

Borůvka, Otakar: Scholarly works

Otakar Borůvka

K teorii některých transcendent počtu integrálního

Spisy přír. fak. MU, č. 37, 1924, 14 s.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/500026>

Terms of use:

© Masarykova univerzita, 1924

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

S P I S Y
VYDAVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
MASARYKOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ MASARYK
RÉDIGÉES PAR

BOHUSLAV HOSTINSKY

Rok 1924

Čís. 37

K TEORII NĚKTERÝCH TRANSCENDENT POČTU INTEGRÁLNÍHO

(CONTRIBUTION À LA THÉORIE DE QUELQUES FONCTIONS
TRANSCENDANTES DU CALCUL INTÉGRAL.)

NAPSAL

O. BORŮVKA

VYCHÁZÍ S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A OSVĚTY

VLASTNÍM NÁKLADEM VYDAVA

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BRNO, KOUNICOVA 63

NA SKLADĚ MA

EN VENTE CHEZ

KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28

K THEORII NĚKTERÝCH TRANSCENDENT POČTU INTEGRÁLNÍHO.

(AVEC UN RESUMÉ EN FRANÇAIS.)

I.

O funkci $R(x, s)$ definované při *reál. č.* $s > 1$ řadou

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^s}$$

jest známo*, že rozdíl $R(x, s) - \frac{1}{s-1}$ jest celistvou funkcí transcendentní proměnné s a že lze jej tedy rozvinouti v řadu stále konvergentní

$$R(x, s) - \frac{1}{s-1} = \psi(x) + f_1(x)(s-1) + f_2(x)(s-1)^2 + \dots^{**} \quad (1)$$

O funkci $f_1(x)$ a dalsích koeficientech při jednotlivých mocnostech $(s-1)$ není posud známo nic bližšího. Vycházejeme od trigonometrických aggregátů $\sum_{\rho=1}^v \sin 2\pi \frac{u}{v} \rho \log \Gamma\left(\frac{\rho}{v}\right)$, $\sum_{\rho=1}^{v-1} \cos 2\pi \frac{u}{v} \rho \log \Gamma\left(\frac{\rho}{v}\right)$, závislých na kladných pravých racionálních zlomech $\frac{u}{v}$, ukáží v tomto odstavci, že za předpokladu $0 < x < 1$ platí trigonometrický rozvoj

$$f_1(1-x) - f_1(1+x) = -(\log 2\pi + E) \pi \cotg x\pi - \frac{\log x}{x} + \frac{\pi}{\sin x\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n+1)x\pi \log \frac{n}{n+1}$$

* * *

Budtež u, v celistvá kladná nesoudělná čísla ($0 < u < v$) a hledejme vyjádření aggregátu

$$A \sum_{\rho=1}^v \sin 2\pi \frac{u}{v} \rho \log \Gamma\left(\frac{\rho}{v}\right)$$

* Lerch, Další studie v oboru Malmsténovských řad; Rozpravy II. tř. Č. Akademie roč. III., str. 12. Podle Lerchova citátu Rychle konvergentní vyjádření některých limit, p. 7, Rozpravy České Akademie, roč. VIII.) pochází tento výsledek od H. Kinkelina Programm der Gewerbeschule, Basel 1861 1862.

** Značím dusledně $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ $\psi(x)$ a Eulerovu konstantu písmenem E .

tím způsobem, že nahradíme $\log \Gamma \left(\frac{\rho}{v} \right)$ dle Kummerova vzorce*

$$\log \Gamma(x) = \text{konst} + \log 2\pi + E)x - \frac{1}{2} \log \sin x\pi + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\log \nu}{\nu} \sin 2\nu x\pi \quad (0 < x < 1) \quad (2)$$

příslušným výrazem.

