Borůvka, Otakar: Scholarly works

Otakar Borůvka
Teorie grupoidů. Část první

Spisy přír. fak. MU, č. 275, 1939, 17 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500056

Terms of use:

© Masarykova univerzita, 1939

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

SPISY VYDÁVANÉ PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU MASARYKOVY UNIVERSITY REDAKTOR	PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ MASARYK RÉDIGÉES PAR

ANTONÍN ŠIMEK.

ROK 1939. Čís. 275.

TEORIE GRUPOIDŮ.

ČÁST PRVNÍ.

NAPSAL

O. BORŮVKA.

VYCHÁZÍ S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY

VLASTNÍM NÁKLADEM VYDÁVÁ

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BRNO, KOUNICOVA 63

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28.

Akc. mor. knihtisk. Polygrafie v Brně.

TEORIE GRUPOIDŮ.

ČÁST PRVNÍ.

NAPSAL

O. BORŮVKA.

Tento spis spolu s druhou částí, která bude na něj bezprostředně navazovati, vznikl z přednášek o teorii grup, které jsem v r. 1938—39 konal na přírodovědecké fakultě Masarykovy university. V těchto přednáškách jsem se snažil formulovati a dokazovati věty o grupách takovým způsobem, aby bylo patrno, jak závisí na základních axiomech, jimiž jest definována grupa. To mne vedlo přirozeně především k systematickému studiu grupoidů v nejobecnějším smyslu, t. j. dvojic skládajících se vždy z nějaké neprázdné množiny G a násobení v G[1]). Zdá se mně pozoruhodné, že při velké obecnosti a možnosti bohatého rozčlenění ve speciálnější teorie zavedením dalších axiomů jsou v teorii grupoidů rozsáhlé úseky, které jdou rovnoběžně s teorií grup. Dominantními pojmy v tomto směru jsou pojem homomorfního zobrazení a pojem faktoroidu, jenž jest zobecněním pojmu grupy faktorů. Teorie soustředěné okolo těchto pojmů vyjadřují do značné míry obsah příslušné části teorie grup, na př. vět o isomorfismu a teorie normálních řetězců.

I. Rozklady množin.

1. Označení. Množiny (prvky množin) budeme označovati zpravidla velkými (malými) latinskými písmeny. K označení systémů množin budeme zpravidla používati velkých latinských písmen s pruhem, na př. $\overline{A}$, a pro jednotlivé množiny systému, jakožto prvky množiny, malá latinská písmena s pruhem, na př. $\bar{a}$. Když a značí prvek v množině A, píšeme, jak jest obvyklé v teorii množin, $a \in A$. Když A jest podmnožina v (nadmnožina na) B, píšeme $A \subset B$ anebo $B \supset A$ ($A \supset B$ anebo $B \subset A$). 0 značí prázdnou množinu. Symboly $\vee, \wedge, \cap$, vztahující se na dvě množiny, označují jejich součet, rozdíl, průnik; symboly $\notin$, $\not\subset$, $\not\supset$, $\neq$ značí *non* $\in$, *non* $\subset$, *non* $\supset$, *non* $=$. Když dvě množiny mají neprázdný průnik pravíme, že jsou *incidentní.* Symbol $|\overline{A}|$ značí součet těch množin, které jsou prvky systému $\overline{A}$. Kartézský součin α (> 1) neprázdných množin $A_1, \ldots, A_\alpha$ t. j. množinu všech uspořádaných skupin $\{a_1, \ldots, a_\alpha\}$ prvků takových, že $a_1 \in A_1, \ldots, a_\alpha \in A_\alpha$ budeme značiti symbolem $A_1 \times \ldots \times A_\alpha$.

1) Název „grupoid“ v tomto smyslu vyskytuje se ve spise B. A. Hausmann and Oystein Ore: Theory of quasigroups (Amer. J. Math., Vol. LIX, 1937). V užším smyslu se vyskytuje ve spise Garrett Birkhoff, Rings of sets (Duke Math. J., Vol. 3., 1937, p. 444).

2. Rozklad množiny. Nechť G značí (všude v dalším) neprázdnou množinu. Každý systém disjunktních podmnožin v G, pokrývající G, nazývá se *rozklad množiny* G. Označení: $\overline{G}$. Zřejmě jest $|\overline{G}| = G$. Z daného rozkladu množiny G vznikne opět rozklad množiny G, když k němu přidáme anebo z něj odstraníme prázdnou množinu. V dalším předpokládáme, alespoň pokud není uveden opak, že jde o rozklady, mezi jejichž prvky není prázdná množina. Jednoduchými příklady jsou rozklad, jehož jediným prvkem jest množina G, a rozklad, jehož prvky jsou jednobodové množiny $\{a\}$, kde $a \in G$. První jest t. zv. *největší rozklad množiny* G a budeme jej označovati $\overline{G}_{max}$; druhý jest *nejmenší rozklad množiny* G, $\overline{G}_{min}$.

Zřejmě jest každý neprázdný disjunktní systém $\overline{A}$ neprázdných podmnožin v G rozklad množiny $|\overline{A}|$; zejména jest tedy každá neprázdná podmnožina v nějakém rozkladu $\overline{G}$ množiny G rozklad součtu jejích prvků.

3. Zákryt a zjemnění rozkladu. Nechť $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$ značí rozklady množiny G. Když každý prvek v $\overline{G}_1$ jest součtem některých podmnožin v G, jež jsou prvky rozkladu $\overline{G}_2$, pravíme, že $\overline{G}_1$ ($\overline{G}_2$) jest *zákryt* (*zjemnění*) *rozkladu* $\overline{G}_2$ ($\overline{G}_1$) anebo že rozklad $\overline{G}_1$ ($\overline{G}_2$) *jest* po př. *leží na* (*pod*) *rozkladu* (*rozkladem*) $\overline{G}_2$ ($\overline{G}_1$). Označení: $\overline{G}_1 \geq \overline{G}_2$ anebo $\overline{G}_2 \leq \overline{G}_1$.

Když $\overline{G}_1 \geq \overline{G}_2$ pak ke každému prvku $\bar{a} \in \overline{G}_1$ existuje podmnožina $\overline{a}$ prvků v $\overline{G}_2$, která jest rozklad množiny a; systém podmnožin $\overline{a}$, pro $a \in \overline{G}_1$, jest rozklad rozkladu $\overline{G}_2$. Naopak, když každý prvek a libovolného rozkladu $\overline{G}_1$ množiny G nahradíme nějakým jeho rozkladem $\overline{\overline{a}}$, obdržíme jakési zjemnění rozkladu $\overline{G}_1$. Když každý prvek a nějakého rozkladu $\overline{\overline{G}}_2$ libovolného rozkladu $\overline{G}_2$ množiny G nahradíme množinou $|a|$, obdržíme jakýsi zákryt rozkladu $\overline{G}_2$; o tomto zákrytu pravíme, že jest *vynucen* rozkladem $\overline{\overline{G}}_2$.

Nechť $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$, $\overline{G}_3$ značí libovolné rozklady množiny G.

·*1. Jest* $\overline{G}_1 \geq \overline{G}_2$ *když a jen když pro* $\bar{a}_1 \in \overline{G}_1$, $\bar{a}_2 \in \overline{G}_2$, $a_1 \cap a_2 \neq 0$ *platí* $a_1 \supset \bar{a}_2$.

Vskutku, nechť $\overline{G}_1 > \overline{G}_2$ a nechť $a_1 \in \overline{G}_1$, $a_2 \in \overline{G}_2$, $a_1 \cap \bar{a}_2 \neq 0$. Pak $\bar{a}_1$ jest součtem některých podmnožin v G, jež jsou prvky rozkladu $\overline{G}_2$. Jednou z těchto podmnožin jest $\bar{a}_2$, neboť $a_1 \cap a_2 \neq 0$ a prvky rozkladu $\overline{G}_2$ jsou disjunktní. Tedy $a_1 \supset \bar{a}_2$. — Nechť naopak pro $a_1 \in \overline{G}_1$, $a_2 \in \overline{G}_2$, $\bar{a}_1 \cap \bar{a}_2 \neq 0$ platí $\bar{a}_1 \supset \bar{a}_2$. Pak $\bar{a}_1$ jest součtem těch podmnožin v G, které jsou prvky rozkladu $\overline{G}_2$ a jsou incidentní s $\bar{a}_1$. Tedy $\overline{G}_1 \geq \overline{G}_2$.

·*2. Platí:* *1°* $\overline{G}_1 \geq \overline{G}_1$ (*reflexivnost*);
2° když $\overline{G}_1 \geq \overline{G}_2$, $\overline{G}_2 \geq \overline{G}_1$ *pak* $\overline{G}_1 = \overline{G}_2$ (*antisymetrie*);
3° když $\overline{G}_1 \geq \overline{G}_2$, $\overline{G}_2 \geq \overline{G}_3$ *pak* $\overline{G}_1 \geq \overline{G}_3$ (*transitivnost*)

Důkaz plyne snadno z definice obsahu znaménka $\geq$ a z ·*1.*

·*3. Jest* $\overline{G}_{max} \geq \overline{G}_1 \geq \overline{G}_{min}$.

Důkaz je snadný.

Věta ·*2* vyjadřuje, že vztah $\geq$ definuje v každém neprázdném systému rozkladů množiny G částečné uspořádání. Podle ·*3* má takto částečně uspořádaná množina všech rozkladů množiny G největší prvek $\overline{G}_{max}$ a nejmenší prvek $\overline{G}_{min}$.

