Otakar Borůvka

Über Zerlegungen von Mengen

Mitteilungen der Tschechischen Akademie der Wissenschaften 53, 1943, Nr. 23, 14 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500062

Mitteilungen der Tschechischen Akademie der Wissenschaften 1943.
Auszug aus dem tschechischen in der Zeitschrift Rozpravy II. třídy České akademie veröffentlichten Texte.
Jahrgang LIII. Nummer 23.

Über Zerlegungen von Mengen.

Von
O. BORŮVKA.

Vorgelegt am 1. September 1943.

Diese deutsche Zusammenfassung soll eine klare Übersicht über die behandelte Theorie darstellen. Aus diesem Grunde bildet sie im wesentlichen eine verkürzte Übersetzung des tschechischen Originaltextes, wobei insbesondere wegen Raumersparnis alle Beweise weggelassen werden.

Die vorliegende Theorie von Zerlegungen auf Mengen enthält drei Kapitel, die bzw. die Grundbegriffe der Theorie, komplementäre Zerlegungen und Reihen von Zerlegungen behandeln.

In dem ersten Kapitel werden insbesondere zwei Verknüpfungsoperationen beschrieben, welche diese Theorie der Theorie von Verbänden unterordnen und dadurch ihren Charakter im allgemeinen bestimmen.[1]) In dem zweiten Kapitel werden komplementäre Zerlegungen betrachtet. Dieselben scheinen von besonderer Bedeutung zu sein, da sie z. B. durch je zwei von Normalteilern auf einer beliebigen Gruppe erzeugte Zerlegungen realisiert werden und ferner mit der Abbildungstheorie von Zerlegungen eng zusammenhängen. Die im dritten Kapitel entwickelte Theorie von Reihen von Zerlegungen stellt u. a. eine weitgehende Verallgemeinerung der Eigenschaften der von Normalteilern auf Gruppen erzeugten Reihen von Zerlegungen dar. Wir bemerken auch, daß Zerlegungen auf Mengen und insbesondere Reihen von Zerlegungen durch Klassifikationen in sämtlichen Wissenschaftsgebieten realisiert werden.

---

[1]) Vgl. O. BORŮVKA, *Gruppoidentheorie.* Erster Teil. (Tschechisch.) [Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk, No 275 (1939)]; *Über Ketten von Faktoroiden* [Math. Ann., 118, 41—64 (1941)].

I. Grundbegriffe über Zerlegungen in Mengen.

1. Bezeichnungen. Mengen (Elemente in Mengen) bezeichnen wir in der Regel mit großen (kleinen) lateinischen Buchstaben. Systeme von Mengen bezeichnen wir in der Regel mit Symbolen wie z. B. $\overline{A}$, $\mathring{A}$ und ihre einzelnen Elemente mit $\bar{a}$, $\mathring{a}$. $\mathrm{s}\overline{A}$ bedeutet die Summe aller Mengen, die in $\overline{A}$ als Elemente vorkommen. $\emptyset$ ist das Symbol für die leere Menge. Die auf zwei Mengen sich beziehenden Symbole $\vee$, $\cap$ bedeuten ihre Summe, Durchschnitt. Das Symbol $\cong$ drückt Äquivalenz von Mengen aus. Wenn zwei Mengen einen nicht leeren Durchschnitt haben, so nennen wir sie *inzident*. Der Buchstabe G bedeutet die ganze Arbeit hindurch eine nicht leere Menge.

2. Zerlegungen in Mengen. Ein nicht leeres System $\overline{A}$ von nicht leeren paarweise fremden Untermengen in G nennen wir *Zerlegung in G* und im Falle $\mathrm{s}\overline{A} = G$ *Zerlegung von G* oder *auf G*. Wir sagen dann, $\overline{A}$ liege in bzw. auf G. Als Beispiele von Zerlegungen auf G führen wir an: die aus dem einzigen Elemente $\{G\}$ bestehende *größte Zerlegung* $\overline{G}_{\max}$ von G und *die kleinste Zerlegung* $\overline{G}_{\min}$ *von* G; diese besteht aus den Untermengen $\{a\}$, wobei $a \in G$.

Es seien $\overline{A}$, $\overline{B}$ Zerlegungen auf G. Wenn jedes Element in $\overline{A}$ die Summe von einigen Elementen in $\overline{B}$ ist, so nennen wir $\overline{A}$ ($\overline{B}$) eine *Überdeckung (Verfeinerung)* von $\overline{B}$ ($\overline{A}$) und schreiben $\overline{A} \geqq \overline{B}$ oder $\overline{B} \leqq \overline{A}$.

3. Hülle und Durchdringung. Es sei $\overline{A}$ eine Zerlegung und B eine Untermenge in G.

Die Menge aller mit B inzidenten Elemente $\bar{a} \in \overline{A}$ nennen wir *die Hülle von B in* $\overline{A}$ und bezeichnen dieselbe mit $B \sqsubset \overline{A}$ oder $\overline{A} \sqsupset B$.

Die Menge aller nicht leeren Durchschnitte von B mit den Elementen in $\overline{A}$ nennen wir *die Durchdringung von B und* $\overline{A}$ und bezeichnen dieselbe mit $B \sqcap \overline{A}$ oder $\overline{A} \sqcap B$.

4. Verknüpfte und adjungierte Zerlegungen. Es seien $\overline{A}$, $\overline{C}$ Zerlegungen in G.

Wir nennen die Zerlegungen $\overline{A}$, $\overline{C}$ *verknüpft*, wenn es zu jedem Elemente $\bar{a} \in \overline{A}$ genau ein mit ihm inzidentes Element $\bar{c} \in \overline{C}$ gibt und umgekehrt zu jedem Elemente $\bar{c} \in \overline{C}$ genau ein mit ihm inzidentes Element $\bar{a} \in \overline{A}$.

