac{qdp-pdq}{p^2+q^2} = \left(\frac{p-iq}{8} - \frac{c_{11}\sqrt{c_2}}{c_1c_2 - c_1} - \frac{ic_{22}\sqrt{c_1}}{c_2c_2 - c_1}\right)\omega_1$$

$$-\left(\frac{p+iq}{8} - \frac{c_{11}\sqrt{c_2}}{c_1c_2 - c_1} + \frac{ic_{22}\sqrt{c_1}}{c_2c_2 - c_1}\right)\omega_2$$

et comme elle doit être satisfaite, en chaque point, pour les trois directions de Segre, elle doit être satisfaite identiquement. En y remplaçant les $\bar{\omega}$ par des combinaisons linéaires correspondantes de ω, elle s'écrit

$$(20) \qquad \frac{8}{3}\cdot\frac{pdq-qdp}{p^2+q^2} = \left(q\sqrt{c_2} + \frac{8c_{22}}{c_2 - c_1}\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\right)\omega_1$$

$$-\left(p\sqrt{c_1} + \frac{8c_{11}}{c_1 - c_2}\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\right)\omega_2.$$

On trouve ainsi que les surfaces; sur lesquelles les lignes de Segre sont des géodésiques, si elles existent, sont définies par les équations suivantes:

$$(21) \qquad \omega_3 = 0,\ \ \omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0,\ \ \omega_{21} = -\omega_{12},\ \ \omega_{31} = -\omega_{13},\ \ \omega_{32} = -\omega_{23};$$

$$\omega_{13}=c_2\omega_1, \quad \omega_{23}=c_1\omega_2,$$

$$\frac{dc_1}{c_1}=\frac{c_{11}}{c_1}\omega_1+\left(\frac{3c_{22}}{c_2}-q\sqrt{c_1}\right)\omega_2,$$

$$(21)\qquad \frac{dc_2}{c_2}=\left(\frac{3c_{11}}{c_1}-p\sqrt{c_2}\right)\omega_1+\frac{c_{22}}{c_2}\omega_2,$$

$$(c_2-c_1)\omega_{12}=c_{22}\omega_1+c_{11}\omega_2,$$

$$\frac{8}{3}\cdot\frac{pdq-qdp}{p^2+q^2}=\left(q\sqrt{c_2}+\frac{8c_{22}}{c_2-c_1}\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\right)\omega_1-\left(p\sqrt{c_1}+\frac{8c_{11}}{c_1-c_2}\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\right)\omega_2.$$

Les équations entrainent les conditions d'intégrabilité suivantes:

$$\frac{3}{c_1}\Big[\omega_1 dc_{11}\Big]-\frac{1}{c_2}\Big[dc_{22}\omega_2\Big]-\sqrt{c_2}\Big[\omega_1 dp\Big]$$
$$+\left(\frac{3c_{11}}{c_1}q-\frac{c_{22}}{2\sqrt{c_2}}\cdot\frac{3c_1-c_2}{c_1-c_2}p-\frac{c_{11}c_{22}}{c_1c_2}\cdot\frac{5c_1-9c_2}{c_1-c_2}\right)\Big[\omega_1\omega_2\Big]=0,$$

$$\frac{1}{c_1}\Big[\omega_1 dc_{11}\Big]-\frac{3}{c_2}\Big[dc_{22}\omega_2\Big]+\sqrt{c_1}\Big[dq\omega_2\Big]$$
$$-\left(\frac{3c_{22}}{\sqrt{c_2}}p-\frac{c_{11}}{2\sqrt{c_1}}\cdot\frac{3c_2-c_1}{c_2-c_1}q-\frac{c_{11}c_{22}}{c_1c_2}\cdot\frac{5c_2-9c_1}{c_2-c_1}\right)\Big[\omega_1\omega_2\Big]=0,$$

$$(22)\quad \Big[\omega_1 dc_{22}\Big]-\Big[d\,c_{11}\omega_2\Big]+\Bigg(-c_1c_2c_2-c_1+\frac{1}{c_2-c_1}$$
$$\times\overline{\frac{c_{11}^2}{c_1}\,\overline{3c_2-2c_1}+\frac{c_{22}^2}{c_2}\,\overline{3c_1-2c_2}-c_{11}pc_2\sqrt{c_2}-c_{22}qc_1\sqrt{c_1}}\Bigg)\Big[\omega_1\omega_2\Big]$$
$$=0,$$