4. Zákryt a zjemnění systému rozkladů. Nechť $(\overline{X})$ značí neprázdný systém rozkladů množiny G. Když nějaký rozklad $\overline{G}$ množiny G jest zákryt (zjemnění) každého rozkladu v $(\overline{X})$, tedy když $\overline{G} \geq \overline{X}$ $(\overline{X} \geq \overline{G})$ pro $\overline{X} \in (\overline{X})$, pravíme, že $\overline{G}$ jest *zákryt* (*zjemnění*) *systému* $(\overline{X})$ anebo že *jest* po př. *leží na* (*pod*) *systému* (*systémem*) $(\overline{X})$. Pravíme také, že $\overline{G}$ jest *společný zákryt* (*společné zjemnění*) *rozkladů v systému* $(\overline{X})$. Zákryt $\overline{G}$ systému $(\overline{X})$ se nazývá *nejmenší* (*největší*), když každý zákryt systému $(\overline{X})$ leží na (pod) $\overline{G}$. Zjemnění $\overline{G}$ systému $(\overline{X})$ se nazývá *největší* (*nejmenší*), když každé zjemnění systému $(\overline{X})$ leží pod (na) $\overline{G}$. Zřejmě jest $\overline{G}_{max}$ jediný největší zákryt systému $(\overline{X})$ a $\overline{G}_{min}$ jediné nejmenší zjemnění systému $(\overline{X})$.

·*1. Existuje jediný nejmenší zákryt $\overline{U}$ systému $(\overline{X})$ a jest určen konstrukcí udanou v části a) následujícího důkazu.*

Důkaz. *a*) Nechť $\overline{G}_0 \in (\overline{X})$ a nechť $\bar{a}_0, \bar{b}_0 \in \overline{G}_0$. Uspořádanou konečnou množinu prvků v $\overline{G}_0$

$$\{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha\}$$

nazveme řetězec v $(\overline{X})$ od $\bar{a}_0$ do $\bar{b}_0$, když $\bar{a}_1 = \bar{a}_0$, $\bar{a}_\alpha = \bar{b}_0$ a když ke každým dvěma sousedním prvkům té množiny existuje podmnožina v G, která jest prvkem některého rozkladu v systému $(\overline{X})$ a jest s oběma incidentní. Vztah definovaný pro libovolné dva prvky $\bar{a}_0, \bar{b}_0 \in \overline{G}_0$ tak, že existuje řetězec v $(\overline{X})$ od $\bar{a}_0$ do $\bar{b}_0$, jest zřejmě reflexivní, symetrický a transitivní. Tedy existuje rozklad $\overline{\overline{G}}_0$ rozkladu $\overline{G}_0$ takový, že pro každé dva prvky v $\overline{G}_0$, které jsou v témže prvku rozkladu $\overline{\overline{G}}_0$, existuje řetězec v $(\overline{X})$ od jednoho k druhému, kdežto pro žádné dva prvky v $\overline{G}_0$, které nejsou v témže prvku rozkladu $\overline{\overline{G}}_0$, takový řetězec neexistuje. Zákryt $\overline{U}$ rozkladu $\overline{G}_0$ vynucený rozkladem $\overline{\overline{G}}_0$ jest právě jediný nejmenší zákryt, o nějž jde.

b) $\overline{U}$ jest zákryt systému $(\overline{X})$. Vskutku, nechť $\overline{X} \in (\overline{X})$. Nechť $\bar{u} \in \overline{U}$, $\bar{x} \in \overline{X}$, $\bar{u} \cap \bar{x} \neq 0$. Podle *3·1* stačí ukázati, že $\bar{u} \supset \bar{x}$. Podle definice $\bar{u}$ a protože $\bar{u} \cap \bar{x} \neq 0$, existuje prvek $\bar{a}_0 \in \overline{G}_0$ takový, že $\bar{u} \supset \bar{a}_0$, $\bar{a}_0 \cap \bar{x} \neq 0$. Nechť $x \in \bar{x}$. Pak existuje prvek $\bar{b}_0 \in \overline{G}_0$ takový, že $x \in \bar{b}_0$. Zřejmě $\{\bar{a}_0, \bar{b}_0\}$ jest řetězec v $(\overline{X})$ od $\bar{a}_0$ do $\bar{b}_0$. Tedy $\bar{a}_0, \bar{b}_0$ jsou v témže prvku rozkladu $\overline{\overline{G}}_0$ a tedy $\bar{u} \supset \bar{b}_0$. Tedy $x \in \bar{u}$ a tedy $\bar{u} \supset \bar{x}$.

c) $\overline{U}$ jest nejmenší zákryt systému $(\overline{X})$. Vskutku, nechť $\overline{G}$ jest nějaký zákryt systému $(\overline{X})$. Nechť $\bar{a} \in \overline{G}$, $\bar{u} \in \overline{U}$, $\bar{a} \cap \bar{u} \neq 0$. Opět podle *3·1* stačí ukázati, že $\bar{a} \supset \bar{u}$. Podle předpokladu jest $\bar{a}$ součtem některých podmnožin v G, jež jsou prvky rozkladu $\overline{G}_0$ a podobně $\bar{u}$. Odtud a z předpokladu $\bar{a} \cap \bar{u} \neq 0$ plyne, že existuje prvek $\bar{a}_0 \in \overline{G}_0$ takový, že $\bar{a}_0 \subset \bar{a} \cap \bar{u}$. Nechť $\bar{b}_0 \in \overline{G}_0$, $\bar{b}_0 \subset \bar{u}$. Pak existuje řetězec v $(\overline{X})$ od $\bar{a}_0$ do $\bar{b}_0$

$$\{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha\} \qquad (\bar{a}_1 = \bar{a}_0, \bar{a}_\alpha = \bar{b}_0).$$

Podle předpokladu jest $\bar{a}_1 \subset a$. Připusťme pro indukci, že pro nějaké $(1 \leq) \beta (\leq \alpha - 1)$ platí $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\beta \subset \bar{a}$. Pak existuje podmnožina $\bar{x}$ v G, která jest prvkem vhodného rozkladu $\overline{X}$ v systému $(\overline{X})$ a jest s $\bar{a}_\beta, a_{\beta+1}$ incidentní. Tedy $\bar{x} \cap \bar{a} \neq 0$. Protože $\overline{X} \leq \overline{G}$ jest $\bar{x} \subset \bar{a}$. Tedy $\bar{a}_{\beta+1} \cap \bar{a} \neq 0$ a protože $\overline{G}_0 \leq \overline{G}$ jest $\bar{a}_{\beta+1} \subset \bar{a}$. Tedy $\bar{a}_\alpha \subset \bar{a}$ a tedy $\bar{u} \subset \bar{a}$.

d) $\overline{U}$ jest jediný nejmenší zákryt systému $(\overline{X})$. Vskutku, nechť také $\overline{G}$ jest nejmenší zákryt systému $(\overline{X})$. Protože $\overline{G}$ jest zákryt a $\overline{U}$ jest nejmenší zákryt systému $(\overline{X})$ jest $\overline{G} \geq \overline{U}$. Podobně $\overline{U} \geq \overline{G}$ takže $\overline{U} = \overline{G}$ podle *3·2*.

·2. *Existuje jediné největší zjemnění $\overline{V}$ systému $(\overline{X})$ a jest určeno konstrukcí udanou v části a) následujícího důkazu.*

Důkaz. *a*) Nechť $a, b \in G$. Pravíme, že prvek a se dá spojiti v $(\overline{X})$ s prvkem b, když ten prvek každého rozkladu v $(\overline{X})$, který obsahuje a, obsahuje také b. Vztah definovaný pro libovolné dva prvky $a, b \in G$ tak, že a se dá spojiti v $(\overline{X})$ s b, jest zřejmě reflexivní, symetrický a transitivní. Tedy existuje rozklad $\overline{V}$ množiny G takový, že každé dva prvky v G, které jsou v témže prvku rozkladu $\overline{V}$, se dají spojiti v $(\overline{X})$, kdežto žádné dva prvky v G, které nejsou v témže prvku rozkladu $\overline{V}$, se spojiti nedají. $\overline{V}$ jest právě jediné největší zjemnění, o něž jde.

b) $\overline{V}$ jest zjemnění systému $(\overline{X})$. Vskutku, nechť $\overline{X} \in (\overline{X})$. Nechť $v \in \overline{V}$, $\bar{x} \in \overline{X}$, $v \cap \bar{x} \neq 0$. Podle *3·1* stačí ukázati, že $\bar{x} \supset \bar{v}$. Protože $\bar{v} \cap \bar{x} \neq 0$, existuje $a \in \bar{v} \cap \bar{x}$ a podle definice $\overline{V}$ se dá prvek a spojiti v $(\overline{X})$ s každým prvkem $b \in v$. Tedy $b \in \bar{x}$ a tedy $\bar{v} \subset \bar{x}$.

c) $\overline{V}$ jest největší zjemnění systému $(\overline{X})$. Vskutku, nechť $\overline{G}$ jest nějaké zjemnění systému $(\overline{X})$. Nechť $v \in \overline{V}$, $\bar{a} \in \overline{G}$, $v \cap \bar{a} \neq 0$. Opět podle *3·1* stačí ukázati, že $v \supset a$. Protože $\bar{v} \cap \bar{a} \neq 0$, existuje $a \in \bar{v} \cap \bar{a}$. Nechť $\overline{X} \in (\overline{X})$, $\bar{x} \in \overline{X}$, $a \in \bar{x}$. Protože $\overline{G}$ jest zjemnění systému $(\overline{X})$, jest $\bar{a} \subset \bar{x}$. Tedy a se dá spojiti v $(\overline{X})$ s každým prvkem $b \in a$. Tedy $\bar{v} \supset \bar{a}$.

d) $\overline{V}$ jest jediné největší zjemnění systému $(\overline{X})$. Vskutku, nechť také $\overline{G}$ jest největší zjemnění systému $(\overline{X})$. Protože $\overline{G}$ jest zjemnění a $\overline{V}$ jest největší zjemnění systému $(\overline{X})$, jest $\overline{G} \leq \overline{V}$. Podobně $\overline{V} \leq \overline{G}$, takže $\overline{V} = \overline{G}$ podle *3·2*.

Podle ·*1·2* jest množina všech rozkladů množiny G, částečně uspořádaná výše definovaným vztahem $\geq$, *úplný svaz*[2]). Jak již bylo uvedeno v 3. má tento úplný svaz největší a nejmenší prvek.

Nejmenší společný zákryt dvou rozkladů $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$ množiny G budeme značiti symbolem $\overline{G}_1 \cup \overline{G}_2$; jejich největší společné zjemnění symbolem $\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2$.