Es sei $B \in \overline{A}$, $D \in \overline{C}$ und $B \cap D \neq \emptyset$. Dann sind

$$D \sqsubset \overline{A} \sqcap C, \quad B \sqsubset \overline{C} \sqcap A \quad (A = \mathrm{s}\overline{A},\, C = \mathrm{s}\overline{C})$$

Zerlegungen in G, wobei das erste Symbol entweder die Zerlegung $D \sqsubset (\overline{A} \sqcap C)$ oder die mit ihr identische Zerlegung $(D \sqsubset \overline{A}) \sqcap C$ bedeutet und ähnlich das zweite Symbol. Wenn für diese Zerlegungen die folgende Gleichheit besteht

$$\mathrm{s}(D \sqsubset \overline{A} \sqcap C) = \mathrm{s}(B \sqsubset C \sqcap \overline{A}),$$

so nennen wir die Zerlegungen $\overline{A}$, $\overline{C}$ *adjungiert* in bezug auf B, C.

5. Erzeugende Zerlegungen. Wir nehmen an, daß auf G eine Multiplikation erklärt ist, so daß für jedes geordnete Paar von Elementen $a, b \in G$

das Produkt $ab \in G$ eindeutig bestimmt ist. Der Inbegriff von G und der Multiplikation ist ein Gruppoid $\mathfrak{G}$. G ist das *Feld* von $\mathfrak{G}$. Unter einer Zerlegung in $\mathfrak{G}$ verstehen wir eine Zerlegung in G. Eine Zerlegung $\overline{A}$ in $\mathfrak{G}$ heißt *erzeugend*, wenn es zu jedem geordneten Paare von Elementen $\overline{a}, \overline{b} \in \overline{A}$ ein Element $\overline{c} \in \overline{A}$ gibt, derart, daß die Beziehung $\overline{a}\overline{b} \subset \overline{c}$ besteht. Dabei bedeutet $\overline{a}\overline{b}$ natürlich die Menge aller Produkte ab von Elementen $a \in \overline{a}$ mit Elementen $b \in \overline{b}$.

6. Ketten. Es seien $A \supset B$ nicht leere Untermengen in G.

Unter einer *Kette* von Zerlegungen in G von A nach B verstehen wir eine geordnete endliche Menge von Zerlegungen in G: $\overline{A}_0, \ldots, \overline{A}_{\alpha-1}$ mit den folgenden Eigenschaften: 1. $\overline{A}_0$ liegt auf A 2. für $\beta < \alpha-1$ liegt $\overline{A}_{\beta+1}$ auf einem Elemente von $\overline{A}_\beta$ 3. $B \in \overline{A}_{\alpha-1}$. Ein solche Kette wird mit

$$\overline{A}_0 \to \ldots \to \overline{A}_{\alpha-1}$$

oder kürzer mit $[\overline{A}]$ bezeichnet. Für $\gamma = 0, \ldots, \alpha - 1$ schreiben wir A_γ anstatt $\mathrm{s}\overline{A}_\gamma$ und gelegentlich A_α anstatt B. Aus diesen Erklärungen folgt unmittelbar: $A_1 \in \overline{A}_0, \ldots, A_\alpha \in \overline{A}_{\alpha-1}$ und weiter $A = A_0 \supset \ldots \supset A_\alpha = B$. Die A, B sind die *Enden* von $[\overline{A}]$. Unter der *Länge* von $[\overline{A}]$ verstehen wir die Anzahl α der Zerlegungen in $[\overline{A}]$. $\overline{A}_0, \ldots, \overline{A}_{\alpha-1}$ sind die *Glieder* von $[\overline{A}]$.

Wenn in der Kette $[\overline{A}]$ eine Zerlegung $\overline{A}_\gamma$ die größte Zerlegung auf A_γ ist, wenn also $\overline{A}_\gamma$ aus dem einzigen Elemente $A_\gamma = A_{\gamma+1}$ besteht, so wird $\overline{A}_\gamma$ *unwesentlich* genannt. Andernfalls ist $\overline{A}_\gamma$ *wesentlich*. Die Anzahl wesentlicher Zerlegungen in der Kette $[\overline{A}]$ ist die *reduzierte Länge* von $[\overline{A}]$.

Es sei $\overline{A}$ eine Zerlegung in G und ferner $A = \mathrm{s}\overline{A}$, $B \in \overline{A}$. Unter einer *elementaren Kette* von A nach B über $\overline{A}$ verstehen wir eine Kette von Zerlegungen von A nach B

$$([\mathring{A}] \quad) \ \mathring{A}_0 \to \ldots \to \mathring{A}_{\alpha-1}$$

derart, daß für $0 \leqq \gamma \leqq \alpha - 1$ $\mathring{A}_\gamma$ eine Überdeckung von $A_\gamma \sqcap \overline{A}$ ist.

In einer solchen Kette ist also zuerst die Zerlegung $\mathring{A}_0$ eine Überdeckung von $\overline{A}$. Durch die Beziehungen $B \subset A_1 \in \mathring{A}_0$ ist die Untermenge $A_1 \subset A$ eindeutig bestimmt; auf derselben liegt die Zerlegung $(\overline{A}_1 \ -)$ $\overline{A} \sqcap A_1$ und es gilt $B \in \overline{A}_1 \subset \overline{A}$. Weiter ist $\mathring{A}_1$ eine Überdeckung von $\overline{A}_1$. Durch die Beziehungen $B \subset A_2 \in \mathring{A}_1$ ist die Untermenge $A_2 \subset A_1$ eindeutig bestimmt; auf derselben liegt die Zerlegung $(\overline{A}_2 \quad) \ \overline{A} \sqcap A_2$ und es gilt $B \in \overline{A}_2 \subset \overline{A}_1$. Weiter ist $\mathring{A}_2$ eine Überdeckung von $\overline{A}_2$, usw., $\mathring{A}_{\alpha-1}$ ist eine Überdeckung von $\overline{A}_{\alpha-1}$ und es gilt $B \in \overline{A}_{\alpha-1} \subset \overline{A}_{\alpha-2}$.

