

Borůvka, Otakar: Scholarly works

Otakar Borůvka

Über die parteilen Differentialgleichungen, denen hermitesche Formen genügen

Abh. Math. Sem. Hamb. Univ. 11, 1934, 65-72

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/500038>

Terms of use:

© Universität Hamburg, Germany, 1934

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Über die partiellen Differentialgleichungen, denen hermitesche Formen genügen.

Von O. BORŮVKA in Brünn.

Unter diesem Titel hat Herr L. SCHLESINGER eine Arbeit veröffentlicht¹⁾, in der er einen Zusammenhang zwischen Lösungen gewisser Systeme von partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung und denen linearer homogener Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit hermitescher Monodromiegruppe erkannte. Seine diesbezüglichen Resultate finden sich jedoch a. a. O. nur für $n = 2, 3$ formuliert und bewiesen und sind meines Wissens auch nicht später für beliebige n verallgemeinert worden. Ich werde nun einen allgemeinen Satz, durch den diese Verallgemeinerung geleistet wird, beweisen.

Im folgenden wird stets die zu einer komplexen Zahl x komplex konjugierte mit \bar{x} bezeichnet.

1. Vorbemerkungen. Zu jeder hermiteschen Form $(y, \bar{y}) = \sum_{\alpha, \beta}^n a_{\alpha\beta} y_\alpha \bar{y}_\beta$ ($a_{\alpha\beta} = \bar{a}_{\beta\alpha}$) mit nicht verschwindender Determinante gibt es gerade n abgeleitete hermitesche Formen: die nullte, die erste usw. abgeleitete hermitesche Form. Die l (> 0)-te abgeleitete hermitesche Form H_l ist aus den $l+1$ Systemen y_0^j, \dots, y_{n-1}^j ($j = 0, \dots, l$) eines quadratischen Schemas y_k^j ($j, k = 0, \dots, n-1$; $y_k^0 = y_k$) von Veränderlichen gebildet und durch

$$H_l = \sum_{\substack{\alpha_0 < \dots < \alpha_l \\ \beta_0 < \dots < \beta_l}} \begin{vmatrix} a_{\alpha_0\beta_0} & \dots & a_{\alpha_0\beta_l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\alpha_l\beta_0} & \dots & a_{\alpha_l\beta_l} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_{\alpha_0}^0 & \dots & y_{\alpha_l}^0 \\ \vdots & & \vdots \\ y_{\alpha_0}^l & \dots & y_{\alpha_l}^l \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_{\beta_0}^0 & \dots & y_{\beta_l}^0 \\ \vdots & & \vdots \\ y_{\beta_0}^l & \dots & y_{\beta_l}^l \end{vmatrix}$$

definiert. Dabei ist in bezug auf alle in einer bestimmten Reihenfolge genommenen Kombinationen $l+1$ -ter Klasse ohne Wiederholung der Zahlen $0, \dots, n-1$ zu summieren. Es ist also im besonderen $H_0 = (y, \bar{y})$. Jede der Formen H_l ($0 \leq l \leq n-1$) ist in bezug auf die Gruppe aller linearen, auf die Systeme y_0^j, \dots, y_{n-1}^j ($j = 0, \dots, n-1$) kogredient angewandten Substitutionen mit der Form H_0 kovariant. Also wird im besonderen, durch jede lineare, die Form H_0 reproduzierende und auf die Systeme y_0^j, \dots, y_{n-1}^j ($j = 0, \dots, l$) kogredient angewandte Substitution die Form H_l reproduziert. Die Form H_l ($0 \leq l < n-1$) ist

¹⁾ Archiv der Mathematik und Physik, 3. Reihe, Bd. 1 (1901), S. 262.

in der Determinantenform

$$(1) \quad H_l = |(y^i, y^k)| \quad (i, k = 0, \dots, l)$$

darstellbar.