---

[2]) Neprázdná množina A, částečně uspořádaná nějakým vztahem $>$, nazývá se *úplný svaz* (complete lattice), když má tuto vlastnost: Ke každé neprázdné podmnožině X v A existuje (nutně jediný) prvek $u \in A$ takový, že $y \geq u$ pro každý prvek $y \in A$, pro nějž $y \geq x$ při všech $x \in X$; a existuje (nutně jediný) prvek $v \in A$ takový, že $v \geq z$ pro každý prvek $z \in A$, pro nějž $x \geq z$ při všech $x \in X$. Viz na př. Garrett Birkhoff, *Lattices and their applications* [Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 44 (1938), p. 793].

5. Rozklady v množině. Nechť $\overline{A}$ značí neprázdný disjunktní systém neprázdných podmnožin v G. Protože $\overline{A}$ jest rozklad podmnožiny $|\overline{A}|$ v G, pravíme, že $\overline{A}$ jest *rozklad v* G.

Nechť $\overline{A}, \overline{B}$ značí nějaké rozklady v G.

Množina neprázdných průniků každého prvku v $\overline{A}$ s každým prvkem v $\overline{B}$ nazývá se *průsek rozkladů* $\overline{A}, \overline{B}$. Označení: $\overline{A} \sqcap \overline{B}$ anebo $\overline{B} \sqcap \overline{A}$. Zřejmě jest $|\overline{A} \sqcap \overline{B}| = |\overline{A}| \cap |\overline{B}|$. Tedy jest $\overline{A} \sqcap \overline{B} \neq 0$ když a jen když $|\overline{A}| \cap |\overline{B}| \neq 0$ a v tomto případě jest $\overline{A} \sqcap \overline{B}$ rozklad množiny $|\overline{A}| \cap |\overline{B}|$. Podobný jest pojem *průseku* (libovolné neprázdné) *podmnožiny* $A \subset G$ *a rozkladu* $\overline{B}$; takový průsek jest množina neprázdných průniků množiny A s jednotlivými prvky v $\overline{B}$. Označení $A \sqcap \overline{B}$ anebo $\overline{B} \sqcap A$.

Množina prvků v $\overline{B}$ incidentních s některým prvkem v $\overline{A}$ nazývá se *obal rozkladu* $\overline{A}$ *v* $\overline{B}$. Označení: $\overline{A} \sqsubset \overline{B}$ anebo $\overline{B} \sqsupset \overline{A}$. Podle této definice jest tedy $\overline{A} \sqsubset \overline{B} \subset \overline{B}$. Dále jest zřejmé, že $|\overline{A}| \cap |\overline{A} \sqsubset \overline{B}| = |\overline{A}| \cap |\overline{B}|$. Tedy jest $\overline{A} \sqsubset \overline{B} \neq 0$ když a jen když $|\overline{A}| \cap |\overline{B}| \neq 0$. Podobný jest pojem *obalu* (libovolné neprázdné) *podmnožiny* $A \subset G$ *v* $\overline{B}$; takový obal jest množina prvků v $\overline{B}$ incidentních s A. Označení: $A \sqsubset \overline{B}$ anebo $\overline{B} \sqsupset A$.

Pojem průseku dvou rozkladů souvisí s pojmem průseku podmnožiny a rozkladu a podobně pojem obalu rozkladu v dalším rozkladu souvisí s pojmem obalu podmnožiny v rozkladu, takto:

·1 *Jest* 1^0 $\overline{A} \sqcap \overline{B} = (A \sqcap \overline{B}) \sqcap (\overline{A} \sqcap B)$ 2^0 $\overline{A} \sqsubset \overline{B} = A \sqsubset \overline{B}$, *při čemž* $A = |\overline{A}|$, $B = |\overline{B}|$.

Důkaz jest snadný.

Když jest dána podmnožina A a rozklad $\overline{B}$ v G takové, že $A \cap |\overline{B}| \neq 0$, jest jimi jednoznačně určen jednak rozklad $A \sqcap \overline{B}$ množiny $A \cap |\overline{B}|$, jednak neprázdná podmnožina $A \sqsubset \overline{B}$ v $\overline{B}$.

·2 *Pro* $A_1, A_2 \subset G$, $A_1 \cap A_2 \neq 0$ *jest* $(A_1 \cap A_2) \sqsubset \overline{B} \subset (A_1 \sqsubset \overline{B}) \cap (A_2 \sqsubset \overline{B})$.

Důkaz jest snadný.

Hořejší pojmy a tvrzení mají ovšem smysl a platí zejména v tom případě, když jeden anebo oba rozklady $\overline{A}, \overline{B}$ jsou rozklady množiny G. Zejména, když jest dána neprázdná podmnožina A v G a nějaký rozklad $\overline{G}$ množiny G jest jimi jednoznačně určen jednak rozklad $A \sqcap \overline{G}$ množiny A, jednak neprázdná podmnožina $A \sqsubset \overline{G}$ v $\overline{G}$.

Nechť $\overline{G}_1, \overline{G}_2$ značí rozklady množiny G.

·3. *Jest* $\overline{G}_1 \sqcap \overline{G}_2 = \overline{G}_1 \,\overline{\sqcap}\, \overline{G}_2$.

Důkaz je snadný.

·4. *Když existují* $\bar{a}_1 \in \overline{G}_1$, $\bar{a}_2 \in \overline{G}_2$ *takové, že* $|\bar{a}_1 \sqsubset \overline{G}_2| = |\bar{a}_2 \sqsubset \overline{G}_1|$ $(= \bar{u})$ *pak* $\bar{u} \in \overline{G}_1 \cup \overline{G}_2$.

Vskutku, podle definice $\bar{u}$ jest $\bar{u} = \Sigma_1 \bar{b}_1 - \Sigma_2 \bar{b}_2$, kde Σ_1 (Σ_2) se vztahuje na ty prvky $\bar{b}_1 \in \overline{G}_1$ ($\bar{b}_2 \in \overline{G}_2$), které jsou incidentní s $\bar{a}_2$ ($\bar{a}_1$). Protože každý prvek v $\bar{a}_1$ ($\bar{a}_2$) jest v některém prvku rozkladu $\overline{G}_2$ ($\overline{G}_1$), jest $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \subset \bar{u}$. Tedy jest $\bar{a}_1$ ($\bar{a}_2$) jedním z prvků $\bar{b}_1$ ($\bar{b}_2$) a tedy jest incidentní s $a_2\,(a_1)$. Pro $b_1 \in \overline{G}_1$, $\bar{b}_1 \subset \bar{u}$ jest tedy $\{a_1, \bar{b}_1\}$ řetězec v $\{G_1, G_2\}$ od a_1 do $\bar{b}_1$. Zbývá tedy ukázati, že když $\bar{b}_1 \in \overline{G}_1$, $\bar{b}_1 \not\subset \bar{u}$, neexistuje řetězec v $\{\overline{G}_1, \overline{G}_2\}$ od $\bar{a}_1$ do $\bar{b}_1$. Existuje-li takový řetězec $\{a_1 = \bar{a}_{10}, \bar{a}_{11}, \ldots, a_{1\alpha} = b_1\}$, pak při vhodném $(0 \leq)\, \beta\, (\leq \alpha - 1)$ jest $\bar{a}_{1\beta} \subset \bar{u}$, $\bar{a}_{1,\beta+1} \not\subset \bar{u}$. Podle definice řetězce existuje $\bar{b}_2 \in \overline{G}_2$ incidentní s $\bar{a}_{1\beta}$ i s $\bar{a}_{1,\beta+1}$. Protože $\bar{a}_{1\beta} \subset \bar{u}$ a $\bar{b}_2$ jest incidentní s $\bar{a}_{1\beta}$, jest $\bar{b}_2 \subset \bar{u}$ a protože jest incidentní s $a_{1,\beta+1}$, jest $\bar{a}_{1,\beta+1} \subset \bar{u}$.

6. Spřažené rozklady. Nechť $\overline{A}, B$ značí nějaké rozklady v G. Pravíme, že $\overline{A}, \overline{B}$ jsou *spřažené*, když ke každému prvku $a \in \overline{A}$ existuje jediný prvek $\bar{b} \in \overline{B}$ s ním incidentní a ke každému prvku $\bar{b} \in B$ jediný prvek $\bar{a} \in \overline{A}$ incidentní s $\bar{b}$. — Když $\overline{A}, B$ jsou spřažené, jest zřejmě $A \quad \overline{B} \sqsubset \overline{A}$, $\overline{B} = \overline{A} \sqsubset \overline{B}$.

V dalším o rozkladech $\overline{A}, \overline{B}$ předpokládáme, že $\overline{A} = \overline{B} \sqsubset \overline{A}$, $\overline{B} - \overline{A} \sqsubset B$. Důsledkem tohoto předpokladu ovšem jest $|\overline{A}| \cap |\overline{B} \neq 0$.

·1. $\overline{A}, \overline{B}$ jsou spřažené když a jen když $\overline{A} \sqcap |\overline{B}| = \overline{B} \sqcap |\overline{A}|$.

Důkaz. *a*) Nechť $\overline{A}, \overline{B}$ jsou spřažené. Nechť $\bar{c} \in \overline{A} \sqcap |\overline{B}|$, takže $\bar{c} = a \cap |\overline{B}|$ při vhodném $\bar{a} \in \overline{A}$. Podle předpokladu existuje jediný prvek $\bar{b} \in \overline{B}$ incidentní s $\bar{a}$ a $\bar{a}$ jest jediný prvek v $\overline{A}$ incidentní s $\bar{b}$. Tedy $\bar{c} = a \cap \bar{b} - \bar{b} \cap |\overline{A}| \in \overline{B} \sqcap |\overline{A}|$.

b) Nechť $\overline{A} \sqcap |\overline{B}| = \overline{B} \sqcap |\overline{A}|$. Podle předpokladu jest $\overline{A} = \overline{B} \sqsubset \overline{A}$, takže každý prvek $\bar{a} \in \overline{A}$ jest incidentní s některým prvkem v $\overline{B}$. Jestliže nějaký prvek $\bar{a} \in \overline{A}$ jest incidentní s $\bar{b}_1, b_2 \in \overline{B}$, pak $\bar{a} \cap (\bar{b}_1 \vee \bar{b}_2) \subset a \cap \ \overline{B}| \in \overline{B} \sqcap |\overline{A}|$, a tedy existuje $\bar{b} \in \overline{B}$ takový, že $\bar{a} \cap (\bar{b}_1 \vee \bar{b}_2) \subset |\overline{A}| \cap \bar{b}$; protože prvky systému $\overline{B}$ jsou disjunktní plyne, odtud $\bar{b}_1 = \bar{b}_2 - \bar{b}$.