Es sei $(\emptyset \neq)$ $B \subset A \subset G$ und sei

$$([\overline{A}] \quad) \ \overline{A}_0 \to \ldots \to \overline{A}_{\alpha-1}$$

eine Kette von A nach B von der Länge $\alpha \geqq 1$.

Unter einer *Verfeinerung* von $[\overline{A}]$ verstehen wir eine Kette von Zerlegungen von A nach B

$$([\mathring{A}] \ \ -) \ \mathring{A}_{0,0} \to \ldots \to \mathring{A}_{0,\beta_0-1} \to \mathring{A}_{1,0} \to \ldots \to \mathring{A}_{1,\beta_1-1} \to \ldots$$
$$\ldots \to \mathring{A}_{\alpha-1,0} \to \ldots \to \mathring{A}_{\alpha-1,\beta_{\alpha-1}-1}$$

derart, daß für $\gamma = 0, \ldots, \alpha - 1$, die Teilkette

$$\mathring{A}_{\gamma, 0} \to \ldots \to \mathring{A}_{\gamma, \beta_\gamma - 1}$$

eine elementare Kette von A_γ nach $A_{\gamma+1}$ über $\overline{A}_\gamma$ ist. Man erhält also eine Verfeinerung von $[\overline{A}]$, indem man jede Zerlegung $\overline{A}_\gamma$ in der Kette durch eine elementare Kette von A_γ nach $A_{\gamma+1}$ über $\overline{A}_\gamma$ ersetzt.

Es sei $(\emptyset \neq)\ B \subset A \subset G$, $(\emptyset \neq)\ D \subset C \subset G$ und

$$([\overline{A}] \;-)\ \overline{A}_0 \to \ldots \to \overline{A}_{\alpha-1},$$
$$([\overline{C}] \quad)\ \overline{C}_0 \to \ldots \to \overline{C}_{\beta-1}$$

seien Ketten von A nach B und von C nach D. Die Ketten $[\overline{A}]$, $[\overline{C}]$ heißen *adjungiert*, wenn 1. die Enden von $[\overline{A}]$ und $[\overline{C}]$ dieselben sind, also $A = C$, $B = D$ 2. je zwei Glieder $\overline{A}_\gamma, \overline{C}_\delta$ in bezug auf $\mathrm{s}\overline{A}_{\gamma+1}$, $\mathrm{s}\overline{C}_{\delta+1}$ adjungiert sind. Dabei bedeutet: $\mathrm{s}\overline{A}_\alpha = B$, $\mathrm{s}\overline{C}_\beta = D$.

7. Zerlegungen auf Mengen. Von nun an werden wir uns mit Zerlegungen *auf* G beschäftigen. Diese Zerlegungen sind also dadurch gekennzeichnet, daß sie die Menge G überdecken.

8. Überdeckung und Verfeinerung einer Zerlegung. $\overline{A}, \overline{B}$ seien Zerlegungen auf G.

In der Nr. 2 haben wir bereits die Begriffe einer Überdeckung und Verfeinerung einer Zerlegung erklärt und die Bezeichnung z. B. $\overline{A} \geqq \overline{B}$ eingeführt. Es handelt sich nun um Eigenschaften dieser Beziehung $\overline{A} \geqq \overline{B}$.

Gilt $\overline{A} \geqq \overline{B}$ ohne daß die Gleichheit $\overline{A} = \overline{B}$ besteht, so sagen wir, $\overline{A}$ $(\overline{B})$ sei eine *echte* Überdeckung (Verfeinerung) von $\overline{B}$ $(\overline{A})$.

Wenn $\overline{A} \geqq \overline{B}$ gilt, so ist jedes Element $\bar{a} \in \overline{A}$ durch eine Untermenge $\overline{\overline{b}}$ von Elementen in $\overline{B}$ zerlegt; das System der Untermengen $\overline{\overline{b}}$, für $\bar{a} \in \overline{A}$, ist eine Zerlegung auf $\overline{B}$. Ersetzt man umgekehrt jedes Element $\bar{a} \in \overline{A}$ durch eine beliebige Zerlegung $\overline{\overline{b}}$ auf $\bar{a}$, so erhält man eine Verfeinerung von $\overline{A}$. Ersetzt man jedes Element $\overline{\overline{b}}$ einer Zerlegung B, die auf einer beliebigen Zerlegung $\overline{B}$ auf G liegt, durch die Menge $\mathrm{s}\overline{\overline{b}}$, so erhält man eine Überdeckung von $\overline{B}$; von dieser Überdeckung sagen wir, sie sei durch die Zerlegung $\overline{\overline{B}}$ *erzwungen*.

Es seien $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ beliebige Zerlegungen auf G.

Sätze:

$\cdot 1$. *Es gilt $\overline{A} \geqq \overline{B}$ dann und nur dann, wenn für $\bar{a} \in \overline{A}$, $\bar{b} \in \overline{B}$, $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ die Beziehung $\bar{a} \supset \bar{b}$ besteht.*

$\cdot 2$. *Es gelten die folgenden Beziehungen:*

1. $\overline{A} \geqq \overline{A}$ (Reflexivität),
2. aus $\overline{A} \geqq \overline{B}$, $\overline{B} \geqq \overline{A}$ folgt $\overline{A} = \overline{B}$ (Antisymmetrie),
3. aus $\overline{A} \geqq \overline{B}$, $\overline{B} \geqq \overline{C}$ folgt $\overline{A} \geqq \overline{C}$ (Transitivität).