Vzhledem k relacím

$$\sum_{\rho=1}^{v-1} \sin 2\pi \frac{u}{v} \rho = 0$$

$$\sum_{\rho=1}^{v-1} \rho \sin 2\pi \frac{u}{v} \rho = \frac{v}{2} \cotg \frac{u}{v} \pi \quad (3)$$

obdržíme nejprve, píšeme-li $(\log 2\pi + E) \quad k$

$$A = \frac{k}{2} \cotg \frac{u}{v} \pi - \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{v-1} \sin 2\pi \frac{u}{v} \rho \log \sin \frac{\rho}{v} \pi + \frac{1}{\pi} \sum_{\rho=1}^{v-1} \sin 2\pi \frac{u}{v} \rho \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\log \nu}{\nu} \sin 2\nu \frac{\rho}{v} \pi$$

a pak, jelikož

$$\sum_{\rho=1}^{v-1} \sin 2\pi \frac{u}{v} \rho \log \sin \frac{\rho}{v} \pi - \sum_{\rho=1}^{v-1} \sin 2\pi \frac{u}{v} (v - \rho) \log \sin \frac{v - \rho}{v} \pi - \sum_{\rho=1}^{v-1} \sin 2\pi \frac{u}{v} \rho \log \sin \frac{\rho}{v} \pi = 0.$$

$$A = \frac{k}{2} \cotg \frac{u}{v} \pi + \frac{1}{\pi} \sum_{\rho=1}^{v-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\log \nu}{\nu} \sin 2\nu \frac{\rho}{v} \pi \sin 2\pi \frac{u}{v} \rho. \quad (4)$$

Poznačíme-li aggregát trigonometrických řad na pravé straně písmenem X a užijeme-li vzorce

$$\sin 2\pi \frac{\nu}{v} \rho \sin 2\pi \frac{u}{v} \rho = \frac{1}{2} \left[\cos 2\pi \frac{\nu - u}{v} \rho - \cos 2\pi \frac{\nu + u}{v} \rho \right],$$

můžeme psáti

$$X = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\log \nu}{\nu} \sum_{\rho=1}^{v-1} \left[\cos 2\pi \frac{\nu - u}{v} \rho - \cos 2\pi \frac{\nu + u}{v} \rho \right].$$

V této řadě transformujme sumační index ν substitucí $\nu = vn + x$ ($n = 0, 1, 2, \dots; x = 1, 2, \dots, v$); obdržíme

$$X = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x=1}^v \frac{\log(vn + x)}{vn + x} \sum_{\rho=1}^{v-1} \left[\cos 2\pi \frac{x - u}{v} \rho - \cos 2\pi \frac{x + u}{v} \rho \right],$$

* Kummer, Crelleuv j. sv. XXXV., p. 1.

což lze značně zjednodušiti, neboť pro $x \neq u$ a $x \neq v - u$ jest

$$\sum_{\rho=1}^1 \left[\cos 2\pi \frac{x}{v} \frac{u}{v} \rho - \cos 2\pi \frac{x+u}{v} \rho \right] = 0,$$

kdežto obecně pro $x = u$, resp. $x = v - u$ jest týž výraz roven v , resp. $-v$.

Platí tedy jednoduše

$$X = \frac{v}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\log(vn+u)}{vn+u} - \frac{\log[v(n+1)-u]}{v(n+1)-u} \right]$$

anebo

$$X = \frac{v}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\log(vn+u)}{vn+u} - \frac{\log[v(n+1)+u]}{v(n+1)+u} \right] + \\ \frac{v}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\log(vn-u)}{vn+u} - \frac{\log(vn-u)}{vn-u} \right];$$

součet první řady na pravé straně jest patrně roven $\frac{\log u}{u}$, druhou lze vzhledem ke vzorci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+\frac{u}{v}} - \frac{1}{n-\frac{u}{v}} \right] = \pi \cotg \frac{u}{v} \pi - \frac{v}{u}$$

upraviti na

$$\log v \left[\pi \cotg \frac{u}{v} \pi - \frac{v}{u} \right] = \frac{1}{v} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\log\left(n+\frac{u}{v}\right)}{n+\frac{u}{v}} - \frac{\log\left(n-\frac{u}{v}\right)}{n-\frac{u}{v}} \right],$$

takže vychází

$$X = \frac{\pi}{2} \cotg \frac{u}{v} \pi \cdot \log v - \frac{1}{2} \frac{v}{u} \log \frac{u}{v} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\log\left(n+\frac{u}{v}\right)}{n+\frac{u}{v}} - \frac{\log\left(n-\frac{u}{v}\right)}{n-\frac{u}{v}} \right]$$

a pak

$$A = \frac{1}{2} \cotg \frac{u}{v} \pi \log v - \frac{1}{2} \cotg \frac{u}{v} \pi + \frac{1}{2\pi} \frac{v}{u} \log \frac{u}{v} + \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\log\left(n+\frac{u}{v}\right)}{n+\frac{u}{v}} - \frac{\log\left(n-\frac{u}{v}\right)}{n-\frac{u}{v}} \right]. \quad \text{I)}$$