Nechť $\overline{C}$ značí společný zákryt rozkladů $\overline{A} \sqcap |\overline{B}|, \overline{B} \sqcap |\overline{A}|$ množiny $|\overline{A}| \cap |\overline{B}|$. Nechť $\overline{\overline{A}}(B)$ značí rozklad rozkladu $\overline{A}\,(\overline{B})$ definovaný tak, že každý prvek v $\overline{A}\,(\overline{\overline{B}})$ se skládá ze všech prvků v $\overline{A}\,(\overline{B})$ incidentních s týmže prvkem v $\overline{C}$. Nechť $\mathring{A}\,(\mathring{B})$ značí zákryt rozkladu $\overline{A}\,(\overline{B})$ vynucený rozkladem $A\,(B)$; tedy $\Sigma \bar{a} \in \mathring{A}$ $(\Sigma \bar{b} \in \mathring{B})$ když a jen když $\Sigma(a \cap |\overline{B}|) \in C$ $(\Sigma(\bar{b} \cap |\overline{A}|) \in \overline{C})$.

·2. $\mathring{A}, \mathring{B}$ jsou spřažené a $\mathring{A} \sqcap |\overline{B}| = \mathring{B} \sqcap |\overline{A}| = \overline{C}$.

Vskutku, protože $\overline{A} = \overline{B} \sqsubset \overline{A}$ jest i $\mathring{A} = \mathring{B} \sqsubset \mathring{A}$; podobně $\mathring{B} = \mathring{A} \sqsubset \mathring{B}$. Mimoto $|\mathring{A}| = |\overline{A}|$, $|\mathring{B}| = |\overline{B}|$. Podle ·*1* stačí tedy dokázati platnost druhé části tvrzení. Nechť tedy $(\Sigma_1\, a) \cap |\overline{B}| \in \mathring{A} \sqcap |\overline{B}|$, takže $\Sigma_1\, a \in \mathring{A}$. Pak $(\Sigma_1\, a) \cap |B| = \Sigma_1\, (a \cap |\overline{B}|) \in \overline{C}$. Protože $\overline{C}$ jest současně zákryt rozkladu $\overline{B} \sqcap |A|$ množiny $|\overline{A}| \cap |\overline{B}|$, jest $\Sigma_1\, (a \cap |\overline{B}|) = \Sigma_2\, (\bar{b} \cap |\overline{A}|)$ při vhodných $\bar{b} \in \overline{B}$. Tedy $\Sigma_2\, \bar{b} \in \mathring{B}$, takže $\Sigma_2\, (\bar{b} \cap |\overline{A}|) = (\Sigma_2\, \bar{b}) \cap |\overline{A}| \in \mathring{B} \cap |\overline{A}|$. Tedy $(\Sigma_1\, a) \cap |B| \in \mathring{B} \cap |\overline{A}|$.

Ve větách ·*1*, ·*2* jsme o rozkladech $\overline{A}, \overline{B}$ předpokládali, že $A = B \sqsubset \overline{A}$, $\overline{B} = \overline{A} \sqsubset \overline{B}$. Všimněme si, že když $\overline{A}, \overline{B}$ splňují jenom podmínku $|\overline{A}| \cap |\overline{B}| \neq 0$, jsou $\overline{A}_1 = A \sqcap |\overline{B} \sqsubset \overline{A}|$, $\overline{B}_1 = B \sqcap |\overline{A} \sqsubset B|$ rozklady v $\overline{G}$ takové, že $\overline{A}_1 = \overline{B}_1 \sqsubset \overline{A}_1$, $\overline{B}_1 = \overline{A}_1 \sqsubset \overline{B}_1$.

II. Grupoidy.

7. Grupoid. Nechť opět G značí neprázdnou množinu. Každé zobrazení množiny $G \times G$ do množiny G nazývá se *násobení v* G. Každé násobení v G jest tedy podmnožina $\mathfrak{M}$ množiny $G \times G \times G$ taková, že ke každému prvku $(a, b) \in G \times G$ existuje právě jeden prvek $c \in G$, pro nějž $(a, b, c) \in \mathfrak{M}$. Když jest dáno násobení v G, pak každý prvek $(a, b) \in G \times G$ jednoznačně určuje jistý prvek $c \in G$ a sice ten, pro nějž $(a, b, c) \in \mathfrak{M}$. Píšeme pak $a \,.\, b = c$, kratčeji $ab = c$, a pravíme, že c jest *součin prvku* a *a prvku* b (v tomto pořádku); a, b jsou *činitele* součinu c. Množina G spolu s nějakým násobením $\mathfrak{M}$ v G jest *grupoid*. Označení: $(G, \mathfrak{M})$, kratčeji $\mathfrak{G}$. G jest *pole grupoidu* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{M}$ jest násobení v grupoidu $\mathfrak{G}$. Pojmy definované pro pole grupoidu přenášíme na grupoid. Mluvíme tedy na příklad o prvcích v grupoidu, podmnožinách v grupoidu, rozkladech grupoidu, místo o prvcích v poli grupoidu, podmnožinách v poli grupoidu, rozkladech pole grupoidu. Zvláště rozumíme *řádem* grupoidu kardinální číslo jeho pole. — Když některý prvek e_l (e_p; e) $\in G$ má tu vlastnost, že $e_l a = a$ ($a e_p = a$; $e a = a e = a$) pro každý prvek $a \in G$, nazývá se *levá jednotka* (*pravá jednotka*; *jednotka*).

8. Součin dvou množin. Nechť $(G, \mathfrak{M})$ značí grupoid. Nechť $A, B, C \subset G$. Když $A \neq 0 \neq B$, nechť $\mathfrak{M}_{A \times B}$ značí částečné zobrazení množiny $A \times B$ do G, takže $\mathfrak{M}_{A \times B} = (A \times B \times G) \cap \mathfrak{M}$. Množina všech prvků $c \in G$ takových, že $(a, b, c) \in \mathfrak{M}_{A \times B}$ při vhodných $a, b \in G$ nazývá se *součin množiny* A *a množiny* B (v tomto pořádku). Označení $A . B$, kratčeji AB. AB jest tedy množina všech součinů ab, kde $a \in A$, $b \in B$. Když alespoň jedna z množin A, B jest prázdná, rozumíme součinem AB množiny A a množiny B prázdnou množinu. V tomto případě jest ovšem $AB = BA$. — Zřejmě jest $GG \subset G$.

·1. *Když* $A \subset B$ *jest* $CA \subset CB$ *a* $AC \subset BC$.

Důkaz plyne bezprostředně z definice součinu množin.

·2. *Jest* $(A \vee B)\, C = AC \vee BC$, $C\,(A \vee B) = CA \vee CB$.

Důkaz jest snadný.

9. Podgrupoid, nadgrupoid. Nechť $0 \neq A \subset G$. Když $AA \subset A$ jest $\mathfrak{M}_{A \times A}$ násobení v A. Pak $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{M}_{A \times A})$ jest grupoid. Pravíme, že $\mathfrak{A}$ jest *podgrupoid v* $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{G}$ jest *nadgrupoid na* $\mathfrak{A}$; píšeme $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ anebo $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{A}$. Když $A \neq G$ pravíme, že $\mathfrak{A}$ jest *vlastní* podgrupoid v $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{G}$ jest *vlastní* nadgrupoid na $\mathfrak{A}$. Když dokonce $GA \subset A$ (po případě $AG \subset A$, $GA \subset A \supset AG$) jest $\mathfrak{A}$ *levý* (po případě *pravý*, *oboustranný*) *ideál v* $\mathfrak{G}$. Případ $A \neq G$ charakterisujeme opět přívlastkem *vlastní*.

10. Průnik, spojení podgrupoidů. Nechť $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$. Nechť $(\mathfrak{P})$ značí systém všech podgrupoidů v $\mathfrak{G}$, které jsou podgrupoidy současně v $\mathfrak{A}$ i v $\mathfrak{B}$. Nechť $(\mathfrak{P}) \neq 0$. Nechť P značí součet polí prvků systému $(\mathfrak{P})$, takže $(0 \neq)$

$P \subset A \cap B$ ($= C$). Ze vztahu $C \subset A, B$ plyne, podle *8·1*, $CC \subset AC \subset AA \subset A$ a podobně $CC \subset B$. Tedy $CC \subset C$. Tedy $\mathfrak{P} = (C, \mathfrak{M}_{C \times C}) \varepsilon (\mathfrak{P})$ a tedy $C \subset P$. Tedy $P = C$. Pravíme, že $\mathfrak{P}$ jest *průnik podgrupoidů* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$. Označení $\mathfrak{P} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ anebo $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}$. Každý podgrupoid v $\mathfrak{G}$, který jest podgrupoid současně v $\mathfrak{A}$ i v $\mathfrak{B}$, jest zřejmě podgrupoid v $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$. V tomto smyslu jest $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ největší podgrupoid současně v $\mathfrak{A}$ i v $\mathfrak{B}$.