$\cdot 3$. $\overline{G}_{max} \geqq \overline{A} \geqq \overline{G}_{min}$.

Nach $\cdot 2$ definiert die Beziehung $\geqq$ in jedem nicht leeren Systeme von Zerlegungen auf G eine partielle Ordnung. Wegen $\cdot 3$ hat das durch diese Beziehung $\geqq$ teilweise geordnete System aller Zerlegungen auf G das größte Element $\overline{G}_{\max}$ und das kleinste Element $\overline{G}_{\min}$.

9. Die kleinste gemeinsame Überdeckung und die größte gemeinsame Verfeinerung. Es seien $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ Zerlegungen auf G.

Unter der *kleinsten gemeinsamen Überdeckung* von $\overline{A}$ und $\overline{B}$ verstehen wir die durch die folgende Konstruktion bestimmte Zerlegung auf G:

Es sei $\bar{a}, \bar{p} \in \overline{A}$. Eine geordnete endliche Menge von Elementen in $\overline{A}$:

$$\{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha\},$$

nennen wir *Kette* in $\{\overline{A}, B\}$ von $\bar{a}$ nach $\bar{p}$, wenn $a_1 = \bar{a}$, $a_\alpha = \bar{p}$ und wenn je zwei einander folgende Elemente $a_\beta, \bar{a}_{\beta+1}$ mit einem Elemente $\bar{b}_\beta \in \overline{B}$ inzident sind. Die für je zwei Elemente $\bar{a}, \bar{p} \in \overline{A}$ durch die Existenz einer Kette in $\{\overline{A}, \overline{B}\}$ von $\bar{a}$ nach $\bar{p}$ definierte Beziehung ist offenbar reflexiv, symmetrisch und transitiv. Es gibt also eine Zerlegung $\overline{\overline{A}}$ von $\overline{A}$ derart, daß für je zwei in demselben Elemente in $\overline{\overline{A}}$ liegenden Elemente von $\overline{A}$ eine Kette in $\{\overline{A}, \overline{B}\}$ von dem einen nach dem anderen existiert, während es keine solche Kette gibt für zwei Elemente in $\overline{A}$, die in verschiedenen Elementen von $\overline{\overline{A}}$ liegen. Die durch $\overline{\overline{A}}$ erzwungene Überdeckung von $\overline{A}$ ist die kleinste gemeinsame Überdeckung von $\overline{A}$ und $\overline{B}$; dieselbe wird mit $[\overline{A}, \overline{B}]$ bezeichnet.

Aus dieser Definition folgt unmittelbar $[\overline{A}, \overline{B}] \geqq \overline{A}$.

Ferner bestehen die folgenden Sätze:

·*1. Die Beziehungen* $[\overline{A}, \overline{B}] = \overline{A}$ *und* $\overline{A} \geqq \overline{B}$ *bestehen gleichzeitig.*

·*2. Es gelten die folgenden Gleichheiten:*

$$[\overline{A}, \overline{B}] = [\overline{B}, \overline{A}],$$
$$[\overline{A}, \overline{A}] = \overline{A},$$
$$[\overline{A}, [\overline{B}, \overline{C}]] = [[\overline{A}, \overline{B}], \overline{C}].$$

Unter der *größten gemeinsamen Verfeinerung* von $\overline{A}$ und B verstehen wir die durch das Ersetzen eines jeden Elementes $\bar{a} \in \overline{A}$ durch seine Zerlegung $\bar{a} \sqcap \overline{B}$ entstandene Zerlegung von G.

Aus dieser Definition folgt unmittelbart: $(\overline{A}, \overline{B}) \leqq \overline{A}$.

Ferner bestehen die Sätze:

·*3. Die Beziehungen* $(\overline{A}, \overline{B}) = \overline{A}$ *und* $\overline{A} \leqq \overline{B}$ *bestehen gleichzeitig.*

·*4. Es gelten die folgenden Gleichheiten:*

$$(\overline{A}, \overline{B}) = (\overline{B}, \overline{A}),$$
$$(\overline{A}, \overline{A}) = \overline{A},$$
$$(\overline{A}, (\overline{B}, \overline{C})) = ((\overline{A}, \overline{B}), \overline{C}).$$

Weiter gilt der Satz

·*5. Es ist*

$$[\overline{A}, (\overline{A}, \overline{B})] = \overline{A}, \quad (\overline{A}, [\overline{A}, \overline{B}]) = \overline{A}.$$

10. Modulare Zerlegungen. Es seien $\overline{X} \geqq \overline{A}$ und $\overline{B}$ beliebige Zerlegungen auf G.

Sätze:

·*1. Es gelten die Beziehungen*

$$[\overline{X}, \overline{B}] \geqq [\overline{A}, \overline{B}], \quad (\overline{X}, \overline{B}) \geqq (\overline{A}, \overline{B}).$$

·2. *Es ist ferner*

$$(\overline{X}, [\overline{A}, \overline{B}]) \geqq [\overline{A}, (\overline{X}, \overline{B})].$$

Hier taucht die Frage auf, ob in der Beziehung ·2 nicht immer das Gleichheitszeichen besteht. Es folgt aus dem Beispiel auf S. 7, daß dies nicht der Fall ist.