Násobme nyní aggregát

$$B = \sum_{\rho=1}^1 \cos 2\pi \frac{u}{v} \rho \log \Gamma \left(\frac{\rho}{v} \right)$$

velicinou $\cos \frac{\rho}{v} \pi$; obdržíme nejprve, píšeme-li

$$\cos \frac{u}{v} \pi \cos 2 \frac{u}{v} \pi \rho = \frac{1}{2} \left[\cos \pi \frac{u}{v} (2\rho + 1) + \cos \pi \frac{u}{v} (2\rho - 1) \right],$$

$$B \cos \frac{u}{v} \pi = \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{v-1} \cos \pi \frac{u}{v} (2\rho + 1) \log \Gamma \left(\frac{\rho}{v} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\rho=0}^{v-2} \cos \pi \frac{u}{v} (2\rho + 1) \log \Gamma \left(\frac{\rho+1}{v} \right)$$

a pak pomocí vztahu $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$

$$B \cos \frac{u}{v} \pi = \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^v \cos \pi \frac{u}{v} (2\rho + 1) \log \Gamma \left(\frac{\rho}{v} \right) \Gamma \left(\frac{\rho+1}{v} \right) + \frac{1}{2} \cos \frac{u}{v} \pi \log v. \quad (\text{II})$$

Vychází tudíž z rovnic (I) a (II)

$$- \sum_{\rho=1}^v \cos \pi \frac{u}{v} (2\rho + 1) \log \Gamma \left(\frac{\rho}{v} \right) -$$

$$= - \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^v \cos \pi \frac{u}{v} (2\rho + 1) \log \Gamma \left(\frac{\rho}{v} \right) \Gamma \left(\frac{\rho+1}{v} \right) + \frac{k}{2} \cos \frac{u}{v} \pi +$$

$$+ \frac{\sin \frac{u}{v} \pi}{2\pi} \cdot \frac{v}{u} \log \frac{u}{v} + \frac{\sin \frac{u}{v} \pi}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\log \left(n + \frac{u}{v} \right)}{n + \frac{u}{v}} - \frac{\log \left(n - \frac{u}{v} \right)}{n - \frac{u}{v}} \right]$$

a po úpravě

$$\sum_{\rho=1}^v \cos \pi \frac{u}{v} (2\rho + 1) \log \frac{\Gamma \left(\frac{\rho+1}{v} \right)}{\Gamma \left(\frac{\rho}{v} \right)} + k \cos \frac{u}{v} \pi + \frac{\sin \frac{u}{v} \pi}{\pi} \cdot \frac{v}{u} \cdot \log \frac{u}{v} +$$

$$+ \frac{\sin \frac{u}{v} \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\log \left(n + \frac{u}{v} \right)}{n + \frac{u}{v}} - \frac{\log \left(n - \frac{u}{v} \right)}{n - \frac{u}{v}} \right]. \quad (\text{III})$$

Poznačíme-li levou stranu této rovnice Y a vyjádříme-li v ní funkce $\log \Gamma \left(\frac{\rho+1}{v} \right)$, $\log \Gamma \left(\frac{\rho}{v} \right)$ dle Weierstrassova vzorce

$$\log \Gamma(x) = -Ex - \log x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x}{n} - \log \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right], \quad (5)$$

obdržíme s ohledem na vztah $\sum_{\rho=1}^v \cos \pi \frac{u}{v} (2\rho + 1) = 0$ nejprve

$$Y = \sum_{\rho=1}^v \cos \pi \frac{u}{v} (2\rho + 1) \left[-\log \frac{\rho+1}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{vn} - \log \frac{vn + \rho + 1}{vn + \rho} \right) \right]$$

a pak

$$Y = \sum_{\rho=1}^{\nu} \cos \pi \frac{u}{v} (2\rho + 1) \log \frac{\rho}{\rho + 1} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\rho=1}^{\nu} \cos \pi \frac{u}{v} (2\rho + 1) \left[\frac{1}{vn} - \log \frac{vn + \rho + 1}{vn + \rho} \right].$$

Druhou řadu na pravé straně lze patrně psáti ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\rho=1}^{\nu} \cos \pi \frac{u}{v} [2(vn + \rho) + 1] \log \frac{vn + \rho}{vn + \rho + 1}$$

a tedy také, zavedeme-li sumační index $vn + \rho = n'$

$$\sum_{n'=v+1}^{\infty} \cos \pi \frac{u}{v} (2n' + 1) \log \frac{n'}{n' + 1}.$$