2. Hilfssatz 1. Sei (y, y) eine hermitesche Form mit nicht verschwindender Determinante in den Veränderlichen y_0, \dots, y_{n-1} . y_0^j, \dots, y_{n-1}^j ($j = 0, \dots, n-1$) seien unabhängige Systeme von irgendwelchen komplexen Zahlen, für die keine der von (y, y) abgeleiteten hermiteschen Formen H_l ($0 \leq l < n-1$) verschwindet. Dann gelten von dem Gleichungssysteme ($0 \leq j < n-1$; $H_{-1} = 1$)

$$(2) \quad \begin{aligned} x_{j0}(y^0, y^k) + x_{j1}(y^1, y^k) + \dots + x_{jj}(y^j, y^k) &= 0, \text{ für } k = 0, \dots, j-1, \\ &= \frac{H_{j-1} \cdot H_j}{x_{jj}}, \text{ für } k = j \end{aligned}$$

folgende Aussagen:

a) das System ist auflösbar, und es ist insbesondere

$$(3) \quad x_{jj} \cdot x_{jj} = H_{j-1}^2;$$

b) die mit den Lösungen x gebildeten Zahlensysteme ($j = 0, \dots, n-1$)

$$(4) \quad Y_k^j = x_{j0} y_k^0 + \dots + x_{jj} y_k^j \quad (k = 0, \dots, n-1)$$

sind unabhängig und es gilt

$$(5) \quad (Y^j, Y^i) = 0 \text{ für } i \neq j, = H_{j-1} \cdot H_j \text{ für } i = j;$$

c) sind n Zahlensysteme Y_0^j, \dots, Y_{n-1}^j ($j = 0, \dots, n-1$) von der Form (4) unabhängig und gilt (5) für $i, j = 0, \dots, n-1$, so sind die x Lösungen von (2).

Beweis. a) Folgt unmittelbar aus (1) und der Voraussetzung $H_j \neq 0$.

b) Es ist offenbar

$$(6) \quad |Y_k^j| = x_{00} x_{11} \dots x_{n-1, n-1} |y_k^j|,$$

$$(7) \quad (Y^j, Y^i) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} Y_\alpha^j \cdot Y_\beta^i = \sum_{\sigma=0}^i \bar{x}_{i\sigma} \sum_{\gamma=0}^j x_{j\gamma} (y^\gamma, \bar{y}^\sigma).$$

Nach (6) und (3) sind die Zahlensysteme Y_k^j unabhängig. Da ferner $(Y^j, Y^i) = 0$ ($Y^i, Y^j) = 0$ impliziert, genügt es (5) für $i \leq j$ festzustellen. Für $i \leq j$ folgt aber (5) unmittelbar aus (7) und (2).

c) Sind n Zahlensysteme Y_0^j, \dots, Y_{n-1}^j ($j = 0, \dots, n-1$) von der Form (4) unabhängig, so ist nach (6)

$$(8) \quad x_{00} \cdot x_{11} \dots \bar{x}_{n-1, n-1} \neq 0.$$

Gilt (5) für $i, j = 0, \dots, n-1$, so ist nach (7), für $0 < j \leq n-1$,

$$\begin{aligned} x_{i0} \sum_{\gamma=0}^j x_{j\gamma} (y^\gamma, \bar{y}^0) + \dots + \bar{x}_{ii} \sum_{\gamma=0}^j x_{j\gamma} (y^\gamma, y^i) &= 0 \text{ für } i = 0, \dots, j-1, \\ &= H_{j-1} \cdot H_j \text{ für } i = j. \end{aligned}$$

Daraus folgt (2) wegen (8).

3. Im folgenden bedeutet A eine lineare homogene Differentialgleichung $n (\geq 1)$ -ter Ordnung mit eindeutigen, in der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ analytischen Koeffizienten.

$\frac{\partial}{\partial z}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ bedeutet die Operation $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ bzw. $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$.