Wenn für die Zerlegungen $\overline{X} \geqq \overline{A}$ und $\overline{B}$ die Gleichheit

$$(\overline{X}, [\overline{A}, \overline{B}]) = [\overline{A}, (\overline{X}, \overline{B})]$$

besteht, so heißt die Zerlegung

$\overline{B}$ *α-modular in bezug auf* $\overline{X}, \overline{A}$,
$\overline{A}$ *β-modular in bezug auf* $\overline{X}, \overline{B}$,
$\overline{X}$ *γ-modular in bezug auf* $\overline{A}, \overline{B}$.

·3. *Ist* $\overline{X} = \overline{A}$ *oder* $\overline{X} = \overline{G}_{\max}$, *so ist* $\overline{B}$ *α-modular in bezug auf* $\overline{X}, \overline{A}$.

11. Verbände von Zerlegungen. Ein nicht leeres System von Zerlegungen auf G, $\boldsymbol{A}$, das mit je zwei Elementen $\overline{A}, \overline{B} \in \boldsymbol{A}$ auch die beiden Zerlegungen $[\overline{A}, \overline{B}]$, $(\overline{A}, \overline{B})$ als Elemente enthält, ist ein Verband in bezug auf diese beiden Operationen [], ().[2]) Insbesondere ist das System aller Zerlegungen auf G ein solcher Verband.

Die Theorie der Verbände von Zerlegungen ist natürlich der allgemeinen Theorie von Verbänden unterordnet.[3]) Diese allgemeine Theorie erschöpft jedoch keineswegs die Eigenschaften der Verbände von Zerlegungen, es sei denn, daß sie durch weitere Postulate spezialisiert wird, da zu den Beziehungen zwischen Zerlegungen als Elementen von Verbänden, die in der allgemeinen Theorie behandelt werden, Beziehungen zwischen Elementen der einzelnen Zerlegungen hinzutreten.

II. Komplementäre Zerlegungen.

12. Definition. Es seien $\overline{A}, \overline{B}$ Zerlegungen auf G.

Nach der Definition von $[\overline{A}, \overline{B}]$ ist jedes Element $\overline{u} \in [\overline{A}, \overline{B}]$ die Summe sowohl von einigen Elementen $\overline{a} \in \overline{A}$ als auch von einigen Elementen $\overline{b} \in \overline{B}$. Die Zerlegungen $\overline{A}, \overline{B}$ werden *komplementär* genannt, wenn je zwei in demselben Elemente $\overline{u} \in [\overline{A}, \overline{B}]$ liegenden Elemente $\overline{a} \in \overline{A}$, $\overline{b} \in \overline{B}$ inzident sind.

13. Charakteristische Eigenschaften. Es seien $\overline{A}, \overline{B}$ Zerlegungen auf G. Sätze:

·1. *Wenn je zwei in demselben Elemente einer gemeinsamen Überdeckung* $\overline{C}$ *von* $\overline{A}, \overline{B}$ *liegenden Elemente* $\overline{a} \in \overline{A}$, $\overline{b} \in \overline{B}$ *inzident sind, so ist* $\overline{C} = [\overline{A}, \overline{B}]$ *und* $\overline{A}, \overline{B}$ *sind komplementär.*

---

[2]) Über Verbände s. z. B. Ø. ORE, *On the decomposition theorems of algebra* [C. R. du Congrès international des mathématiciens, Oslo 1936].

[3]) Z. B. ist die Benennung von modularen Zerlegungen (Nr. 10) der allgemeinen Theorie von Verbänden entnommen. S. V. KOŘÍNEK, *Der Schreiersche Satz und das Zassenhaussche Verfahren in Verbänden* [Věst. Král. čes. spol. nauk. Tř. matemat.-přírodověd., 1941].

·*2.* $\overline{A}, \overline{B}$ *sind komplementär dann und nur dann, wenn für je zwei in demselben Elemente von* $[\overline{A}, \overline{B}]$ *liegenden Elemente* $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \overline{A}$ *die folgende Gleichheit besteht:* $\bar{a}_1 \sqsubset \overline{B} = \bar{a}_2 \sqsubset \overline{B}$.

14. Weitere Eigenschaften. Die Zerlegungen $\overline{A}, \overline{B}$ seien komplementär.

Sätze:

·*1. Für* $\bar{a} \in \overline{A}$ *gilt* $\bar{u} = \mathrm{s}(\bar{a} \sqsubset \overline{B})$, *wobei* $\bar{u} \in [\overline{A}, \overline{B}]$ *dasjenige Element bedeutet, welches* $\bar{a}$ *enthält.*

·*2. Wenn für eine Zerlegung auf* G, $\overline{C}$, *die Beziehungen* $[\overline{A}, \overline{B}] \geqq \overline{C} \geqq \overline{A}$ *bestehen, so sind auch die Zerlegungen* $\overline{C}, \overline{B}$ *komplementär.*

·*3. Für* $\overline{X} \geqq \overline{A}$ *ist* $\overline{A}$ *auch zu* $(\overline{X}, \overline{B})$ *komplementär.*

·*4. Für* $\overline{A} \geqq \overline{Z}$ *ist* $\overline{A}$ *auch zu* $[\overline{Z}, \overline{B}]$ *komplementär.*

15. Modularität. Es seien $\overline{A}, \overline{B}$ wieder komplementäre Zerlegungen auf G.

Satz:

·*1. Für* $\overline{X} \geqq \overline{A}$ *ist* $\overline{B}$ α*-modular in bezug auf* $\overline{X}, \overline{A}$.