$$\sqrt{c_2}\Big[\omega_1 dq\Big]+\sqrt{c_1}\Big[dp\omega_2\Big]+\frac{8}{c_2-c_1}\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\Big[\omega_1 dc_{22}\Big]+\frac{8}{c_1-c_2}\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}$$
$$\times\Big[dc_{11}\omega_2\Big]-\frac{1}{\overline{c_2-c_1}^{\,2}}\left(\frac{qc_{22}}{2\sqrt{c_2}}\,\overline{c_2+c_1}\;\overline{c_2+7c_1}+\frac{pc_{11}}{2\sqrt{c_1}}\,\overline{c_1+c_2}\cdot\overline{c_1+7c_2}\right.$$
$$\left.+\frac{8c_{22}^2}{c_2}\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\,\overline{c_2-2c_1}+\frac{8c_{11}^2}{c_1}\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\,\overline{c_1-2c_2}\right)\Big[\omega_1\omega_2\Big]=0.$$

Le système (21) n'est manifestement pas en involution. Dans la suite, pour faire la discussion du système (21), nous allons distinguer les deux cas possible: $pq=0$ ou bien $pq\neq 0$. Nous allons traiter séparément ces deux cas.

4. Nous allons d'abord considérer le cas $pq=0$. Dans ce cas on ne peut pas avoir $p=q=0$, car autrement, l'équation des courbes de Segre ne serait pas déterminée; on a donc $q=0$, $p\neq 0$ ou bien $p=0$, $q\neq 0$.

Pour voir la signification géométrique de chacune des deux relations $q=0$, $p=0$, envisageons l'équation (16); on en voit immédiatement *pour que la famille de lignes de courbure* $\omega_2=0(\omega_1=0)$ *se confonde avec une famille de courbes de Segre, il faut et il suffit que l'on ait* $q=0$ $(p=0)$. Sans restreindre la généralité, nous pouvons nous borner à considérer seulement les surfaces pour lesquelles $q=0$, $p\neq 0$; c'est ce que nous ferons dans la suite.

Les surfaces cherchées, si celles existent, sont donc définies par le système d'équations de Pfaff (21) avec la condition $q=0$. Or la dernière de ces équations entraîne les deux relations suivantes

$$(23)\qquad c_{22}=0,\quad p\sqrt{c_1}+\frac{8c_{11}}{c_1-c_2}\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}=0.$$

La première de ces relations caractérise, comme il est facile de le voir, des surfaces moulures les plus générales pour lesquelles l'équation des lignes de courbure planes est $\omega_2=0$. Quant à la deuxième relation (23) elle peut s'écrire

$$(24)\qquad \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\left(\frac{3c_{11}}{c_1}-\frac{c_{21}}{c_2}\right)+\frac{8c_{11}}{c_1-c_2}\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}=0,$$

et on voit, en tenant compte des équations (21) qu'elle détermine une relation entre les rayons principaux de courbure $r_1=\frac{1}{c_1}$, $r_2=\frac{1}{c_2}$ de sorte que les surfaces cherchées, si elles existent, appartiennent aux surfaces W. On obtient par un calcul facile que la relation en question est

$$(25)\qquad (3r_1+r_2)^4=kr_1^9r_2,$$

k étant une constante arbitraire. Inversement, il est aisé de voir que, *si une surface moulure* (*avec* $c_{22}=0$) *appartient aux surfaces* W *la relation entre les rayons principaux de courbure étant de la forme* (25), *elle jouit de la propriété d'avoir les lignes de Segre formées par des géodésiques.*

Pour établir l'existence et la généralité des surfaces considérées occupons nous du système d'équations différentielles qui les définit. Nous avons d'après (21), en écrivant pour abréger a au lieu de $\frac{c_{11}}{c_1}$ le système suivant

$$\omega_3=0,\quad \omega_{11}=\omega_{22}-\omega_{33}=0,\quad \omega_{21}=-\omega_{12},\quad \omega_{31}=-\omega_{13},\quad \omega_{32}=-\omega_{23};$$

$$\tag{26} \begin{gathered} \omega_{13}=c_2\omega_1,\qquad \omega_{23}=c_1\omega_2,\\ \frac{dc_1}{c_1}=a\omega_1,\\ \frac{dc_2}{c_2}=-a\left(1+4\,\frac{c_2+c_1}{c_2-c_1}\right)\omega_1,\\ \frac{c_2-c_1}{c_1}\omega_{12}=a\omega_2. \end{gathered}$$