Nacházíme tedy

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \pi \frac{u}{v} (2n + 1) \log \frac{n}{n + 1}$$

a pomocí rovnice (III)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\log \left(n + \frac{u}{v} \right)}{n + \frac{u}{v}} - \frac{\log \left(n - \frac{u}{v} \right)}{n - \frac{u}{v}} \right] k \pi \cotg \frac{u}{v} \pi - \frac{v}{u} \log \frac{u}{v} + \\ + \frac{\pi}{\sin \frac{u}{v} \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \pi \frac{u}{v} (2n + 1) \log \frac{n}{n + 1}. \quad (\text{IV})$$

Jak z obecných vět o trigonometrických řadách ihned vyplývá, jest řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos (2n + 1) x \pi \log \frac{n + 1}{n}$$

v každém intervalu mezi $(0 \dots 1)$ stejnoměrně konvergentní a reprezentuje tam tudíž spojitou funkci.

Totéz platí o řadě

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\log (n - x)}{n - x} - \frac{\log (n + x)}{n + x} \right];$$

neboť pro všechna $0 < x < 1$ a $n > 4$ jest

$$\frac{\log (n - x)}{n - x} - \frac{\log (n + x)}{n + x} < \frac{\log (n - 1)}{n - 1} - \frac{\log (n + 1)}{n + 1} = u_n$$

řada $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ konverguje.

Ke každému reálnému číslu x v intervalu $0 < x < 1$ konverguje posloupnost racionálních čísel $\frac{u_h}{v_h}$ obsažených v tomto intervalu.

Jest tedy pro libovolné x tohoto intervalu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{\log \left(\frac{n+x}{n-x} \right)}{\frac{n+x}{n-x}} - \frac{\log \left(\frac{n+u_h}{n+v_h} \right)}{\frac{n+u_h}{n+v_h}} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{\log \left(\frac{n+x}{n-x} \right)}{\frac{n+x}{n-x}} - \frac{\log \left(\frac{n+u_h}{n+v_h} \right)}{\frac{n+u_h}{n+v_h}} \right]$$

$$k\pi \cotg x\pi + \frac{\log x}{x} - \frac{\pi}{\sin x\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n-1)x\pi \log \frac{n+1}{n}$$

$$\lim \left[k\pi \cotg \frac{u_h}{v_h} \pi - \frac{v_h \log \frac{u_h}{v_h}}{u} - \frac{\pi}{\sin \frac{u_h}{v_h} \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \pi \frac{u_h}{v_h} (2n-1) \log \frac{n+1}{n} \right].$$

Posloupnosti za znaménkem limitním na pravých stranách těchto rovnic jsou však dle (IV) identické a konvergují tudíž k téže limitě; platí tedy obecně pro $0 < x < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\log \left(\frac{n+x}{n-x} \right)}{\frac{n-x}{n-x}} - \frac{\log \left(\frac{n+x}{n-x} \right)}{\frac{n-x}{n-x}} \right] = k\pi \cotg x\pi + \frac{\log x}{x} - \frac{\pi}{\sin x\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n-1)x\pi \log \frac{n+1}{n}. \quad (\text{IV}^*)$$

Předpokládejme pro jednoduchost i nadále jak budeme potřebovat v $0 < x < 1$; snadno dokážeme, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-x)^s} - \frac{1}{(n+x)^s} \right]$$

konverguje stejnoměrně v každém konečném oboru (s) , v jehož všech bodech jest *real.* č. $s > 0$. *

Neboť jest, píšeme-li $s = \sigma + i\tau$

$$\frac{1}{(n-x)^s} - \frac{1}{(n+x)^s} = s \int_{-x}^x \frac{dy}{(n+y)^{1+s}}$$

a tedy

$$\frac{1}{(n-x)^s} - \frac{1}{(n+x)^s} = s \int_x^x \frac{dy}{(n+y)^{1+s}} = \frac{2x^s}{n+\eta} \frac{1}{1+s} \quad x < \eta < x. \quad 6$$

Representuje tudíž řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-x)^s} - \frac{1}{(n+x)^s} \right]$ v každém tako-

* Obvod oboru může být citován k jeho vnitřku.

vém konečném oboru (s) analytickou funkcí a sice funkcí $R(1-x, s)$ a $R(1+x, s)$; neboť tato jest jí při reáln. č. $s > 1$ definována.