Dieser Satz lässt sich nicht umkehren: *Sind* $\overline{A}, \overline{B}$ *Zerlegungen auf* G *und ist z. B. die Zerlegung* $\overline{B}$ α*-modular in bezug auf jede Überdeckung* $\overline{X}$ *von* $\overline{A}$ *und* $\overline{A}$, *so brauchen* $\overline{A}$ *und* $\overline{B}$ *nicht komplementär zu sein.*

Zur Erzielung der Gleichheit in der Beziehung **10**·*2* genügt also die Voraussetzung, daß $\overline{A}, \overline{B}$ komplementär sind. Sind dagegen die $\overline{X}, \overline{B}$ komplementär, so braucht diese Gleichheit nicht zu bestehen.

Beispiel. A_1, A_2, A_3, A_4 seien nicht leere disjunkte Mengen und G ihre Summe.

Wir setzen

$$\begin{aligned} &\bar{x}_1 = A_1 \vee A_2, && \bar{x}_2 = A_3 \vee A_4; \\ &\bar{a}_1 = A_1 \vee A_2,\ \bar{a}_2 = A_3,\ \bar{a}_3 = A_4; \\ &\bar{b}_1 = A_1 \vee A_3, && \bar{b}_2 = A_2 \vee A_4, \end{aligned}$$

und erhalten die folgenden Zerlegungen auf G:

$$\overline{X} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}, \quad \overline{A} = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}, \quad \overline{B} = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}.$$

Offenbar ist $\overline{X} \geqq \overline{A}$ und die Zerlegungen $\overline{X}, \overline{B}$ sind komplementär. Es ist aber

$$(\overline{X}, [\overline{A}, \overline{B}]) = \overline{X} \neq \overline{A} = [\overline{A}, (\overline{X}, \overline{B})].$$

Es sei $\overline{X}$ eine Überdeckung von $\overline{A}$ und $\overline{Y}$ eine solche von $\overline{B}$, so daß $\overline{X} \geqq \overline{A}$, $\overline{Y} \geqq \overline{B}$.

Nach ·*1* haben wir

$$\begin{aligned} (\mathring{A} \quad) \ [\overline{A}, (\overline{X}, \overline{B})] &= (\overline{X}, [\overline{A}, \overline{B}]), \\ (\mathring{B} \quad) \ [\overline{B}, (\overline{Y}, \overline{A})] &= (\overline{Y}, [\overline{B}, \overline{A}]), \end{aligned}$$

und somit gelten die Beziehungen

$$\overline{X} \geqq \mathring{A} \geqq \overline{A}, \quad \overline{Y} \geqq \mathring{B} \geqq \overline{B}.$$

Ferner gilt der Satz

·*2. Es ist*

$$(\overline{X}, \mathring{\overline{B}}) = (\overline{Y}, \mathring{\overline{A}}) = [(\overline{X}, \overline{B}), (\overline{Y}, \overline{A})].$$

16. Lokale Eigenschaften. Es seien wieder $\overline{X} \geqq \overline{A}$, $\overline{Y} \geqq \overline{B}$ Zerlegungen auf G und die $\overline{A}, \overline{B}$ seien komplementär. Die $\mathring{\overline{A}}, \mathring{\overline{B}}$ mögen dieselbe Bedeutung wie in 15·2 haben.

Ferner sei $g \in G$ ein beliebiges Element und $\bar{x} \in \overline{X}$, $\bar{a} \in \overline{A}$, $\bar{y} \in \overline{Y}$, $\bar{b} \in \overline{B}$, die das Element g enthaltenden Elemente unserer Zerlegungen. Offenbar sind $(\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{\overline{A}}$, $(\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{\overline{B}}$ Zerlegungen in G.

Satz:

·*1. Die Zerlegungen* $(\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{\overline{A}}$, $(\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{\overline{B}}$ *sind verknüpft.*

Weiter setzen wir

$$\overline{X}^g = \bar{x} \sqsubset \overline{A} \; (= \overline{A} \sqcap \bar{x}), \quad \overline{Y}^g = y \sqsubset \overline{B} \; (= \overline{B} \sqcap \bar{y}),$$

so daß $\overline{X}^g$ eine Zerlegung auf $\bar{x}$ ist, die $\bar{a}$ als Element enthält, und Ähnliches gilt von $\overline{Y}^g, \bar{y}, \bar{b}$.

Satz:

·*2. Die Zerlegungen* $\overline{X}^g, \overline{Y}^g$ *sind adjungiert in bezug auf* $\bar{a}, \bar{b}$.

17. Komplementäre Zerlegungen von Gruppen. Ein Beispiel von komplementären Zerlegungen bieten die durch invariante Untergruppen erzeugten Zerlegungen von Gruppen.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige Gruppe, G das Feld von $\mathfrak{G}$ und A, B die Felder von zwei beliebigen invarianten Untergruppen in $\mathfrak{G}$. Mit G/A, G/B, G/AB bezeichnen wir die durch die entsprechenden Untergruppen erzeugten Zerlegungen von $\mathfrak{G}$.

Sätze:

·*1. Zwei Elemente* $\bar{a} \in G/A$, $\bar{b} \in G/B$ *sind dann und nur dann inzident, wenn sie in demselben Elemente von* G/AB *liegen.*

·*2. Die Zerlegungen* G/A, G/B *sind komplementär.*

Für beliebige invariante Untergruppen in $\mathfrak{G}$: $\mathfrak{X} \supset \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ besteht die Beziehung

$$\mathfrak{X} \cap \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(\mathfrak{X} \cap \mathfrak{B}),$$

wodurch zum Ausdruck gebracht wird, daß das aus allen invarianten Untergruppen in $\mathfrak{G}$ bestehende System einen modularen (Dedekindschen) Verband bildet, wenn man als Verbandsvereinigung von zwei invarianten Untergruppen in $\mathfrak{G}$ ihr Produkt und als Verbandsdurchschnitt ihren Durchschnitt erklärt [Ø. Ore, l. c. S. 301]. Diese Beziehung bringt für die entsprechenden Zerlegungen $\overline{X} \geqq \overline{A}$ und $\overline{B}$ von $\mathfrak{G}$ die folgende Gleichheit mit sich:

$$(\overline{X}, [\overline{A}, \overline{B}]) = [\overline{A}, (\overline{X}, \overline{B})],$$

so daß $\overline{B}$ in bezug auf $\overline{X}, \overline{A}$ α-modular ist. Durch unseren Satz ·*2* wird dieses Resultat verschärft.