Nechť $(\mathfrak{S})$ jest systém všech podgrupoidů v $\mathfrak{G}$, které jsou nadgrupoidy současně na $\mathfrak{A}$ a na $\mathfrak{B}$. Jest $(\mathfrak{S}) \neq 0$, neboť $\mathfrak{G} \varepsilon (\mathfrak{S})$. Nechť S značí průnik polí prvků systému $(\mathfrak{S})$. Ježto $S \supset A, B$ jest $S \neq 0$. Nechť D jest pole libovolného prvku systému $(\mathfrak{S})$. Ježto $S \subset D$, jest podle *8·1*, $SS \subset SD \subset DD \subset D$. Tedy $SS \subset S$. Tedy $\mathfrak{S} = (S, \mathfrak{M}_{S \times S}) \varepsilon (\mathfrak{S})$. Pravíme, že $\mathfrak{S}$ jest *spojení podgrupoidů* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$. Označení: $\mathfrak{S} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ anebo $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{A}$. Každý podgrupoid v $\mathfrak{G}$, který jest nadgrupoid současně na $\mathfrak{A}$ i na $\mathfrak{B}$, jest zřejmě nadgrupoid na $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$. V tomto smyslu jest $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ nejmenší nadgrupoid současně na $\mathfrak{A}$ i na $\mathfrak{B}$.

Pojmy průniku a spojení dvou podgrupoidů v $\mathfrak{G}$ mají zřejmě duální charakter.

11. Součin několika prvků a množin. Nechť $a_1, \ldots, a_\alpha \varepsilon G$, $\alpha \geq 1$. Symbolem $a_1 \ldots a_\alpha$ rozumíme kterýkoliv prvek množiny $\{a_1 \ldots a_\alpha\} \subset G$ takto definované: Pro $\alpha = 1, 2$ jest $\{a_1\}$ po př. $\{a_1 a_2\}$ jednobodová množina obsahující prvek a_1 po př. $a_1 a_2$. Pro $\alpha > 2$ jest

$$\{a_1 \ldots a_\alpha\} =$$
$$= \{a_1\}\{a_2 \ldots a_\alpha\} \vee \{a_1 a_2\}\{a_3 \ldots a_\alpha\} \vee \ldots \vee \{a_1 \ldots a_{\alpha-1}\}\{a_\alpha\}. \quad (1)$$

$a_1 \ldots a_\alpha$ jest *součin prvků* $a_1, \ldots, a_\alpha$ (v tomto pořádku); $a_1, \ldots, a_\alpha$ jsou *činitele* součinu $a_1 \ldots a_\alpha$. α jest *délka prvku* $a_1 \ldots a_\alpha$. Zřejmě jest součinů prvků $a_1, \ldots, a_\alpha$ jenom konečný počet. Zejména mají každé tři prvky $a_1, a_2, a_3 \varepsilon G$ nejvýše dva součiny: $a_1(a_2 a_3)$, $(a_1 a_2) a_3$. Když každé tři prvky v G mají jediný součin, když tedy $a_1(a_2 a_3) = (a_1 a_2) a_3$ pro $a_1, a_2, a_3 \varepsilon G$, pravíme, že násobení $\mathfrak{M}_{G \times G}$ jest *associativní* a že $\mathfrak{G}$ jest *associativní grupoid.*

Zřejmě každý prvek v G má jednu anebo i více délek. Podle (1) jest každý prvek délky α (≥ 2) součin nějakého prvku délky β a prvku délky $\alpha - \beta$ při vhodném β ($< \alpha$).

Nechť $A_1, \ldots, A_\alpha \subset G$. Když žádná z množin A není prázdná, rozumíme symbolem $A_1 \ldots A_\alpha$ množinu všech součinů $a_1 \ldots a_\alpha$, kde $a_1 \varepsilon A_1, \ldots, a_\alpha \varepsilon A_\alpha$. Když alespoň jedna z množin A jest prázdná, rozumíme tím symbolem prázdnou množinu. V obou případech jest $A_1 \ldots A_\alpha$ *součin množin* $A_1, \ldots, A_\alpha$ (v tomto pořádku). V druhém případě součin ovšem nezávisí na pořádku *činitelů*, t. j. množin $A_1, \ldots, A_\alpha$. Podle (1) jest

$$A_1 \ldots A_\alpha =$$
$$= A_1(A_2 \ldots A_\alpha) \vee (A_1 A_2)(A_3 \ldots A_\alpha) \vee \ldots \vee (A_1 \ldots A_{\alpha-1}) A_\alpha. \quad (2)$$

Pro $A \subset G$ píšeme místo $\underbrace{A \dots A}_{\alpha}$ kratčeji A^α, takže pro $\alpha \geq 2$ jest

$$A^\alpha = A A^{\alpha-1} \vee A^2 A^{\alpha-2} \vee \dots \vee A^{\alpha-1} A. \tag{3}$$

Zřejmě definice součinu několika prvků a množin zobecňují definice součinu dvou prvků a množin (v. 7, 8).

$\cdot 1$. *Když $A \subset G$ pak 1^0 $A^\alpha A^\beta \subset A^{\alpha+\beta}$ 2^0 $(A^\alpha)^\beta \subset A^{\alpha\beta}$ pro všechna přirozená α, β.*

Vskutku, vztah 1^0 jest zřejmý vzhledem k definici množiny $A^{\alpha+\beta}$. 2^0 jest zřejmě správný pro $\beta = 1$. Nechť tedy $\beta > 1$ a připusťme, že vztah 2^0 platí pro $1 \leq \gamma \leq \beta - 1$. Pak jest podle 1^0 $(A^\alpha)^\gamma . (A^\alpha)^{\beta-\gamma} \subset A^{\alpha\gamma} . A^{\alpha(\beta-\gamma)} \subset A^{\alpha\beta}$ a tedy $(A^\alpha)^\beta = A^\alpha (A^\alpha)^{\beta-1} \vee \dots \vee (A^\alpha)^{\beta-1} A^\alpha \subset A^{\alpha\beta}$.

$\cdot 2$. *Když $A \subset B$ ($\subset G$) pak $A^\alpha \subset B^\alpha$ pro každé přirozené α.*

Vskutku, každý prvek v A^α jest součinem α prvků v množině A a tyto prvky jsou v B.

$\cdot 3$. *Jest $G^\alpha \supset G^{\alpha+1}$ pro každé přirozené α, takže $G \supset G^2 \supset G^3 \supset \dots$*

Vskutku, tvrzení jest správné pro $\alpha = 1$ (podle 8). Nechť tedy $\alpha > 1$ a předpokládejme, že $G^\beta \supset G^{\beta+1}$ pro $\beta = 1, \dots, \alpha - 1$. Pak podle (3) jest

$$G^\alpha = G G^{\alpha-1} \vee \dots \vee G^{\alpha-1} G \supset G G^\alpha \vee \dots \vee G^{\alpha-1} G^2 \vee G^\alpha G = G^{\alpha+1}.$$

$\cdot 4$. *$(G^\alpha, \mathfrak{N}_{G^\alpha \times G^\alpha})$ jest oboustranný ideál v G. — Označení: $\mathfrak{G}^\alpha$.*

Vskutku, $G^\alpha G \subset G^{\alpha+1} \subset G^\alpha$ (podle $\cdot 3$) a podobně $G G^\alpha \subset G^\alpha$.

Podle $\cdot 3 \cdot 4$ jest $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}^2 \supset \mathfrak{G}^3 \supset \dots$

12. Excentrum. Nechť

$$\varDelta G^\alpha = G^\alpha \wedge G^{\alpha+1},$$

takže $\varDelta G^\alpha$ jest množina těch prvků v G, které mají délku α, avšak nikoliv $\alpha + 1$; $\alpha = 1, 2, \dots$ Každý prvek a v $\varDelta G^\alpha$ má tedy největší délku α (podle $\cdot 3$). α jest *index* prvku a. Množiny $\varDelta G, \varDelta G^2, \dots$ jsou zřejmě disjunktní a $\varDelta G^\alpha = 0$ když a jen když $G^{\alpha+1} = G^\alpha$.

Množina $\varDelta G$ nazývá se *excentrum* a každý její prvek *prvočinitel grupoidu* $\mathfrak{G}$. Když excentrum jest prázdné, pravíme, že $\mathfrak{G}$ *nemá excentra.*

$\cdot 1$. *Když $\varDelta G = 0$ pak $\varDelta G^\alpha = 0$ pro každé přirozené α.*

Vskutku, nechť $\alpha > 1$ a připusťme, že z předpokladu plyne $\varDelta G = \dots = \varDelta G^{\alpha-1} = 0$, t. j. $G - G^2 = \dots = G^\alpha$. Pak

$$G^{\alpha+1} \quad G G^\alpha \vee \dots \vee G^\alpha G = G G^{\alpha-1} \vee \dots \vee G^{\alpha-1} G = G^\alpha,$$

takže $\varDelta G^\alpha = 0$.

$\cdot 2$. *Každý prvek v $\varDelta G^\alpha$ ($\alpha \geq 1$) jest součinem α prvočinitelů, takže $\varDelta G^\alpha \subset (\varDelta G)^\alpha$.*

Vskutku, tvrzení jest správné pro $\alpha = 1$. Nechť tedy $\alpha > 1$ a připusťme, že platí pro $1 \leq \beta \leq \alpha - 1$. Nechť $a \in \varDelta G^\alpha$ takže $a = a_1 a_2$, $a_1 \in G^\beta$, $a_2 \in G^{\alpha-\beta}$ při vhodném $1 \leq \beta \leq \alpha - 1$. Jestliže a_1 (a_2) má délku $\beta + 1$ ($\alpha - \beta + 1$) má a délku $\alpha + 1$, podle $11 \cdot 1$ 1^0; to je proti předpokladu. Tedy $a_1 \in \Delta G^{\beta}$, $a_2 \in \Delta G^{\alpha-\beta}$ takže a_1 (a_2) jest součinem β $(\alpha-\beta)$ prvočinitelů. Tedy a jest součinem α prvočinitelů.

$a \in G$ má tedy index α když a jen když jest součinem α prvočinitelů, avšak není součinem žádných $\alpha + 1$ prvků v G.

·3. *Excentrum grupoidu* $\mathfrak{G}^{\alpha}$ *jest nadmnožina na* $\Delta G^{\alpha} \vee \ldots \vee \Delta G^{2\alpha-1}$, $\alpha = 1, 2, \ldots$

Vskutku, pro $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots$ jest $G^{\alpha+\beta-1} = G^{\alpha+\beta} \vee \Delta\, G^{\alpha+\beta-1}$, takže

$$G^{\alpha} = G^{\alpha+\beta} \vee \Delta\, G^{\alpha} \vee \ldots \vee \Delta\, G^{\alpha+\beta-1}.$$

Sčítanci napravo jsou zřejmě disjunktní; tedy

$$G^{\alpha} \wedge G^{\alpha+\beta} = \Delta\, G^{\alpha} \vee \ldots \vee \Delta\, G^{\alpha+\beta-1}$$

a odtud pro $\beta = \alpha$ a z **11**·*1* *2*⁰ plyne tvrzení.

