

Borůvka, Otakar: Scholarly works

Otakar Borůvka

Sur les systèmes multiplicatifs

C. R. Acad. Sci. Paris t. 204, 1937, 1779-1781

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/500050>

Terms of use:

© Académie des sciences, France, 1937

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

THÉORIE DES ENSEMBLES. — *Sur les systèmes multiplicatifs.*

Note de M. OTTOKAR BORŮVKA.

1. Un système multiplicatif (système m) \mathcal{M} est un ensemble abstrait non vide pour lequel une multiplication *associative* a été définie. Pour désigner le produit et la somme de deux ensembles, dans le sens de la théorie des ensembles, nous utilisons les symboles \cup , \vee et nous réservons le signe \cdot pour la multiplication. Le produit de deux éléments $a, b \in \mathcal{M}$ est alors ab et la loi associative supposée s'exprime par la formule suivante : $(ab)c = a(bc)$ pour $a, b, c \in \mathcal{M}$. A, B étant deux sous-ensembles de \mathcal{M} , $A, B, C \subset \mathcal{M}$, nous entendons par AB l'ensemble vide (\emptyset) si au moins un facteur jouit de cette propriété; autrement le symbole en question désigne l'ensemble de tous les $x \in \mathcal{M}$ tels qu'il existe $a \in A, b \in B, x = ab$.

2. Soit \mathcal{M} un système m . Pour $\alpha = 1, 2, \dots$, \mathcal{M}^α est un sous-système m , et l'on a $\mathcal{M} \supset \mathcal{M}^2 \supset \mathcal{M}^3 \supset \dots$. Nous définissons les ensembles M_α , $\alpha = 1, 2, \dots$, par les formules suivantes :

$$\mathcal{M}^\alpha = M_\alpha \vee \mathcal{M}^{\alpha+1}, \quad M_\alpha \cap \mathcal{M}^{\alpha+1} = \emptyset$$

et nous appelons, en particulier, l'ensemble M_1 , l'*excentre* et ses éléments les *facteurs primaires* du système m . \mathcal{M} . On démontre que tout élément de M_α est le produit de α facteurs primaires convenables, mais il n'est pas le produit d'un nombre plus grand que α d'éléments de \mathcal{M} .

3. Deux cas peuvent se présenter. Ou bien 1° il existe un nombre naturel β tel que $M_\alpha \neq \emptyset$ pour $1 \leq \alpha \leq \beta$ et $M_\alpha = \emptyset$ pour $\alpha \geq \beta + 1$. Dans ce cas les égalités suivantes ont lieu : $\mathcal{M}^{\beta+1} = \mathcal{M}^{\beta+2} = \dots$; nous appelons *noyau* du système m . \mathcal{M} le sous-système m . $\mathcal{M}^{\beta+1}$. Ou bien 2° on a $M_\alpha \neq \emptyset$ pour $\alpha = 1, 2, \dots$. Dans ce cas nous disons que le système m . \mathcal{M} est *sans noyau* et nous écrivons $\mathcal{M} = M_1 \vee M_2 \vee \dots$.

Nous ne considérons dans la suite que les systèmes m sans noyau. Dans un tel système m l'élément-unité n'existe pas.

4. Soit $\mathcal{M} = M_1 \vee M_2 \vee \dots$ un système m sans noyau. Tout élément $a \in \mathcal{M}$ étant dans un certain M_α , il lui est associé un nombre naturel α , nombre maximum de facteurs primaires de \mathcal{M} dont a est le produit. Nous

appelons α l'*indice* de l'élément a . Il existe, évidemment, un élément d'indice α quel que soit le nombre naturel α . Le système $m.\mathcal{M}$ s'appelle *homogène* si tout produit de α facteurs primaires, $\alpha = 1, 2, \dots$, est de l'indice α . Autrement \mathcal{M} est *non-homogène*. L'exemple le plus simple d'un système m homogène est fourni par le système cyclique infini

$$\mathfrak{Z} = \{z, z^2, z^3, \dots\}.$$

L'excentre de ce système m est donné, évidemment, par le facteur primaire unique z et, plus généralement, il n'y a qu'un seul élément z^α d'indice α , quel que soit le nombre naturel α . On démontre que le système $m.\mathcal{M}^\alpha$ est non-homogène quels que soient le système m sans noyau \mathcal{M} et le nombre naturel $\alpha > 1$. Tout système m sans noyau peut être immergé dans un système m non-homogène convenable.

5. Dans la théorie qui nous occupe la question de la représentation homomorphique de systèmes m sur le système cyclique \mathfrak{Z} joue un rôle important. Si un système m est homomorphiquement représentable sur \mathfrak{Z} , il est nécessairement sans noyau. Nous dirons qu'une décomposition $M_1 = A_1 \vee A_2 \vee \dots$ de son excentre M_1 est *génératrice* si $A_i \neq \emptyset$ et si les ensembles de différents *poids* correspondants

$$A_1, A_1^2 \vee A_2, A_1^3 \vee A_1^2 A_2 \vee A_2 A_1^2 \vee A_3, \dots$$

sont disjoints deux à deux. On a alors le résultat que les représentations homomorphiques du système $m.\mathcal{M}$ sur \mathfrak{Z} et les décompositions génératrices de son excentre se correspondent biunivoquement. En particulier, le système $m.\mathcal{M}$ est homomorphiquement représentable sur \mathfrak{Z} dans le cas et dans le cas seulement où il existe une décomposition génératrice de son excentre. Si le système $m.\mathcal{M}$ est homogène il est homomorphiquement représentable sur \mathfrak{Z} de manière que les images des facteurs primaires de \mathcal{M} se confondent dans le facteur primaire unique de \mathfrak{Z} . Inversement, l'existence d'une telle représentation caractérise les systèmes m homogènes. Ainsi par exemple le système m dont les éléments sont des matrices carrées d'ordre $n (> 1)$ et dont la multiplication est la composition habituelle de matrices est homogène s'il se trouve engendré par des matrices carrées d'ordre n jouissant de la propriété suivante : Toutes les matrices en question ont une matrice associée (compound), soit la $(i < n)j < n)^{-1^{\text{ème}}}$, en commun, et les différentes puissances de cette dernière sont mutuellement distinctes. Quant aux systèmes m non-homogènes, il en existe bien qui sont homomorphiquement représentables sur \mathfrak{Z} . Mais, quels que

soient le système $m. \mathcal{M}$ et le nombre naturel $\alpha > 1$, le système $m. \mathcal{M}^\alpha$ ne jouit pas de cette propriété. Par conséquent, les systèmes m non-homogènes qui sont des puissances supérieures à 1 d'autres systèmes m ont un caractère particulier en ce sens qu'un système m non-homogène donné n'est, en général, pas une puissance supérieure à 1 d'un système m convenable (1).

(1) Voir mon Mémoire *Studies on multiplicative systems*. Part 1, *Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk* (sous presse).

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 204, p. 1779, séance du 14 juin 1937.)