Ist also z. B. y eine analytische Funktion von $z = x + iy$, so ist $\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \equiv 0$; ist y eine analytische Funktion der reellen Veränderlichen x, y und gilt identisch $\frac{\partial y}{\partial z} = 0$, so ist y eine analytische Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$.

Definitionen. 1. Die Monodromiegruppe von A ist hermitesch, wenn es eine hermitesche Form $(y, \bar{y}) = \sum_{\alpha, \beta}^{n-1} a_{\alpha\beta} y_{\alpha} y_{\beta}$ mit nicht verschwindender Determinante und ein Fundamentalsystem von Integralen von A gibt, so daß die Form durch die zu diesem Systeme gehörige Monodromiegruppe reproduziert wird.

2. Ist die Monodromiegruppe von A hermitesch und wird die hermitesche Form (y, y) durch die zum Fundamentalsysteme y_0, \dots, y_{n-1} von Integralen von A gehörige Monodromiegruppe reproduziert, so wird das System der von (y, y) abgeleiteten hermiteschen Formen $H_l (0 \leq l < n - 1)$, gebildet mit den Integralen des Fundamentalsystems und ihren Ableitungen $y_0^j, \dots, y_{n-1}^j (j = 0, \dots, l)$, Monodromiesystem von A genannt.

Bemerkung. Offenbar sind die Funktionen eines Monodromiesystems reelle, (nach 1.) eindeutige, analytische Funktionen in den reellen Veränderlichen x, y . Sind die Integrale eines Fundamentalsystems von A eindeutige analytische Funktionen, so ist die Monodromiegruppe von A eine hermitesche und das System der von einer beliebigen hermiteschen Form mit nicht verschwindender Determinante abgeleiteten und mit den Integralen und ihren Ableitungen gebildeten hermiteschen Formen stellt ein Monodromiesystem von A dar.

4. Hilfssatz 2. Die Monodromiegruppe von A sei hermitesch. Das Monodromiesystem H_0, \dots, H_{n-1} von A sei mit den Integralen y_0, \dots, y_{n-1} eines Fundamentalsystems von A gebildet. Es gibt Punkte (x, y) , für die sowohl die Determinante $|y_k^j| (j, k = 0, \dots, n - 1)$ als auch jede der Funktionen H regulär und von Null verschieden ist.

Beweis. Das Monodromiesystem sei von der hermiteschen Form $(y, y) = \sum a_{\alpha\beta} y_{\alpha} y_{\beta}$ abgeleitet.

a) $H_0 \not\equiv 0$.

Denn aus $\sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} y_{\alpha} y_{\beta} \equiv 0$ folgt durch wiederholte Anwendung der Operation $\frac{\partial}{\partial z}$

$$\sum_{\beta} y_{\beta}^j \sum_{\alpha} a_{\alpha\beta} y_{\alpha} \equiv 0 \quad (j = 0, \dots, n - 1),$$

also wegen $|\bar{y}_k^j| \neq 0$

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha\beta} y_{\alpha} \equiv 0 \quad (\beta = 0, \dots, n-1).$$

Daraus durch wiederholte Anwendung der Operation $\frac{\partial}{\partial z}$

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha\beta} y_{\alpha}^j \equiv 0,$$

also wegen $|y_k^j| \neq 0 : a_{\alpha\beta} = 0$, gegen die Voraussetzung $|a_{\alpha\beta}| \neq 0$.

b) $H_{l-1} \neq 0$ impliziert $H_l \neq 0$ ($1 \leq l \leq n-1$).