Můžeme tedy pro $0 < x < 1$, $\sigma > 0$ psát dle (1)

$$\psi(1-x) - \psi(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-x)^s} - \frac{1}{(n+x)^s} \right] [f_1(1-x) - f_1(1+x)] \dots;$$

rozvineme-li radu na levé straně podle stoupajících mocností faktoru $(s-1)$, obdržíme snadno pro koeficient při první mocnosti

$$2\pi i [f_1(1-x) - f_1(1+x)] = \int_L (s-1)^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-x)^s} - \frac{1}{(n+x)^s} \right] ds$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_L \left[\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right] \frac{ds}{(s-1)^2},$$

integrujeme v kladném směru dle jednoduše uzavřené křivky L , obepínající bod $s=1$ a neprotínající pomyslné osy.

Residuum funkce $\left[\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right] \frac{1}{(s-1)^2}$ v bodě $s=1$ jest

$$\left[\frac{\log(n-x)}{n-x} - \frac{\log(n+x)}{n+x} \right]$$

tedy

$$f_1(1-x) - f_1(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\log(n-x)}{n-x} - \frac{\log(n+x)}{n+x} \right].$$

Z tohoto výsledku vychází porovnáním se vzorcem (IV*), že je-li v rozvoji

$$R(1-x, s) - R(1+x, s) = \psi(1-x) - \psi(1+x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-x)^s} - \frac{1}{(n+x)^s} \right] [f_1(1-x) - f_1(1+x)] + \dots$$

$0 < x < 1$, má koeficient $f_1(1-x) - f_1(1+x)$ hodnotu

$$f_1(1-x) - f_1(1+x) = \log 2\pi + E \pi \cotg x\pi - \frac{\log x}{x} - \frac{\pi}{\sin \pi x} \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\pi x \log \frac{n}{n+1}. \quad (V)$$

Podívejme se ještě, že ze vzorce (IV*) jest možno odvoditi některé zajímavé výsledky; uzieme-li Lerchova pravidla o derivování konvergentních trigonometrických řad typu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos 2n\pi x$, dle něhož derivace jejich součtu jest $\frac{\pi}{\sin \pi x} \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+1} - c_n) \cos (2n+1)\pi x$ ($c_0 = 0$), jakmile

řada tato konverguje stejnoměrně, shledáme, že integrálem funkce $\frac{\pi}{\sin x\pi} \sum_1^{\infty} \cos(2n+1)x\pi \log \frac{n+1}{n}$ jest řada $-\sum_1^{\infty} \frac{\log n}{n} \cos 2n x\pi$, jež pro $x = \frac{1}{2}$ nabývá hodnoty $\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\log n}{n}$; součet této řady jest $E \log 2 + \frac{1}{2} \log^2 2^*$.

Nalezneme tedy snadno integraci vzorce IV*) v mezích $(\frac{1}{2}, x)$ vztah

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\log^2(n + \frac{1}{2}) + \log^2(n - \frac{1}{2}) - \log^2(n + x) - \log^2(n - x)] \log^2 x + 2[(\log 2\pi + E) \log \sin x\pi + (E - \log 2) \log 2] - \quad (VI)$$

$$- 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} \cos 2n x\pi,$$

z něhož na př. pro $x = \frac{1}{4}$ vychází

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\log^2(n + \frac{1}{2}) + \log^2(n - \frac{1}{2}) - \log^2(n + \frac{1}{4}) - \log^2(n - \frac{1}{4})] \frac{5}{2} \log^2 2 - \log \pi \cdot \log 2,$$

kdežto pro $x = \frac{3}{4}$ (VI*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\log^2(n + \frac{1}{2}) + \log^2(n - \frac{1}{2}) - \log^2(n + \frac{3}{4}) - \log^2(n - \frac{3}{4})] \log^2 \frac{3}{4} \left(\log \pi + \frac{3 \log 2}{2} \right) \log 2.$$

II.