Les conditions d'intégrabilité de ce système étant, d'après (22),

$$\tag{27} \begin{gathered} [\omega_1 da]=0,\\ [\omega_2 da]+\left(a^2\,\frac{c_1^2-3c_1c_2-6c_2^2}{c_2-c_1^2}-c_2\overline{c_2-c_1}\right)[\omega_1\omega_2]=0, \end{gathered}$$

on voit que l'on a

$$\tag{27} da=\left(a^2\frac{c_1^2-3c_1c_2-6c_2^2}{c_2-c_1^2}-c_2\overline{c_2-c_1}\right)\omega_1,$$

et le système (26), (27) est complètement intégrable. Il en résulte qu' *il existe des surfaces considérées et elles dépendent de deux constantes arbitraires.*

Il n'est pas difficile de remplacer le système d'équations différentielles (26), (27) par un système équivalent d'une forme explicite. Pour cela posons $K=c_1c_2$, $u=\frac{c_2}{c_1}$ et remarquons qu'on a, d'après (26), (27)

$$\tag{28} \begin{gathered} d\log K=-4a\frac{u+1}{u-1}\omega_1,\\ d\log u=-2a\,\frac{3u+1}{u-1}\,\omega_1,\\ (u-1)\omega_{12}=a\omega_2,\\ da=\left(a^2\frac{1-3u-6u_2}{u-1^2}-K\overline{u-1}\right)\omega_1. \end{gathered}$$

Il est aisé de voir que l'on peut choisir les variables indépendantes de manière à avoir

$$\tag{29} \omega_1=-\frac{u-1}{a}\,\frac{dx}{x},\qquad x\omega_2=dy.$$

Avec ces variables, si l'on introduit encore la fonction $v=x\frac{u-1}{a}$, le système (28) prend la forme suivante

$$
(30)\qquad
\begin{aligned}
d \log K &= 4\,(u+1)\frac{dx}{x},\\
d \log u &= 2\,(3u+1)\frac{dx}{x},\\
\frac{dv}{v^3} &= -K\frac{dx}{x^3},\\
\omega_{12} &= \frac{dy}{v},
\end{aligned}
$$

et ces équations, avec les équations (26), conduisent au système suivant:

$$
(31)\qquad
\begin{gathered}
\omega_3=0,\quad \omega_{11}=\omega_{22}=\omega_{33}=0,\quad \omega_{21}=-\omega_{12},\\
\omega_{31}=-\omega_{13},\quad \omega_{32}=-\omega_{23};\\
\omega_1=\frac{3\xi^5 d\xi}{\sqrt{(\alpha-\xi^6)(\beta-\xi^2)}},\quad \omega_2=\frac{d\eta}{\sqrt{a-\xi^6}},\\
\omega_{12}=\sqrt{\beta-\xi^2}\,d\eta,\quad \omega_{13}=\frac{d\xi}{\sqrt{\beta-\xi^2}},\quad \omega_{23}=\xi d\eta,
\end{gathered}
$$

les ξ, η étant les variables indépendantes nouvelles et α, β deux constantes arbitraires.

5. Nous allons maintenant considérer l'autre cas possible $pq \neq 0$. Dans ce cas général, la méthode que j'applique pour déterminer les surfaces considérées, s'il en existe, conduit aux calculs très longs. C'est pourquoi je me borne de montrer que, *s'il existe des surfaces en question, elles dépendent de sept constantes arbitraires au plus.*

Le système (21) n'étant pas en involution il peut être prolongé par les équations de la forme suivante:

$$
(32)\qquad
\begin{aligned}
dc_{11} &= (P+\cdots)\omega_1+\Bigg(\frac{c_1}{c_2-c_1}\cdot\overline{\frac{q}{p}\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}-\frac{3p}{q}\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}}\,P\\
&\qquad\qquad -\frac{c_1}{8}\,\overline{\frac{q}{p}-\frac{3p}{q}}\,Q+\cdots\Bigg)\omega_2,\\
dc_{22} &= \Bigg(\frac{c_2}{c_1-c_2}\cdot\overline{\frac{p}{q}\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}-\frac{3q}{p}\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}}\,P\\
&\qquad\qquad +\frac{c_2}{8}\,\overline{\frac{p}{q}-\frac{3q}{p}}\,Q+\cdots\Bigg)\omega_1+(P+\cdots)\omega_2,\\
-d(pq) &= \left(\frac{16q\sqrt{c_2}}{c_1\overline{c_1-c_2}}\,P+\frac{2q}{\sqrt{c_1}}Q+\cdots\right)\omega_1\\
&\qquad\qquad +\left(\frac{16p\sqrt{c_1}}{c_2\overline{c_2-c_1}}\,P-\frac{2p}{\sqrt{c_2}}\,Q+\cdots\right)\omega_2,
\end{aligned}
$$

