

Borůvka, Otakar: Scholarly works

Otakar Borůvka

Sur une extension des formules de Frenet dans l'espace complexe et leur image réelle

C. R. Acad. Sci. Paris t. 197, 1933, 109-112

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/500036>

Terms of use:

© Académie des sciences, France, 1933

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

1. Plongeons-nous dans l'espace hermitien parabolique K_r à $r (> 1)$ dimensions, déterminé par l'ensemble d'une forme linéaire z^0 et d'une forme hermitienne $z^1 \bar{z}^1 + \dots + z^r \bar{z}^r$. Prenons dans K_r une courbe analytique (appartenant à cet espace), lieu des points $z^\alpha = f^\alpha(z)$, $1 \leq \alpha \leq r$, les f étant des fonctions analytiques d'une variable complexe $z = x + iy$. A chaque point M de la courbe associons r vecteurs $n_\alpha = u_\alpha(x, y) + i v_\alpha(x, y)$, $0 \leq \alpha \leq r-1$, les u, v étant des fonctions analytiques des deux variables réelles x, y , de manière que : 1° ils soient unitaires et rectangulaires deux à deux; 2° pour $0 \leq \alpha \leq r-1$ les vecteurs n_0, \dots, n_α soient dans l'espace osculateur d'ordre $\alpha + 1$ de la courbe au point M. Les vecteurs dM, dn_α sont alors des combinaisons linéaires des vecteurs n . Si l'on multiplie les vecteurs n_α par des facteurs de la forme $\exp. (it)$, t réel, les nouveaux vecteurs désignés encore par n_α satisfont à 1° et 2°. On en peut profiter pour faire en sorte que les combinaisons en question soient de la forme ($\alpha = 0, 1, \dots, r-1$)

$$\begin{aligned} dM &= (\omega_1 + i\omega_2) n_0, \\ dn_\alpha &= R_\alpha (\omega_1 - i\omega_2) n_{\alpha-1} - i\varpi_\alpha n_\alpha + R_{\alpha+1} (\omega_1 + i\omega_2) n_{\alpha+1}, \end{aligned}$$

les termes en n_{-1}, n_r étant à supprimer et les ω, ϖ étant des formes de Pfaff réelles en dx, dy telles que $\varpi_0 + \dots + \varpi_{r-1} = 0$, les R étant enfin des fonctions analytiques réelles et positives de x, y . Ces formules représentent une espèce de formules de Frenet pour l'espace K_r , les droites (complexes) passant par un point M de la courbe et déterminées par les différents vecteurs n_α correspondants jouant le rôle de la tangente ($\alpha = 0$) et des normales successives ($\alpha > 1$), et les fonctions R celui des courbures scalaires de la courbe au point M. Remarquons qu'elles entraînent les conditions d'intégrabilité suivantes

$$\left[(\omega_1 + i\omega_2) \left(\frac{dR_\alpha}{R_\alpha} + \frac{i\varpi_0 + \varpi_{\alpha-1}}{\varpi_\alpha} \right) \right] = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, r-1)$$

(1) Séance du 3 juillet 1933.

et qu'on peut prendre

$$\omega_1 = (R_1^{-1} R_2^{-2} \dots R_{r-1})^{-r+1} dx, \quad \omega_2 = (R_1^{-1} R_2^{-2} \dots R_{r-1})^{-r-1} dy.$$