V rozpravě „Dalsí studie v oboru Malmsténovských řad“ odvodil Lerch vzorec**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2x\pi i(v+n)}}{v+n} = \frac{\pi i}{2} \log 2x\pi - E \psi(v) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{2kv\pi i} \log \frac{x+k}{k} \quad (0 < v < 1, 0 < x < 1) \quad (7)$$

a o funkci $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2n\pi i}}{v+n}$ dokázal později***, že se dá pro racionální v vyjádřit v zakončeném tvaru; táž vlastnost jest známa o funkci ψ (a byla po prve dokázána Gaussem.† Vychází tudíž z horejšího vzorce téměř bezprostředně, že funkce

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin 2n x\pi \log \frac{n+a}{n-a}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n x\pi \log \frac{n+a}{n^2} \quad (0 < x < 1, 0 < a < 1)$$

* de la Vallée-Poussin, Recherches Analytiques sur la th. des nombres premiers Ann. Soc. scient., Brux., t. XX. p. 65.

** Cit. str. 1; p. 53.

*** Lerch Ruzné výsledky v theorii funkce gamma; Rozpr. Č. Akademie, II. tr. roč. V, str. 20.

† Gauss, Sebrané spisy III. sv., str. 157.

representuje v racionálních bodech x konečný aggregát elementárních transcendent. Užívaje podobné metody jako dříve, odvodím v dalším tento výsledek přímo.

* * *

Poznačme pro stručnost

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin 2n\pi x \log \frac{n+a}{n-a}$$

a kladme za x racionální kladný zlomek $\frac{u}{v}$ ($u < v$); píšeme-li radu $f(x)$

tak, že spojíme vždy v členů v jeden (což odpovídá transformaci indexu n $vn' + \rho$; $n' = 0, 1, 2, \dots$; $\rho = 1, 2, \dots, v$), obdržíme

$$f\left(\frac{u}{v}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\rho=1}^v \sin 2\pi \frac{u}{v} \rho \log \frac{vn + \rho + a}{vn + \rho - a}$$

anebo také vzhledem ke vzorci (3)

$$f\left(\frac{u}{v}\right) = \sum_{\rho=1}^v \sin 2\pi \frac{u}{v} \rho \left\{ \frac{2Ea}{v} + \log \frac{\rho + a}{\rho - a} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[2a - \log \frac{1 + \frac{\rho + a}{vn}}{1 + \frac{\rho - a}{vn}} \right] \right\};$$

z toho vychází snadno dle (5)

$$f\left(\frac{u}{v}\right) = \sum_{\rho=1}^{v-1} \sin 2\pi \frac{u}{v} \rho \log \frac{\Gamma\left(\frac{\rho + a}{v}\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho - a}{v}\right)}$$

a pak, zavedeme-li v aggregátu $\sum_{\rho=1}^{v-1} \sin 2\pi \frac{u}{v} \rho \log \Gamma\left(\frac{\rho - a}{v}\right)$ index hledaný výraz

$$f\left(\frac{u}{v}\right) = \sum_{\rho=1}^{v-1} \sin 2\pi \frac{u}{v} \rho \log \sin \frac{\rho + a}{v} \pi$$

nebo

$$f\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{v-1} \sin 2\pi \frac{u}{v} \rho \log \frac{\sin \frac{\rho - a}{v} \pi}{\sin \frac{\rho + a}{v} \pi}. \quad (8)$$

Analogicky nalezneme pro funkci

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\pi x \log \frac{(n-a)(n+a)}{n^2} \quad 0 < x < 1, 0 < a < 1$$

v racionálních bodech x vyjádření

$$g\left(\frac{u}{v}\right) = \log \frac{\sin \frac{a}{v} \pi}{\frac{a}{v} \pi} - \sum_{\rho=1}^{v-1} \cos 2\pi \frac{u}{v} \rho \log \frac{\sin \frac{\rho - a}{v} \pi}{\sin \frac{\rho + a}{v} \pi}. \quad (9)$$

Podotkněme ještě, že vycházejíce z Gaussova vzorce*

$$\psi\left(\frac{u}{v}\right) + E \quad \log 2v \quad \frac{\pi}{2} \cotg \frac{u}{v} \pi + \sum_{k=1}^v \cos \frac{2k u \pi}{v} \log \sin \frac{k \pi}{v}$$

můžeme tímiz metodami ale postupem opačným odvoditi Lerchovy tri gonometrické rozvoje pro funkci $\psi(x$ **.

* Cit. str. 10 (†).

** Cit. str. 10 (***) p. 29.

CONTRIBUTION À LA THÉORIE DE QUELQUES FONCTIONS TRANSCENDANTES DU CALCUL INTÉGRAL.