Denn aus $H_{l-1} \neq 0$, $H_l \equiv 0$ folgt durch wiederholte Anwendung der Operationen $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ und eines bekannten Kroneckerschen Determinantensatzes²⁾

$$\begin{vmatrix} (y^0, y^0) & \dots & (y^0, y^{l-1}) & (y^0, y^k) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (y^{l-1}, y^0) & \dots & (y^{l-1}, y^{l-1}) & (y^{l-1}, y^k) \\ (y^i, \bar{y}^0) & \dots & (y^i, y^{l-1}) & (y^i, y^k) \end{vmatrix} \equiv 0,$$

für $i, k = l, \dots, n-1$, also auch

$$\begin{vmatrix} (y^{r_0}, y^{s_0}) & \dots & (y^{r_0}, \bar{y}^{s_l}) \\ \vdots & & \vdots \\ (y^{r_l}, y^{s_0}) & \dots & (y^{r_l}, y^{s_l}) \end{vmatrix} \equiv 0$$

oder

$$(9) \quad \sum_{\beta_0 < \dots < \beta_l} \begin{vmatrix} y_{\beta_0}^{s_0} & \dots & y_{\beta_l}^{s_0} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{\beta_0}^{s_l} & \dots & y_{\beta_l}^{s_l} \end{vmatrix} \sum_{\alpha_0 < \dots < \alpha_l} \begin{vmatrix} a_{\alpha_0\beta_0} & \dots & a_{\alpha_0\beta_l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\alpha_l\beta_0} & \dots & a_{\alpha_l\beta_l} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_{\alpha_0}^{r_0} & \dots & y_{\alpha_l}^{r_0} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{\alpha_0}^{r_l} & \dots & y_{\alpha_l}^{r_l} \end{vmatrix} \equiv 0$$

für $0 \leq r_0 < \dots < r_l \leq n-1$, $0 \leq s_0 < \dots < s_l < n-1$. Da nun die aus den Elementen

$$\begin{vmatrix} \bar{y}_{\beta_0}^{s_0} & \dots & \bar{y}_{\beta_l}^{s_0} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{y}_{\beta_0}^{s_l} & \dots & \bar{y}_{\beta_l}^{s_l} \end{vmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{vmatrix} y_{\alpha_0}^{r_0} & \dots & y_{\alpha_l}^{r_0} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{\alpha_0}^{r_l} & \dots & y_{\alpha_l}^{r_l} \end{vmatrix}$$

gebildete Determinante (nach dem sog. Frankeschen Satze) eine Potenz von $|\bar{y}_k^j|$ bzw. $|y_k^j|$ also nicht identisch Null ist, so folgt aus (9)

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha_0\beta_0} & \dots & a_{\alpha_0\beta_l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\alpha_l\beta_0} & \dots & a_{\alpha_l\beta_l} \end{vmatrix} = 0$$

²⁾ L. KRONECKER, Bemerkungen zur Determinantentheorie (Journ. f. Math. Bd. 72, 1870; S. 152).

für $0 < \alpha_0 < \dots < \alpha_l < n-1$, $0 < \beta_0 < \dots < \beta_l \leq n-1$, gegen die Voraussetzung $|a_{\alpha\beta}| \neq 0$.

c) Es gibt Punkte, in denen die y_0, \dots, y_{n-1} regulär sind und $|y_k^j| \neq 0$. In einer Umgebung Ω eines solchen Punktes ist $|y_k^j|$ regulär und von Null verschieden und auch jede der Funktionen H ist regulär. Ist in einem Punkte $(x, y) \in \Omega : |y_k^j| \cdot H_{-1} \cdot H_0 \cdot \dots \cdot H_i \neq 0$ ($-1 \leq i < n-1$; $H_{-1} = 1$), so ist dies auch in einer Umgebung $\Omega_i \subset \Omega$ von (x, y) der Fall. Da H_{i+1} nicht identisch verschwindet, so gibt es in Ω_i Punkte, in denen $H_{i+1} \neq 0$.