les P, Q étant des variables nouvelles et les termes non écrits ne dépendant que des c_1, c_2, c_{11}, c_{22}, p, q. Les conditions d'intégrabilité de ces équations ont la forme

$$
\begin{aligned}
&[dP\omega_1]+\frac{c_1}{c_2-c_1}\cdot\frac{q}{p}\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}-\frac{3p}{q}\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\,[dP\omega_2] \\
&\qquad\qquad -\frac{c_1}{8}\cdot\overline{\frac{q}{q}-\frac{3p}{q}}\,[dQ\omega_2]+\alpha[\omega_1\omega_2]=0, \\
&\frac{c_2}{c_1-c_2}\cdot\overline{\frac{p}{q}\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}-\frac{3q}{p}\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}}\,[dP\omega_1]+\frac{c_2}{8}\cdot\overline{\frac{p}{q}-\frac{3q}{p}}\,[dQ\omega_1] \\
&\qquad\qquad +[dP\omega_2]+\beta[\omega_1\omega_2]=0, \\
&\frac{16q\sqrt{c_2}}{c_1\overline{c_1-c_2}}[dP\omega_1]+\frac{2q}{\sqrt{c_1}}[dQ\omega_1]+\frac{16p\sqrt{c_1}}{c_2\overline{c_2-c_1}}[dP\omega_2] \\
&\qquad\qquad -\frac{2p}{\sqrt{c_2}}[dQ\omega_2]+\gamma[\omega_1\omega_2]=0,
\end{aligned}
\tag{33}
$$

les α, β, γ étant composés des $c_1, c_2, \cdots, P, Q$. Or, on vérifie par un calcul facile que, dans ces formules, le déterminant de coefficients des $[dP\omega_2]$, $[dQ\omega_1]$, $[dQ\omega_2]$ est $\frac{\sqrt{c_1}}{2p}\cdot\overline{p^2+q^2}$ et par suite différent de zéro. On voit donc que l'on peut prolonger le système (21), (32) en y ajoutant deux équations nouvelles exprimant les dP, dQ comme des combinaisons linéaires de ω_1, ω_2, ces équations ne contenant qu'une variable nouvelle W. On déduit facilement que les deux équations en question ont la forme

$$
\begin{aligned}
dP&=(p\sqrt{c_2}\,W+\cdots)\omega_1+(q\sqrt{c_1}\,W+\cdots)\omega_2, \\
dQ&=\left(\frac{8}{c_2-c_1}\,p\sqrt{c_1}\,W+\cdots\right)\omega_1-\left(\frac{8}{c_1-c_2}\,q\sqrt{c_2}W+\cdots\right)\omega_2,
\end{aligned}
\tag{34}
$$

les termes non écrits ne contenant que les $c_1, c_2, c_{11}, c_{22}, p, q, P, Q$.

Les conditions d'intégrabilité de ces deux équations sont de la forme

$$
\begin{aligned}
&p\sqrt{c_2}\,[dW\omega_1]+q\sqrt{c_1}\,[dW\omega_2]+\mu[\omega_1\omega_2]=0, \\
&p\sqrt{c_1}\,[dW\omega_1]+q\sqrt{c_2}\,[dW\omega_2]+\nu[\omega_1\omega_2]=0,
\end{aligned}
\tag{35}
$$

et dans ces formules les μ, ν sont composés de c_1, c_2, $\cdots$, Q, W. Or, on voit immédiatement que les équation (35) sont linéairement indépendantes par rapport à $[dW\omega_1]$, $[dW\omega_2]$ et le système (21), (32), (34) peut donc être prolongé par l'équation suivante

$$dW = \frac{\mu\sqrt{c_1} - \nu\sqrt{c_2}}{\sqrt{c_2 - c_1}}\,\omega_1 + \frac{\mu\sqrt{c_2} - \nu\sqrt{c_1}}{\sqrt{c_2 - c_1}}\,\omega_2. \tag{36}$$

19

On est ainsi ramené au système de Pfaff (21), (32), (34), (36) dans lequel les différentielles des inconnues c_1, $c_2, \ldots$, Q, W sont exprimées linéairement en ω_1 et ω_2 les coefficients n'introduissant aucune inconnue nouvelle. Si ce système est complètement intégrable, ce que rien n'oblige à croire *a priori* les surfaces considérées dépendent de sept constantes arbitraires. Si non, l'équation (36) conduit au moins à une relation finie entre les variables $c_1, c_2, \ldots, W$, et les surfaces en question, si elles existent, dépendent encore des constantes arbitraires, le nombre de ces constantes étant inférieur à sept. La proposition est donc démontrée.