PAR

O. BORUVKA.

(RÉSUMÉ.)

La fonction $R(x, \sigma + i\tau)$ étant donnée pour $\sigma > 1$ par la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^{\sigma+i\tau}}$ elle admet le développement

$$R(x, s) = \frac{1}{s-1} - \psi(x) + f_1(x)(s-1) + f_2(x)(s-1)^2 \dots \quad (1)$$

où $\psi(x)$ désigne la dérivée logarithmique de la fonction $\Gamma(x)$. Les propriétés des fonctions $f_n(x)$ étant inconnues, j'ai déduit une série trigonométrique pour la fonction

$$f_1(1-x) - f_1(1+x) + (\log 2\pi - \Gamma'(1)) \pi \cotg x\pi + \frac{\log x}{x}, \text{ en supposant } 0 < x < 1.$$

u, v étant des entiers positifs ($u < v$), on trouve en appliquant les formules (3) et la série de Kummer (2) et en posant

$$A = \sum_{\rho=1}^{v-1} \sin 2\pi \frac{u}{v} \rho \log \Gamma\left(\frac{\rho}{v}\right)$$

l'expression suivante:

$$A = \frac{(\log 2\pi - \Gamma'(1))}{2} \cotg \frac{u}{v} \pi + \frac{v}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\log vn + u}{vn + u} - \frac{\log [v(n-1) + u]}{v(n-1) + u} \right]$$

(voir p. 5) d'où résulte la formule (I). En multipliant l'expression

$$B = \sum_{\rho=1}^{v-1} \cos 2\pi \frac{u}{v} \rho \log \Gamma\left(\frac{\rho}{v}\right) \text{ par } \cos \frac{u}{v} \pi \text{ on déduit facilement la formule (II) et à l'aide de celle-ci et I la formule (III).}$$

Si l'on exprime dans cette formule la fonction $\log \Gamma(x)$ par la série de Weierstrass (5) on obtient le résultat (IV) et on voit, que ce résultat est valable pour $0 < x < 1$ form. IV* . En supposant $0 < x < 1$ l'inégalité (6) met en

évidence que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-x)^s} - \frac{1}{(n-1-x)^s} \right]$ est uniformément convergente dans tout domaine fini à droite de l'axe imaginaire du plan (s) et qu'elle représente la fonction $R(1-x, s) - R(1+x, s)$; en développant cette fonction suivant les puissances croissantes de $(s-1)$ on trouve facilement le coefficient de $(s-1)$ c'est-à-dire $f_1(1-x) - f_1(1+x)$

(voir p. 9. Puis on déduit à l'aide de la formule (IV*) le résultat que le coefficient de $(s-1)$ dans le développement de la fonction $R(1-x, s) - R(1+x, s)$ est, en supposant $0 < x < 1$,

$$f_1(1-x) - f_1(1+x) = (\log 2\pi - \Gamma'(1)) \pi \cotg x\pi \frac{\log x}{x} + \\ + \frac{\pi}{\sin x\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n+1)x\pi \log \frac{n}{n+1}.$$

L'intégrale de la fonction $\frac{\pi}{\sin x\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n+1)x\pi \log \frac{n+1}{n}$ est $\sum_{n=1}^{\infty} \log n \cos 2nx\pi$; en intégrant la formule (IV*) on déduit la relation (VI) d'où résultent pour $x = \frac{1}{4}$ et $x = \frac{3}{4}$ les formules bien intéressantes (VI*).

* * *

Lerch a établi la formule (7) et il a montré plus tard que, v étant rationnel, on peut exprimer la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2nx\pi i}}{n+v}$ par des fonctions élémentaires en nombre fini; donc il résulte de la formule (7) presque immédiatement que, x étant rationnel, les fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} \sin 2nx\pi \log \frac{n+a}{n-a}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \cos 2nx\pi \log \frac{(n-a)(n+a)}{n^2}$ ($0 < x < 1$, $0 < a < 1$) sont représentées par des fonctions élémentaires en nombre fini. Je démontre ce théorème en posant $x = \frac{u}{v}$, $n = vn' + \rho$ ($n' = 0, 1, 2, \dots$; $\rho = 1, 2, 3, \dots, v$) et en appliquant la formule (3) ainsi que la série de Weierstrass (5). On obtient les formules (8) et (9).

Brno, le 24 novembre 1923.