5. Satz. Das System von partiellen Differentialgleichungen

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \log |H_j|}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log |H_j|}{\partial y^2} = 4 \frac{H_{j-1} \cdot H_{j+1}}{H_j^2}$$

$$(j = 0, \dots, n-1; H_{-1} = 1, H_n = 0)$$

steht zur Menge linearer homogener Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit eindeutigen, in der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ analytischen Koeffizienten und mit hermitescher Monodromiegruppe in folgender Beziehung:

- Jedes Monodromiesystem einer beliebigen Differentialgleichung der Menge ist eine Lösung von (10).
- Zu jeder reellen, analytischen und eindeutigen Lösung von (10) gibt es eine Differentialgleichung der Menge, so daß die Lösung ein Monodromiesystem dieser Differentialgleichung darstellt.

Beweis. a) Es sei A eine Differentialgleichung der Menge und H_0, \dots, H_{n-1} ein Monodromiesystem derselben, gebildet mit der hermiteschen Form (y, y) und den Integralen y_0, \dots, y_{n-1} eines Fundamentalsystems von A . Nach Hilfssatz 2 gibt es Punkte, für die sowohl die Determinante $|y_k^j|$ ($j, k = 0, \dots, n-1$) als auch jede der Funktionen H regulär und von Null verschieden ist. Es sei (x, y) ein solcher Punkt. Nach Hilfssatz 1 gibt es n unabhängige Systeme ($j = 0, \dots, n-1$) von im Punkte (x, y) regulären analytischen Funktionen der reellen Veränderlichen x, y

$$Y_k^j = x_{j0} y_k^0 + \dots + x_{jj} y_k^j \quad (k = 0, \dots, n-1),$$

so daß im besonderen

$$x_{jj} \cdot x_{jj} = H_{j-1}^2$$

ist, und die Beziehungen

$$(11) \quad (Y^j, Y^i) = 0 \quad \text{für } i \neq j, \quad = H_{j-1} H_j \quad \text{für } i = j$$

identisch bestehen. Die x_{jj} sind offenbar bis auf Faktoren von der Form e^{it} , t reell, bestimmt; also kann man

$$(12) \quad x_{jj} = H_{j-1}$$

wählen. Wegen (11) genügen die Y_k^j für jedes $k = 0, \dots, n-1$ Differentialgleichungen von der Form

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{\partial Y^j}{\partial z} &= \sum_{\alpha=0}^j p_{j\alpha} Y^\alpha + \frac{x_{jj}}{x_{j+1,j+1}} Y^{j+1}, \\ \frac{\partial Y^j}{\partial z} &= \sum_{\alpha=0}^{j-1} q_{j-1,\alpha} Y^\alpha + \frac{\partial \log |x_{jj}|}{\partial z} Y^j \quad (j = 0, \dots, n-1; Y^n = 0). \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$p_{j0} = p_{j1} = \dots = p_{j,j-1} = 0 \quad \text{für } j > 1$$

und

$$q_{j-1,0} = q_{j-1,1} = \dots = q_{j-1,j-2} = 0 \quad \text{für } j > 2.$$

In der Tat, ist $j > 1$, $0 \leq i < j-1$, so ist nach (13) $\frac{\partial Y^i}{\partial z}$ eine lineare Kombination von Y^0, \dots, Y^i ; also (wenn man alle Größen durch die komplex konjugierten ersetzt) $\frac{\partial \bar{Y}^i}{\partial z}$ ist eine lineare Kombination von Y^0, \dots, Y^i . Also gilt nach (11), wegen $i < j$,

$$\left(Y^j, \frac{\partial \bar{Y}^i}{\partial z} \right) = 0,$$

also auch

$$\left(\frac{\partial Y^j}{\partial z}, Y^i \right) = - \left(Y^j, \frac{\partial Y^i}{\partial z} \right) = 0.$$