Když $\mathfrak{G}$ obsahuje alespoň jednu levou (pravou) jednotku e_l (e_p), pak nemá excentra. Neboť pak jednak $G \supset G^2$ (podle **11**·*3*) jednak na příklad $G = \{e_l\}\, G \subset GG = G^2$. Rovněž zřejmě $\mathfrak{G}$ nemá excentra, když rovnice $ax = b$ $(xa = b)$ má řešení $x \in G$ pro $a, b \in G$.

13. Jádro. Pro každý prvek $a \in G$ buďto existuje přirozené α takové, že $a \in \Delta\, G^{\alpha}$ anebo $a \in G^{\alpha}$ pro $\alpha = 1, 2, \ldots$ Tedy

$$G = \Delta\, G \vee \Delta\, G^2 \vee \ldots \vee (G, G^2, G^3, \ldots),$$

při čemž $(G, G^2, G^3, \ldots)$ značí průnik množin $G, G^2, G^3, \ldots$ Sčítanci napravo jsou zřejmě disjunktní.

·1. *Jest* $\Delta G^{\alpha} \,.\, \Delta G^{\beta} \subset \Delta G^{\alpha+\beta} \vee \Delta G^{\alpha+\beta+1} \vee \ldots \vee (G, G^2, G^3, \ldots)$ *pro všechna přirozená* α, β.

Vskutku, když jeden činitel vlevo jest prázdná množina, jest tvrzení správné. Nechť tedy existuje $a \in \Delta\, G^{\alpha}$, $b \in \Delta\, G^{\beta}$. Podle **12**·*2* jest a (b) součinem α (β) prvočinitelů. Tedy ab jest součinem $\alpha + \beta$ prvočinitelů. Avšak při $\gamma < \alpha + \beta$ žádný prvek v ΔG^{γ} není součinem $\alpha + \beta$ prvků v G.

·2. *Nechť* $\underline{G} = (G, G^2, G^3, \ldots) \neq 0$. *Pak* $\underline{\mathfrak{G}} = (\underline{G}, \mathfrak{N}_{\underline{G} \times \underline{G}})$ *jest oboustranný ideál v* $\mathfrak{G}$.

Vskutku, podle definice množiny $\underline{G}$ jest $\underline{G} \subset G^{\alpha}$ pro $\alpha = 1, 2, \ldots$ Odtud plyne $\underline{G}G \subset G^{\alpha}\, G \subset G^{\alpha+1} \subset G^{\alpha}$ takže $\underline{G}G \subset \underline{G}$. Podobně $G\underline{G} \subset G$.

Podgrupoid $\underline{\mathfrak{G}}$ se nazývá *jádro grupoidu* $\mathfrak{G}$. Každý prvek $a \in G$ má libovolnou délku. Když $\underline{G}$ jest prázdná množina, pravíme, že $\mathfrak{G}$ jest *grupoid bez jádra;* jinak jest $\mathfrak{G}$ *grupoid s jádrem.* Když $\mathfrak{G}$ nemá excentra, má jádro $\mathfrak{G}$ (podle **12**·*1*).

14. Grupoidy s jádrem. Nechť $\mathfrak{G}$ má jádro $\underline{\mathfrak{G}}$. Pak grupoid $\underline{\mathfrak{G}}$ buďto jest bez jádra anebo jádro má. Když $\underline{\mathfrak{G}}$ jest bez jádra, jest každý prvek $a \in \underline{G}$ součinem libovolného počtu prvků v G a existuje přirozené α takové, že jest součinem α, avšak nikoliv $\alpha + 1$ prvků v $\underline{G}$. Obecněji, může v $\mathfrak{G}$ existovati oboustranný ideál $\mathfrak{A}$ bez jádra takový, že $\mathfrak{A} \supset \underline{\mathfrak{G}}$. Příklady na toto tvrzení se snadno sestrojí.

·*1. Nechť $\mathfrak{A}$ jest podgrupoid v $\mathfrak{G}$ a má jádro $\underline{\mathfrak{A}}$. Pak $\underline{\mathfrak{A}} \subset \underline{\mathfrak{G}}$.*

Vskutku, podle definice $\underline{A}$ a podle **11**·*2* jest $\underline{A} \subset A^\alpha \subset G^\alpha$ pro $\alpha = 1, 2, \ldots$ Tedy $\underline{A} \subset \underline{G}$.

15. Grupoidy bez jádra. Nechť $\mathfrak{G}$ jest bez jádra. Pak $G = \Delta G \vee \Delta G^2 \vee \ldots$, takže každý prvek v G má index. Podle **12**·*1* jest $\Delta G \neq 0$, avšak některé z dalších sčítanců mohou býti prázdné.

·*1. Nechť $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$. Pak $\mathfrak{A}$ jest bez jádra.*

Vskutku, má-li $\mathfrak{A}$ jádro $\underline{\mathfrak{A}}$, jest $\underline{A} \subset A^\alpha \subset G^\alpha$ pro $\alpha = 1, 2, \ldots$ Tedy $\underline{A} \subset (G, G^2, G^3, \ldots)$, takže $\mathfrak{G}$ má jádro — proti předpokladu.

Když každý součin každých α prvočinitelů, $\alpha = 1, 2, \ldots$, má index α, pravíme, že $\mathfrak{G}$ jest *homogenní grupoid.* Jinak $\mathfrak{G}$ jest *nehomogenní.* Zřejmě $\mathfrak{G}$ jest homogenní když a jen když $\Delta G^\alpha = (\Delta G)^\alpha$ pro $\alpha = 1, 2, \ldots$ Protože $\Delta G \neq 0$ jest $\mathfrak{G}$ homogenní jenom když $\Delta G^\alpha \neq 0$ pro $\alpha = 1, 2, \ldots$ Když $\mathfrak{G}$ jest homogenní jest (podle **13**·*1*) $\Delta G^\alpha . \Delta G^\beta \subset \Delta G^{\alpha+\beta}$ pro $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots$

16. Projekce. Nechť H jest nadmnožina na G. Nechť $\mathfrak{p}$ jest zobrazení množiny H na Gtakové, že $\mathfrak{p}a = a$ pro $a \in G$. Nechť $\mathfrak{M}$ jest násobení v H definované takto: $ab = \mathfrak{p}a . \mathfrak{p}b$ pro $a, b \in H$. Pak $\mathfrak{H} = (H, \mathfrak{M})$ jest grupoid a $G \subset H$, $\mathfrak{M}_{G\times G} = \mathfrak{N}$. Tedy $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{H}$. Pravíme, že $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{H}$) jest *podgrupoid* (*nadgrupoid*) *v* $\mathfrak{H}$ (*na* $\mathfrak{G}$) *při projekci* $\mathfrak{p}$. Dokonce jest $\mathfrak{G}$ zřejmě oboustranný ideál v $\mathfrak{H}$.

·*1. Nechť $A \subset G$. Pak $HA = GA$, $AH = AG$.*

Vskutku, ze vztahu $G \subset H$ plyne (podle **8**·*1*) $GA \subset HA$. Pro $h \in H$, $a \in A$ jest podle definice násobení v H: $ha = \mathfrak{p}h . \mathfrak{p}a = \mathfrak{p}h . a \in GA$, takže $HA \subset GA$ a tedy $HA = GA$. Podobně plyne druhá rovnice.

·*2. Jest $H^\alpha = G^\alpha$ pro $\alpha = 2, 3, \ldots$*

Vskutku, z definice násobení $\mathfrak{M}$ plyne bezprostředně $H^2 = G^2$. Nechť tedy $\alpha > 2$ a připusťme, že

$$H^\beta = G^\beta \text{ pro } 2 \leq \beta \leq \alpha - 1. \text{ Pak}$$
$$H^\alpha = HH^{\alpha-1} \vee H^2 H^{\alpha-2} \vee \ldots \vee H^{\alpha-2} H^2 \vee H^{\alpha-1} H$$
$$= HG^{\alpha-1} \vee G^2 G^{\alpha-2} \vee \ldots \vee G^{\alpha-2} G^2 \vee G^{\alpha-1} H.$$

Avšak $G^{\alpha-1} \subset G$ a tedy (podle ·*1*) jest první (poslední) člen na pravé straně $G G^{\alpha-1}$ ($G^{\alpha-1} G$). Tedy $H^\alpha = G^\alpha$.

·*3. Jest 1^0 $\Delta H \wedge \Delta G = H \wedge G$ 2^0 $\mathfrak{H}$ a $\mathfrak{G}$ buďto mají totéž jádro anebo jsou oba bez jádra.*

Důkaz plyne snadno z ·*2*.

Pojem projekce jest užitečný pro sestrojování příkladů. Z hořejších vět plyne na př., že každý grupoid $\mathfrak{G}$ se dá vnořiti jako oboustranný ideál do vhodného grupoidu $\mathfrak{H}$ s jádrem anebo bez jádra podle toho, zda $\mathfrak{G}$ má jádro čili nic. Když $\mathfrak{G}$ jest bez jádra, dá se $\mathfrak{H}$ zvoliti dokonce tak, aby byl nehomogenní. Vskutku, zvolme libovolný prvek $a \in G$ o indexu $\alpha \geq 3$, takže existují prvočinitele $p_1, \ldots, p_\alpha$ grupoidu $\mathfrak{G}$ takové, že $a = p_1 \dots p_\alpha$. Při vhodných $a_1, a_2 \in G$ jest $a \quad a_1 a_2$. Zvolme H tak, že existují $a'_1, a'_2 \in H \wedge G$ a $\mathfrak{p}$ tak, že $\mathfrak{p} a'_1 = a_1$, $\mathfrak{p} a'_2 = a_2$. Podle $\cdot 3$ 1^0 jsou $p_1, \dots, p_\alpha$, $a'_1 a'_2$ prvočinitele grupoidu $\mathfrak{H}$ a podle definice násobení v $\mathfrak{H}$ jest $a'_1 a'_2 = a_1 a_2 = a$. Tedy $a \in H$ jest součinem jednak $\alpha \geq 3$ prvočinitelů $p_1, \dots, p_\alpha$ a jednak součinem prvočinitele a'_1 a a'_2.