18. Abbildungen von Zerlegungen. $\mathfrak{f}$ sei eine Abbildung von G auf eine Menge G^*. Jedes Element $g \in G$ wird also in $\mathfrak{f}$ auf ein Element $g^* \in G^*$ abgebildet; g (g^*) ist das *Modell* (*Bild*) von g^* (g) in der Abbildung $\mathfrak{f}$. Zu $\mathfrak{f}$ gehört eine Zerlegung $\overline{F}$ von G, deren Elemente aus allen Modellen je eines Elementes in G^* bestehen.

Ferner ist durch $\mathfrak{f}$ eine Abbildung — die sogenannte *erweiterte Abbildung* — des aus allen Untermengen in G bestehenden Systems in das System von Untermengen in G^* eindeutig bestimmt. Diese Abbildung $\bar{\mathfrak{f}}$ ist dadurch definiert, daß das Bild $\bar{\mathfrak{f}}A \subset G^*$ einer Untermenge $A \subset G$ durch die Bilder in $\mathfrak{f}$ aller Elemente $a \in A$ gebildet ist. Wegen Vereinfachung von Bezeichnungen schreiben wir anstatt $\bar{\mathfrak{f}}$ auch nur $\mathfrak{f}$. Wir wenden also das Symbol $\mathfrak{f}$ auf Elemente in G an, z. B. $a \in G$, und haben als Resultat $\mathfrak{f}a$ das Bild von a in der Abbildung $\mathfrak{f}$, oder wir wenden es an auf Untermengen in G, z. B. $A \subset G$, und haben dann als Resultat $\mathfrak{f}A$ das Bild von A in der erweiterten Abbildung $\bar{\mathfrak{f}}$.

Von derselben Regel machen wir Gebrauch auch dann, wenn es sich um Systeme von Untermengen in G handelt: Ist $\mathbf{A}$ ein System von solchen Untermengen, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{f}\mathbf{A}$ das System von Bildern der einzelnen Elemente in $\mathbf{A}$ in der Abbildung $\bar{\mathfrak{f}}$.

A, B seien beliebige Untermengen in G.

Satz:

$\cdot 1$. *Die Gleichheit $\mathfrak{f}A = \mathfrak{f}B$ besteht dann und nur dann, wenn $A \sqsubset \overline{F} = B \sqsubset \overline{F}$ gilt.*

Es sei nun $\overline{A}$ eine Zerlegung auf G. Das System von Untermengen in G^*, $\mathfrak{f}\overline{A}$, bedeckt zwar die Menge G^*, braucht aber keine Zerlegung von G^* zu sein. Darüber gilt der Satz

$\cdot 2$. *$\mathfrak{f}\overline{A}$ ist eine Zerlegung von G dann und nur dann, wenn die beiden Zerlegungen $\overline{A}, \overline{F}$ komplementär sind.*

Die Zerlegungen $\overline{A}, \overline{F}$ seien nun komplementär.

Sätze:

$\cdot 3$. *Für $\bar{a} \in \overline{A}$ besteht die Beziehung $\mathfrak{f}\bar{a} = \mathfrak{f}\bar{u}$, wobei $\bar{u} \in [\overline{A}, \overline{F}]$ dasjenige Element bedeutet, in dem $\bar{a}$ liegt.*

$\cdot 4$. *Die Bilder in $\mathfrak{f}$ von zwei verschiedenen Elementen in $[\overline{A}, \overline{F}]$ sind verschieden.*

$\cdot 5$. *Wenn eine Zerlegung $\overline{A}$ von G in $\mathfrak{f}$ auf eine Zerlegung $\overline{A}^*$ von G^* abgebildet wird, so sind die beiden Zerlegungen $[\overline{A}, \overline{F}]$, $\overline{A}^*$ äquivalent; und zwar erhält man eine eineindeutige Abbildung von $[\overline{A}, \overline{F}]$ auf $\overline{A}^*$, indem man jedem Elemente von $[\overline{A}, \overline{F}]$ sein Bild in $\mathfrak{f}$ zuordnet.*

Eine unmittelbare Folgerung von $\cdot 5$ besteht darin, daß *eine jede Überdeckung von $\overline{F}$ mit ihrem Bilde in $\mathfrak{f}$ äquivalent ist* und zwar ist die Abbildung, welche jedem Elemente der Überdeckung sein Bild in $\mathfrak{f}$ zuordnet, eineindeutig.[4])

$\cdot 6$. *Ist $\overline{A} = \{\bar{a}, \bar{b}, \ldots\}$ eine Zerlegung auf G, so ist $\{\mathfrak{f}\bar{a}, \mathfrak{f}\bar{b}, \ldots\}$ eine solche auf G^* dann und nur dann, wenn $\overline{A}$ eine Überdeckung von $\overline{F}$ ist.*

---

[4]) P. DUBREIL, *Remarques sur les théorèmes d'isomorphisme* [C. R. Acad. Sci., Paris, **215**, 239–241 (1942)].