Daraus folgt nach (13) und (11)

$$p_{ji} = 0.$$

Ähnlich für die q . Weiter ist offenbar

$$\begin{aligned} p_{jj} \cdot H_{j-1} H_j &= \left(\frac{\partial Y^j}{\partial z}, Y^j \right) = - \left(Y^j, \frac{\partial \bar{Y}^j}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} H_{j-1} \cdot H_j \\ &= - \frac{\partial \log |x_{jj}|}{\partial z} \cdot H_{j-1} \cdot H_j + \frac{\partial}{\partial z} H_{j-1} \cdot H_j, \end{aligned}$$

$$q_{j-1,j-1} H_{j-2} H_{j-1} = \left(\frac{\partial Y^j}{\partial z}, Y^{j-1} \right) = - \left(Y^j, \frac{\partial Y^{j-1}}{\partial z} \right) = - \frac{x_{j-1,j-1}}{x_{jj}} \cdot H_{j-1} H_j.$$

Also sind die Gleichungen (13) nach (12) folgende

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{\partial Y^j}{\partial z} &= \frac{\partial \log |H_j|}{\partial z} Y^j + \frac{H_{j-1}}{H_j} Y^{j+1}, \\ \frac{\partial Y^j}{\partial z} &= \frac{H_j}{H_{j-1}} Y^{j-1} + \frac{\partial \log |H_{j-1}|}{\partial z} Y^j \\ &(j = 0, \dots, n-1; H_{-1} = 1; Y^{-1} = Y^n = 0). \end{aligned}$$

Da die Y^j analytische Funktionen der reellen Veränderlichen x, y sind, so gilt identisch

$$(15) \quad \frac{\partial^2 Y^j}{\partial z \partial z} = \frac{\partial^2 Y^j}{\partial \bar{z} \partial z}.$$

Da die Y_k^j unabhängig sind, gelten diese Beziehungen [nach (14)] dann und nur dann, wenn

$$(16) \quad \frac{\partial^2 \log |H_j|}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2 \log |H_{j-1}|}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{H_{j-1} \cdot H_{j+1}}{H_j^2} - \frac{H_{j-2} \cdot H_j}{H_{j-1}^2}$$

$$(j = 0, \dots, n-1; H_{-2} = 0)$$

ist. Daraus folgt (10), da die H analytisch sind.

b) Es sei H_0, \dots, H_{n-1} eine reelle, analytische und eindeutige Lösung von (10). Dann sind die Beziehungen (16) identisch erfüllt. Wegen (15) ist das mit diesen H gebildete System (14) vollständig integrierbar. Ist also (x_0, y_0) ein regulärer Punkt jeder der Funktionen H und verschwindet daselbst keine derselben, so gibt es ein Fundamentalsystem Y_0^j, \dots, Y_{n-1}^j ($j = 0, \dots, n-1$) von analytischen, im Punkte (x_0, y_0) regulären Integralen von (14), so daß im Punkte (x_0, y_0)

$$(17) \quad Y_k^j = 0 \text{ für } k \neq j, = 1 \text{ für } k = j$$

ist. Setzt man $h_j = H_j(x_0, y_0)$, $h_{-1} = 1$,

$$(y, \bar{y}) = h_{-1} h_0 y_0 \bar{y}_0 + h_0 h_1 y_1 \bar{y}_1 + \dots + h_{n-2} h_{n-1} y_{n-1} \bar{y}_{n-1},$$

so ist (y, \bar{y}) eine hermitesche Form mit nicht verschwindender Determinante, und es gilt

$$(18) \quad (Y^j, Y^i) = 0 \text{ für } i \neq j, = H_{j-1} \cdot H_j \text{ für } i = j$$

offenbar im Punkte x_0, y_0 . Andererseits aber sind die (Y^j, Y^i) , nach (14), Lösungen des vollständig integrierbaren Systems

$$\frac{\partial}{\partial z} (Y^j, Y^i) = -\frac{H_i}{H_{i-1}} (Y^j, Y^{i-1}) + \frac{\partial}{\partial z} \log |H_j H_{i-1}| (Y^j, \bar{Y}^i) + \frac{H_{j-1}}{H_j} (Y^{j+1}, Y^i),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (Y^j, Y^i) = -\frac{H_j}{H_{j-1}} (Y^{j-1}, Y^i) + \frac{\partial}{\partial z} \log |H_{j-1} H_i| (Y^j, \bar{Y}^i) + \frac{H_{i-1}}{H_i} (Y^j, \bar{Y}^{i+1}),$$