2. Faisons la représentation de l'espace K_r sur l'espace euclidien réel S_{2r} à $2r$ dimensions de manière que l'image du point (vecteur)

$$z^1 = x^1 + ix^2, \quad \dots, \quad z^r = x^{2r-1} + ix^{2r} \quad (x \text{ réels})$$

de l'espace K_r soit dans S_{2r} le point (vecteur) x^1, x^2, \dots, x^{2r} . Dans cette représentation, du reste isométrique, l'image de la courbe (M) est une surface (M^*) caractéristique (dans le sens de M. Levi-Civita), dont les équations sont de la forme $x^{2\alpha-1} = U^\alpha(x, y), x^{2\alpha} = V^\alpha(x, y), 1 < \alpha < r$, les U^α, V^α étant des fonctions harmoniques associées. De plus, l'image de la figure formée, en chaque point M de la courbe, par l'espace osculateur d'ordre α (qui est naturellement à α dimensions), $1 < \alpha < r$, et par la tangente et les normales successives, est la figure formée, au point M^* correspondant, par l'espace osculateur de la surface d'ordre α [qui est alors à 2α dimensions, de sorte qu'il y a au point M^* $r - 1$ espaces principaux (1) de la surface qui sont des plans] et par le plan tangent et les plans principaux successifs. Les plans en question sont donc caractéristiques; en conséquence ils coupent les deux espaces linéaires imaginaires I, \bar{I} à $r - 1$ dimensions, situés sur la quadrique absolue, (I) $x^{2\alpha-1} + ix^{2\alpha} = 0$, (\bar{I}) $x^{2\alpha-1} - ix^{2\alpha} = 0$, ($\alpha = 1, \dots, r$). Finalement pour $1 < \alpha < r - 1$ la courbure scalaire de la courbe au point M a pour la surface (M^*) la signification simple suivante: Au point M^* correspondant l'indicatrice de courbure normale d'ordre α est une circonférence centrée au point M^* et de rayon $R_1 R_2 \dots R_\alpha$.

3. Les surfaces caractéristiques dont nous venons de parler entraînent, évidemment, pour $r = 2$, les surfaces de Kwietniewski et Kommerell que l'on considère en relation avec la théorie des fonctions analytiques de deux variables complexes (2). Signalons à leur sujet encore les résultats suivants:

Pour qu'une surface dans S_{2r} soit caractéristique, il faut et il *suffit* que, dans chaque point M^* de la surface: *a*, l'espace osculateur de la surface d'ordre α soit à 2α dimensions ($1 < \alpha < r$); *b*, toutes les indicatrices de courbures normales soient des circonférences centrées en M^* ; ou bien *b'*, le plan tangent et tous les plans principaux soient caractéristiques. Chaque surface

(1) Pour la notion des espaces principaux et des indicatrices de courbures normales, voir mon Mémoire (*Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk*, 165, 1932).

(2) Voir par ex. B. SEGRE, *Rend. Sem. Mat. Roma*, 7, 1931, parte II, p. 59-107.

caractéristique est le lieu des points d'intersection des espaces complexes conjugués à r dimensions appartenant à deux variétés complexes conjuguées d'espaces à r dimensions passant respectivement par les deux espaces I et \bar{I} et dépendant analytiquement d'une variable complexe z resp. \bar{z} . Inversement, un tel lieu de points est toujours une surface caractéristique (1).

4. On peut étendre les raisonnements précédents et considérer plus généralement les surfaces plongées dans un espace S_{2r} , à $2r$ dimensions à courbure constante *quelconque*, caractérisées par les propriétés a et b ci-dessus. Il y a encore un prototype complexe de telles surfaces représenté par une espèce de formules de Frenet dans un espace complexe à r dimensions doué d'une métrique hermitienne (à courbure constante). Tandis que par exemple il n'y a pas dans l'espace K_r considéré plus haut de courbes analytiques dont toutes les courbures scalaires R soient des constantes, il y en a si la métrique de l'espace complexe ambiant a été choisie à courbure *positive* convenable, et les surfaces représentatives correspondantes dans S_{2r} (à courbure positive) sont fournies par les fonctions sphériques de Laplace d'ordre r (2).

(1) Pour $r = 2$ voir par exemple ma Note, *Comptes rendus*, 187, 1928, p. 334.

(2) Au sujet de ces surfaces voir ma Note, *Comptes rendus*, 190, 1930, p. 1336.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 197, p. 109, séance du 10 juillet 1933.)