III. Homomorfní zobrazení.

17. Deformace, isomorfismus. Nechť $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ značí grupoidy. Každé zobrazení $\mathfrak{d}$ množiny G do G^* takové, že $\mathfrak{d}ab = \mathfrak{d}a\,\mathfrak{d}b$ pro $a, b \in G$, nazývá se *homomorfní zobrazení grupoidu* $\mathfrak{G}$ *do* $\mathfrak{G}^*$. Místo toho budeme stručněji říkati *deformace* grupoidu $\mathfrak{G}$ do $\mathfrak{G}^*$.

Když $a^* = \mathfrak{d}a$, píšeme někdy $a \to a^*$ ($\mathfrak{d}$), stručněji $a \to a^*$; a (a^*) jest *vzor (obraz) prvku* a^* (a) *v deformaci* $\mathfrak{d}$. Obecněji, pro $0 \neq A \subset G$ rozumíme symbolem $\mathfrak{d}A$ množinu obrazů prvků v A v deformaci $\mathfrak{d}$. Když $A^* = \mathfrak{d}A$, píšeme někdy $A \to A^*$ ($\mathfrak{d}$), stručněji $A \to A^*$ a pravíme, že A (A^*) jest *vzor (obraz) množiny* A^* (A) *v deformaci* $\mathfrak{d}$.

$\cdot 1$. *Pro* $A_1, A_2 \subset G$ *jest* 1^0 $\mathfrak{d}(A_1 \vee A_2) = \mathfrak{d}A_1 \vee \mathfrak{d}A_2$ 2^0 $\mathfrak{d}(A_1 A_2) = \mathfrak{d}A_1 \mathfrak{d}A_2$ 3^0 *když* $A_1 \subset A_2$ *pak* $\mathfrak{d}A_1 \subset \mathfrak{d}A_2$.

Dukaz těchto tvrzení jest snadný.

Když v deformaci $\mathfrak{d}$ každý prvek v G^* má vzor, nazývá se $\mathfrak{d}$ *homomorfní zobrazení grupoidu* $\mathfrak{G}$ *na* $\mathfrak{G}^*$ anebo *homomorfismus grupoidu* $\mathfrak{G}$ *na* $\mathfrak{G}^*$. Místo toho budeme stručněji říkati *deformace grupoidu* $\mathfrak{G}$ *na* $\mathfrak{G}^*$. Když v deformaci $\mathfrak{d}$ má každý prvek v G^* *jediný* vzor, takže $\mathfrak{d}$ jest prosté zobrazení množiny G na G^*, nazývá se $\mathfrak{d}$ *isomorfní zobrazení grupoidu* $\mathfrak{G}$ *na* $\mathfrak{G}^*$ anebo stručněji *isomorfismus grupoidu* $\mathfrak{G}$ *na* $\mathfrak{G}^*$. V tomto případě existuje isomorfní zobrazení $\mathfrak{d}^{-1}$ grupoidu $\mathfrak{G}^*$ na $\mathfrak{G}$ definované takto: Pro $a^* \in G^*$ jest $\mathfrak{d}^{-1} a^*$ vzor prvku a^* v deformaci $\mathfrak{d}$. Tedy $\mathfrak{d}^{-1}(\mathfrak{d}a) = a$ pro $a \in G$. Pravíme, že $\mathfrak{d}^{-1}$ jest isomorfní zobrazení *inversní k* $\mathfrak{d}$.

Když existuje deformace $\mathfrak{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ do (na) $\mathfrak{G}^*$ pravíme, ze $\mathfrak{G}$ se dá deformovati anebo homomorfně zobraziti ($\mathfrak{d}$) do (na) $\mathfrak{G}^*$. Když existuje deformace (isomorfismus) $\mathfrak{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ pravíme také, že $\mathfrak{G}$ jest homomorfní (isomorfní) ($\mathfrak{d}$) s $\mathfrak{G}^*$. Zřejmě jest $\mathfrak{G}$ isomorfní ($\mathfrak{d}$) s $\mathfrak{G}^*$ když $\mathfrak{G}^*$ jest isomorfní ($\mathfrak{d}^{-1}$) s $\mathfrak{G}$, a naopak. Když $\mathfrak{G}$ jest homomorfní ($\mathfrak{d}$) s $\mathfrak{G}^*$, píšeme někdy $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}^*$ ($\mathfrak{d}$), stručněji $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}^*$; když jde o isomorfismus, píšeme $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{G}^*$.

Hořejší pojmy mají ovšem smysl zejména také v tom případě, že grupoid $\mathfrak{G}^*$ jest totožný s grupoidem $\mathfrak{G}$, takže jde o deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ do sebe anebo na sebe, po př. o isomorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ na sebe. Deformace (isomorfní zobrazení) grupoidu $\mathfrak{G}$ na sebe nazývá se též *operátor (automorfismus)* grupoidu $\mathfrak{G}$. Nejjednodušším příkladem automorfismu grupoidu $\mathfrak{G}$ jest t. zv. *identický automorfismus grupoidu* $\mathfrak{G}$ — budeme jej značiti $\mathfrak{e}$ — definovaný tak, že $\mathfrak{e}a = a$ pro $a \in G$.

18. Nechť $\mathfrak{G}$ se dá deformovati ($\mathfrak{d}$) do $\mathfrak{G}^*$.

·1. *Nechť* $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$. *Pak* $(\mathfrak{d}A, \mathfrak{N}^*_{\mathfrak{d}A \times \mathfrak{d}A})$ *jest podgrupoid v* $\mathfrak{G}^*$.

Vskutku, z rovnice $\mathfrak{d}A\,\mathfrak{d}A = \mathfrak{d}AA$ a z předpokladu $AA \subset A$ plyne $\mathfrak{d}A\,\mathfrak{d}A \subset \mathfrak{d}A$.

Grupoid $(\mathfrak{d}A, \mathfrak{N}^*_{\mathfrak{d}A \times \mathfrak{d}A})$ značíme symbolem $\mathfrak{d}\mathfrak{A}$ a pravíme, že $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{d}\mathfrak{A}$) jest *vzor (obraz) grupoidu* $\mathfrak{d}\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$) *v deformaci* $\mathfrak{d}$.

·2. *Nechť* $\mathfrak{d}$ *jest deformace grupoidu* $\mathfrak{G}$ *na* $\mathfrak{G}^*$. *Nechť* $\mathfrak{A}$ *jest levý (pravý, oboustranný) ideál v* $\mathfrak{G}$. *Pak* $\mathfrak{d}\mathfrak{A}$ *jest levý (pravý, oboustranný) ideál v* $\mathfrak{G}^*$.

Vskutku, když $\mathfrak{A}$ jest na příklad levý ideál v $\mathfrak{G}$ jest $(\mathfrak{d}A)\,G^* = \mathfrak{d}A\,\mathfrak{d}G = \mathfrak{d}(AG) \subset \mathfrak{d}A$, takže $\mathfrak{d}\mathfrak{A}$ jest levý ideál v $\mathfrak{G}^*$.

·3. *Nechť* $\mathfrak{G}^*$ *jest bez jádra. Pak také* $\mathfrak{d}\mathfrak{G}$ *jest bez jádra.*

Důkaz plyne z *·1* a **15**·*1*.

·4. *Nechť* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ *a nechť existuje* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$. *Pak existuje* $\mathfrak{d}\mathfrak{A} \cap \mathfrak{d}\mathfrak{B}$ *a jest* $\mathfrak{d}(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) \subset \mathfrak{d}\mathfrak{A} \cap \mathfrak{d}\mathfrak{B}$.

Vskutku, zřejmě jest $\mathfrak{d}(A \cap B) \subset \mathfrak{d}A \cap \mathfrak{d}B$.

·5. *Nechť* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$. *Pak* $\mathfrak{d}(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{d}\mathfrak{A} \cup \mathfrak{d}\mathfrak{B}$.

Vskutku, zřejmě jest $\mathfrak{d}(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B})$ nadgrupoid současně na $\mathfrak{d}\mathfrak{A}$ a na $\mathfrak{d}\mathfrak{B}$.

·6. *Nechť* $A_1, \ldots, A_\alpha \subset G$. *Pak* 1^0 $\mathfrak{d}(A_1 \vee \ldots \vee A_\alpha) = \mathfrak{d}A_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{d}A_\alpha$. 2^0 $\mathfrak{d}(A_1 \ldots A_\alpha) = \mathfrak{d}A_1 \ldots \mathfrak{d}A_\alpha$.

Vskutku, obě tvrzení plynou snadno indukcí z **17**·*1* 1^0 2^0.

Z *·6* 2^0 plyne zejména pro $a_1, \ldots, a_\alpha \,\varepsilon\, G$: $\mathfrak{d}\{a_1 \ldots a_\alpha\} = \{\mathfrak{d}a_1 \ldots \mathfrak{d}a_2\}$. Tedy platí rovnice $\mathfrak{d}(a_1 \ldots a_\alpha) = \mathfrak{d}a_1 \ldots \mathfrak{d}a_\alpha$ v tom smyslu, že obraz každého součinu $a_1 \ldots a_\alpha$ jest vhodným součinem obrazů $\mathfrak{d}a_1, \ldots, \mathfrak{d}a_\alpha$ a každý součin $\mathfrak{d}a_1 \ldots \mathfrak{d}a_\alpha$ jest obrazem vhodného součinu vzorů $a_1, \ldots, a_\alpha$. Zejména jest obraz každého associativního grupoidu v libovolné deformaci opět associativní grupoid. — Pro $A \subset G$, $\alpha \geq 1$, plyne $\mathfrak{d}A^\alpha = (\mathfrak{d}A)^\alpha$.