und dieses System wird offenbar mit $(Y^j, Y^i) = 0$ für $i \neq j$, $= H_{j-1} H_j$ für $i = j$ befriedigt. Also gelten die Beziehungen (18) identisch. Für die analytischen Funktionen von x, y

$$(19) \quad y_k^0 = Y_k^0 \quad (k = 0, \dots, n-1)$$

gilt nach (14)

$$\frac{\partial y_k^0}{\partial z} = 0.$$

Also sind die y_k^0 analytische Funktionen der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$. Nach (14) ist die Ableitung y_k^j nach z von der Ordnung

$j(-0, \dots, n-1)$ der Funktion y_k^0 eine lineare Verbindung von Y_k^0, \dots, Y_k^j von der Form

$$(20) \quad y_k^j = p_{j0} Y_k^0 + \dots + \frac{1}{H_{j-1}} Y_k^j.$$

Also sind die Funktionensysteme y_0^j, \dots, y_{n-1}^j ($j = 0, \dots, n-1$) linear unabhängig. Die Koeffizienten p_{j0}, \dots sind offenbar ganze rationale Funktionen in den Koeffizienten von (14) und ihren Ableitungen nach z ; sie sind also eindeutig. Also bilden die y_0^0, \dots, y_{n-1}^0 ein Fundamentalsystem von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung A n -ter Ordnung mit eindeutigen, in der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ analytischen Koeffizienten. Nach (20) sind die Funktionensysteme Y_0^j, \dots, Y_{n-1}^j ($j = 0, \dots, n-1$) lineare Kombinationen der y_k^j von der Form

$$(21) \quad Y_k^j = x_{j0} y_k^0 + \dots + H_{j-1} y_k^j.$$

Erleiden also die durch die Anfangswerte (17) festgelegten Zweige der Funktionen y_k^0 nach einem geschlossenen Umlaufe der Veränderlichen z die Substitution $\|c_k^\alpha\|$, so erleiden die Y_k^j dieselbe Substitution. Da die Beziehungen (18) identisch gelten, so ist identisch

$$\sum_{\alpha, \beta} Y_\alpha^j \bar{Y}_\beta^i (c^\alpha, c^\beta) = 0 \text{ für } i \neq j, = H_{j-1} \cdot H_j \text{ für } i = j.$$

Also insbesondere für $x = x_0, y = y_0$

$$(c^j, \bar{c}^i) = 0 \text{ für } i \neq j, = h_{j-1} h_j \text{ für } i = j.$$

Also wird durch die Substitution $\|c_k^\alpha\|$ die Form (y, \bar{y}) reproduziert. Also gehört die Differentialgleichung A zur betrachteten Menge. Wegen (21) und (18) folgt nach Hilfssatz 1c)

$$|H_{j-1}| = |\mathfrak{H}_{j-1}| \quad (j = 0, \dots, n-1; \mathfrak{H}_{-1} = 1),$$

wo \mathfrak{H}_{j-1} die $(j-1)$ -te von (y, \bar{y}) abgeleitete hermitesche Form, gebildet mit y_0^i, \dots, y_{n-1}^i ($i = 0, \dots, j-1$) bedeutet. Aus (19) folgt aber

$$(22) \quad H_0 = \mathfrak{H}_0$$

und sowohl die Funktionen H_j (nach der Voraussetzung) als auch die \mathfrak{H}_j (nach a), $\mathfrak{H}_n = 0$) sind Lösungen von (10). Es ist also sogar

$$H_j = \mathfrak{H}_j \quad (j = 0, \dots, n-1).$$

Also bilden die Funktionen H_j ein Monodromiesystem von A .