

Borůvka, Otakar: Scholarly works

Otakar Borůvka
Sur les matrices singulières

C. R. Acad. Sci. Paris t. 203, 1936, 600-602

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/500046>

Terms of use:

© Académie des sciences, France, 1936

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ALGÈBRE. — *Sur les matrices singulières.*

Note de M. OTTOKAR BORŮVKA.

1. Nous considérons des matrices carrées dont les éléments sont des nombres dans un corps donné K . Si X désigne une matrice d'ordre n , la $j^{\text{ème}}$ matrice associée (compound) à X , qui est, on le sait, formée des différents mineurs d'ordre $(1 \leq j \leq n)$ de la matrice X , sera désignée par ${}_jX$. Pour deux matrices X, Y du même ordre on a la relation bien connue suivante

$$(1) \quad {}_j(XY) = {}_j\lambda \cdot {}_jY.$$

2. Considérons une matrice X d'ordre n . Il résulte de la formule (1) que les rangs des différentes matrices de la suite X, X^2, X^3, \dots forment une suite non croissante. Il existe par conséquent, dans cette suite, une matrice X^α telle que toutes les matrices $X^\alpha, X^{\alpha+1}, \dots$ ont le même rang j , tandis que celles qui précèdent X^α , s'il y en a, sont de rangs supérieurs à j . Nous disons que la matrice X est de genre $n - j$ et nous appelons le nombre α l'indice de la matrice X . Avec ces définitions une matrice régulière est de genre 0 et son indice est 1; une matrice d'ordre n qui est nulle ou nilpotente (1) est de genre n .

3. En appliquant la formule (1) on démontre le lemme suivant :

LEMME. — *Pour qu'une matrice X d'ordre n soit de genre $n - j$ ($0 \leq j \leq n$), il faut et il suffit que la matrice ${}_{j+1}X$ soit nulle ou nilpotente ($0 \leq j \leq n - 1$) et la matrice ${}_jX$ ne jouisse d'aucune de ces particularités.*

Le théorème suivant est fondamental :

THÉORÈME I. — *Pour qu'une matrice X d'ordre n soit de genre $n - j$ ($0 \leq j \leq n$), il faut et il suffit que précisément $n - j$ racines de son équation caractéristique soient nulles.*

Supposons, en effet, que la matrice X d'ordre n soit de genre $n - j$ ($0 \leq j \leq n$). Désignons par x_1, \dots, x_n les racines de son équation caracté-

(1) Une matrice X , non nulle, s'appelle *nilpotente* si $X^m = 0$ pour un nombre naturel m convenable.

ristique. D'après un théorème bien connu, les racines de l'équation caractéristique de la matrice ${}_j X$ ($0 \leq j < n - 1$) sont les produits $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{j+1}}$, formés des différentes combinaisons des x_{j+1} à $j+1$. La matrice ${}_{j+1} X$ étant nulle ou nilpotente, d'après le lemme, tous les produits en question sont égaux à zéro. Par conséquent, parmi les racines x , il y en a $n - j$ au moins qui sont nulles. S'il y en a $n - j + 1$ qui sont nulles, tous les produits analogues aux précédents, $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_j}$, s'annulent. Il en résulte que la matrice ${}_j X$ est nulle ou nilpotente, ce qui est contraire au lemme. La seconde partie du théorème se démontre par des raisonnements analogues aux précédents.

Pour toute matrice d'ordre n et de genre $n - j$, on démontre que le rang de la matrice X est inférieur d'une unité au moins au rang r de la matrice X , lorsque $r > j$. Il en résulte une borne supérieure suivante pour l'indice α de la matrice X : $\alpha \leq 2^{n-j+1}$.

4. Nous désignons par $\Psi(x)$ ($= x^m + a_1 x^{m-1} + \dots$) le polynôme fondamental d'une matrice X d'ordre n . Ce polynôme est, on le sait, le polynôme dans K d'ordre minimum tel que $\Psi(X) = 0$. Tous les polynômes dont il est question dans la suite sont supposés être dans K . Toute racine x_i d'un diviseur irréductible $d(x)$ du polynôme $\Psi(x)$ est une racine de l'équation caractéristique de la matrice X et elle figure dans cette équation avec une certaine multiplicité m_i . Pour la commodité du langage nous appelons *multiplicité* du polynôme $d(x)$ le nombre Σm_i , où la sommation correspond aux différentes racines du polynôme $d(x)$.

Nous désignons par x_1, \dots, x_n les racines de l'équation caractéristique de la matrice X . Pour tout polynôme $Q(x)$ les racines de l'équation caractéristique de la matrice $Q(X)$ sont les valeurs

$$(2) \quad Q(x_1), \quad \dots, \quad Q(x_n).$$

Par conséquent, d'après le théorème I, le genre de la matrice $Q(x)$ est égal au nombre de zéros figurant parmi ces valeurs.

THÉORÈME II. — *Pour que le polynôme fondamental d'une matrice X soit réductible dans K , il faut et il suffit qu'il existe dans K des polynômes en X , non nuls, de genre ≥ 1 .*

Supposons, en effet, que, le polynôme $\Psi(x)$ soit réductible dans K de sorte qu'il contienne un facteur $d(x)$ irréductible dans K . Comme toute racine du polynôme $\Psi(x)$ figure parmi les nombres x_1, \dots, x_n , au moins une des valeurs (2), où l'on écrit d au lieu de Q , est nulle. Par conséquent le polynôme $d(X)$ est de genre > 1 et il n'est pas nul, car $d(x)$ est de degré

inférieur à celui de $\Psi(x)$. Supposons, en second lieu, qu'il existe dans K un polynome $Q(X)$ non nul et de genre > 1 . $Q(X)$ n'étant pas nul, on peut supposer que le polynome $Q(x)$ est de degré inférieur à celui de $\Psi(x)$. L'hypothèse concernant le genre de $Q(X)$ entraîne que, parmi les valeurs (2), il en figure une ou plusieurs nulles. Si $Q(x)$ n'est pas irréductible dans K , il contient un facteur irréductible qui s'annule pour au moins une des racines x_1, \dots, x_n . Il existe par conséquent un polynome $d(x)$ irréductible dans K , dont le degré est inférieur à celui de $\Psi(x)$, et qui s'annule pour au moins une des racines x_1, \dots, x_n . Or, toute racine en question est une racine du polynome fondamental $\Psi(x)$; par conséquent $\Psi(x)$ contient $d(x)$ comme facteur.

Nous énonçons enfin, sans démonstration, le théorème suivant :

THEORÈME III. — *Soit $Q(x)$ un polynome dans K tel que le genre g du polynome $Q(X)$ soit > 1 . Il existe alors des diviseurs irréductibles d_1, d_2, \dots, d_s du polynome $\Psi(x)$ qui sont diviseurs du polynome $Q(x)$:*

$$Q = q \cdot d_1^{k_1} d_2^{k_2} \dots d_s^{k_s};$$

dans cette formule les k désignent des nombres naturels convenables et q un polynome ne s'annulant pour aucune des racines du polynome $\Psi(x)$. Le genre g est la somme des multiplicités des différents diviseurs d_i .

5. Les résultats précédents sont à la base de nombreuses considérations concernant les rangs des grandeurs d'une algèbre abstraite associative quelconque.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 203, p. 600, séance du 5 octobre 1936.)