·7. *Nechť* $\mathfrak{G}$ *má jádro* $\underline{\mathfrak{G}}$. *Pak* $\mathfrak{d}\mathfrak{G}$ *má jádro* $\underline{\mathfrak{d}\mathfrak{G}}$ *a jest* $\mathfrak{d}\underline{\mathfrak{G}} \subset \underline{\mathfrak{d}\mathfrak{G}}$.

Vskutku, nechť $a \,\varepsilon\, \underline{G}$, takže $a \,\varepsilon\, G^\alpha$ pro každé přirozené α. Pak $\mathfrak{d}a \,\varepsilon\, \mathfrak{d}G^\alpha = (\mathfrak{d}G)^\alpha$.

Naopak ale může $\mathfrak{G}$ býti bez jádra a $\mathfrak{d}\mathfrak{G}$ míti jádro.

·8. *Jest* $\mathfrak{d}\Delta G^\alpha \supset \Delta(\mathfrak{d}G)^\alpha$ *pro každé přirozené* α.

Vskutku, nechť $a^* \,\varepsilon\, \Delta(\mathfrak{d}G)^\alpha$, takže $a^* \,\varepsilon\, \mathfrak{d}G^\alpha \wedge \mathfrak{d}G^{\alpha+1}$. Pak a^* jest obrazem vhodného prvku $a \,\varepsilon\, G^\alpha$. Jestliže $a \,\varepsilon\, G^{\alpha+1}$ jest $a^* \,\varepsilon\, \mathfrak{d}G^{\alpha+1}$, ale to jest proti předpokladu; tedy $a \,\varepsilon\, \Delta G^\alpha$. Tedy $a^* \,\varepsilon\, \mathfrak{d}\Delta G^\alpha$.

Podle *·8* existuje ke každému prvku v $\mathfrak{d}G$ o indexu α (≥ 1) alespoň jeden vzor o témže indexu α. Zejména tedy jest každý prvočinitel grupoidu $\mathfrak{d}\mathfrak{G}$ obrazem vhodného prvočinitele grupoidu $\mathfrak{G}$.

Když pro určité α jest $\mathfrak{d}\Delta G^\alpha = \Delta(\mathfrak{d}G)^\alpha$, takže obraz každého prvku o indexu α má v grupoidu $\mathfrak{d}\mathfrak{G}$ opět index α pravíme., že *deformace* $\mathfrak{d}$ *zachovává index* α. Když deformace $\mathfrak{d}$ zachovává všechny indexy pravíme, že jest *ekviindiciální*.

Příkladem deformace jest projekce. Nechť $\mathfrak{H}$ jest nadgrupoid na $\mathfrak{G}$ při libovolné projekci $\mathfrak{p}$. Pak $\mathfrak{p}a = a$ pro $a \,\varepsilon\, G$ a podle definice násobení v H jest $\mathfrak{p}\,ab = ab \quad \mathfrak{p}a\,\mathfrak{p}b$ pro $a, b \in H$. Tedy $\mathfrak{p}$ jest deformace grupoidu $\mathfrak{H}$ na $\mathfrak{G}$. Podle **16**·*2* jest pro $\alpha > 2$: $\Delta(\mathfrak{p}H)^{\alpha} \quad (\mathfrak{p}H)^{\alpha} \wedge (\mathfrak{p}H)^{\alpha+1} = G^{\alpha} \wedge G^{\alpha+1} = H^{\alpha} \wedge H^{\alpha+1} = \Delta H^{\alpha} = \mathfrak{p}\Delta H^{\alpha}$, takže $\mathfrak{p}$ zachovává indexy ≥ 2. Když $\mathfrak{p}(H \wedge G) \subset \Delta G$, pak $\mathfrak{p}\Delta H = \mathfrak{p}[\Delta G \vee (H \wedge G)] = \mathfrak{p}\Delta G \vee \mathfrak{p}(H \wedge G) \subset \Delta G = \Delta \mathfrak{p} H$, takže $\mathfrak{p}\Delta H = \Delta \mathfrak{p} H$ a tedy $\mathfrak{p}$ jest ekviindiciální.

19. Skládání deformací. Nechť $\mathfrak{d}_1$ značí deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{d}_2$ deformaci grupoidu $\mathfrak{G}_1$ na $\mathfrak{G}_2$ a $\mathfrak{d}_3$ deformaci grupoidu $\mathfrak{G}_2$ na $\mathfrak{G}_3$. Nechť $\mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_1$ značí zobrazení množiny G na G_2 definované takto: Pro $a \in G$ jest $(\mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_1)\, a \quad \mathfrak{d}_2(\mathfrak{d}_1 a)$. Pro $a, b \in G$ jest pak $(\mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_1)(ab) = \mathfrak{d}_2(\mathfrak{d}_1 ab) = \mathfrak{d}_2(\mathfrak{d}_1 a \,.\, \mathfrak{d}_1 b) = \mathfrak{d}_2(\mathfrak{d}_1 a) \,.\, \mathfrak{d}_2(\mathfrak{d}_1 b) = (\mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_1)\, a\, (\mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_1)\, b$. Tedy jest $\mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_1$ deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}_2$. Pravíme, že $\mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_1$ jest *deformace složená z* $\mathfrak{d}_1$ *a z* $\mathfrak{d}_2$ (v tomto pořádku). Za zmínku stojí tyto zvláštní případy: Když $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$ jsou isomorfní zobrazení, jest $\mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_1$ isomorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}_2$. Když grupoid $\mathfrak{G}_2$ jest totožný s $\mathfrak{G}$, jest $\mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_1$ automorfismus grupoidu $\mathfrak{G}$ a v případě $\mathfrak{d}_2 = \mathfrak{d}_1^{-1}$ jest identický automorfismus $\mathfrak{e}$ grupoidu $\mathfrak{G}$, takže $\mathfrak{d}_1^{-1} \mathfrak{d}_1 = \mathfrak{e}$. Když $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ jsou totožny s $\mathfrak{G}$, takže $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$ jsou operátory grupoidu $\mathfrak{G}$, jest $\mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_1$ opět operátor grupoidu $\mathfrak{G}$. Pro každý operátor $\mathfrak{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ jest $\mathfrak{e}\mathfrak{d} = \mathfrak{d}\mathfrak{e} = \mathfrak{d}$.

·*1. Jest* $\mathfrak{d}_3(\mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_1) = (\mathfrak{d}_3 \mathfrak{d}_2)\, \mathfrak{d}_1$.

Vskutku, pro $a \in G$ jest: $[\mathfrak{d}_3(\mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_1)]\, a = \mathfrak{d}_3[(\mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_1)\, a] = \mathfrak{d}_3[\mathfrak{d}_2(\mathfrak{d}_1 a)] = (\mathfrak{d}_3 \mathfrak{d}_2)(\mathfrak{d}_1 \cdot a) = [(\mathfrak{d}_3 \mathfrak{d}_2)\, \mathfrak{d}_1]\, a$.

Všimněme si, že jsme při důkazu rovnice ·*1* nepoužili předpokladu, že zobrazení $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{d}_3$ zachovávají násobení, t. j. že obraz součinu dvou prvků jest vždy součin obrazů. Věta ·*1* tedy platí pro jakákoli zobrazení $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3$ pokud ovšem $\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2$ má týž smysl jako výše.

Nechť D značí množinu všech operátorů grupoidu $\mathfrak{G}$. Množina D není prázdná, neboť $\mathfrak{e} \in D$. Nechť $\mathfrak{M}_{D \times D}$ jest násobení v D definované tak, že pro $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2 \in D$ jest $\mathfrak{d}_1 \,.\, \mathfrak{d}_2 = \mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_1$. Grupoid $\mathfrak{D} = (D, \mathfrak{M}_{D \times D})$ nazývá se *grupoid operátorů nad* $\mathfrak{G}$. Podle ·*1* jest to grupoid associativní a zřejmě obsahuje jednotku $\mathfrak{e}$.

20. Nechť $(\mathfrak{G})$ značí množinu všech grupoidů. Vztah definovaný pro libovolné dva prvky $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in (\mathfrak{G})$ tak, že $\mathfrak{A}$ jest isomorfní s $\mathfrak{B}$, jest reflexivní ($\mathfrak{A} = \mathfrak{e}\mathfrak{A}$), symetrický (když $\mathfrak{B} = \mathfrak{d}\mathfrak{A}$ jest $\mathfrak{A} = \mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{B}$ pro každý isomorfismus $\mathfrak{d}$) a transitivní (když $\mathfrak{B} = \mathfrak{d}_1 \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{d}_2 \mathfrak{B}$, jest $\mathfrak{C} = \mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_1 \mathfrak{A}$ pro každé isomorfismy $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$). Tedy existuje rozklad množiny $(\mathfrak{G})$ takový, že každé dva prvky v $(\mathfrak{G})$, které jsou v témže prvku toho rozkladu, jsou isomorfní, kdežto žádné dva prvky v $(\mathfrak{G})$, které nejsou v témže prvku toho rozkladu, isomorfní nejsou.

GRUPOIDENTHEORIE.

Erter Teil.

Unter einem Grupoid verstehe ich den Inbegriff einer nicht leeren Menge G und einer Multiplikation in G. Die systematischen Untersuchungen über Grupoide, die den Gegenstand dieser Arbeit und deren bald zu erscheinenden Fortsetzung bilden, sind aus den Vorlesungen über Gruppentheorie, die ich im Jahre 1938—39 auf der naturwissenschaftlichen Fakultät der Masaryk-Universität gehalten habe, entstanden. Die Kenntnis der Grupoidentheorie gestattet begreiflich einen tieferen Einblick in die Struktur der gruppentheoretischen Sätze und läßt insbesondere den Einfluß der die Eigenschaften der Multiplikation beschreibenden Gruppenaxiome auf dieselben erkennen. In diesem ersten Teile handelt es sich um vorbereitende Betrachtungen über Zerlegungen von Mengen und um die wichtigsten allgemeinen Begriffe und Sätze über Grupoide. Insbesondere wird hier eine Theorie der homomorphen Abbildungen von Grupoiden dargestellt.