19. Homomorphe Abbildung erzeugender Zerlegungen von Gruppen. Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe und $\mathfrak{A}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Ferner seien φ, ψ homomorphe Abbildungen von $\mathfrak{G}$ auf beliebige Gruppen $\varphi\mathfrak{G}, \psi\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{N}_\varphi, \mathfrak{N}_\psi$ die Normalteiler, welche die zu φ, ψ gehörige Zerlegungen von $\mathfrak{G}$ erzeugen. $\mathfrak{N}_\varphi$ ($\mathfrak{N}_\psi$) besteht also aus allen Elementen von $\mathfrak{G}$, die sich in φ (ψ) auf die Einheit von $\varphi\mathfrak{G}$ ($\psi\mathfrak{G}$) abbilden.[5] Die Felder dieser Gruppen bezeichnen wir mit $G, A, \varphi G, \psi G, N_\varphi, N_\psi$, so daß insbesondere G/N_φ, G/N_ψ die zu φ, ψ gehörige Zerlegungen von $\mathfrak{G}$ sind.

Sätze:

·*1. Es gilt*

$$\varphi(G/A) = \varphi G/\varphi A.$$

·*2. Es bestehen die Beziehungen*

$$\varphi G/\varphi N_\psi \simeq G/N_\varphi N_\psi, \quad \psi G/\psi N_\varphi \simeq G/N_\varphi N_\psi,$$

wobei jedem Elemente von $G/N_\varphi N_\psi$ seine Bilder in φ und ψ entsprechen.

·*3. Wenn von den beiden Gleichheiten $\varphi N_\psi = \varphi G$, $\psi N_\varphi = \psi G$ eine erfüllt ist, so ist dies auch für die andere der Fall und jedes Element in G/N_φ ist mit jedem Elemente in G/N_ψ inzident.*

Unter der Voraussetzung des Satzes ·*3* haben wir die Beziehung

$$\mathfrak{G}/(\mathfrak{N}_\psi \cap \mathfrak{N}_\psi) = \mathfrak{N}_\varphi/(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\psi) \times \mathfrak{N}_\psi/(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\psi),$$

wobei das Zeichen $\times$ das direkte Produkt bezeichnet.

III. Reihen von Zerlegungen.

20. Grundbegriffe. Es seien $\bar{A} \geqq \bar{B}$ Zerlegungen auf G.

Unter einer *Reihe* von Zerlegungen von $\bar{A}$ nach $\bar{B}$ verstehen wir eine geordnete endliche Menge von Zerlegungen auf G von der Beschaffenheit, daß die erste Zerlegung $\bar{A}$ und die letzte $\bar{B}$ ist und ferner jede nachfolgende Zerlegung eine Verfeinerung der vorangehenden ist:

$$(\bar{A} =)\ \bar{A}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{A}_\alpha\ (= \bar{B}).$$

Eine solche Reihe wird kürzer mit $(\bar{A})$ bezeichnet. $\bar{A}, \bar{B}$ sind die *Endzerlegungen* der Reihe $(\bar{A})$; die Anzahl α der die Reihe $(\bar{A})$ bildenden Zerlegungen ist die *Länge* von $(\bar{A})$ und die einzelnen Zerlegungen sind die *Glieder* von $(\bar{A})$.

Es sei $((\bar{A}) -)\ \bar{A}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{A}_\alpha$ eine Reihe von Zerlegungen von $\bar{A}$ nach $\bar{B}$.

Ein Glied von $(\bar{A})$ wird *wesentlich* genannt, wenn es entweder das erste Glied $\bar{A}_1$ oder eine *echte* Verfeinerung des vorangehenden Gliedes ist; andernfalls ist es *unwesentlich*. Gibt es in $(\bar{A})$ wenigstens ein unwesentliches Glied $\bar{A}_\gamma$, so heißt die Reihe $(\bar{A})$ *mit Wiederholungen*. In diesem Falle kann

[5]) An dieser Stelle wird im tschechischen Originaltext auf das Buch O. Borůvka: *Úvod do teorie grup* [Prag (1944)] verwiesen, in dem Gruppen auf Grund von Eigenschaften allgemeiner Gruppoide studiert werden.

sie durch Streichen von $\bar{A}_\gamma$ *verkürzt* werden. Besteht $(\bar{A})$ nur aus wesentlichen Gliedern, so heißt sie *ohne Wiederholungen*. Die Anzahl α' wesentlicher Glieder in $(\bar{A})$ ist die *reduzierte Länge* der Reihe $(\bar{A})$. Es ist $1 \leqq \alpha' \leqq \alpha$, wobei die Gleichheit $\alpha' \quad \alpha$ Reihen ohne Wiederholungen charakterisiert. Wenn die Reihe $(\bar{A})$ Wiederholungen enthält, so kann sie durch Streichen aller unwesentlichen Glieder *reduziert*, d. h. auf eine Reihe $(\bar{A}')$ ohne Wiederholungen verkürzt werden. Die Länge der reduzierten Reihe $(\bar{A}')$ ist der reduzierten Länge α' der Reihe $(\bar{A})$ gleich. Umgekehrt kann die Reihe $(\bar{A})$ *verlängert* werden und zwar dadurch, daß man zwischen zwei beliebige Glieder $\bar{A}_\gamma, \bar{A}_{\gamma+1}$ bzw. vor (hinter) das erste (letzte) Glied $\bar{A}_1$ $(\bar{A}_\alpha)$ von $(\bar{A})$ die Zerlegung $\bar{A}_\gamma$ bzw. $\bar{A}_1$ $(\bar{A}_\alpha)$ oder eine beliebige endliche Anzahl solcher Zerlegungen eingliedert. Offenbar besitzt jede verkürzte oder verlängerte Reihe von $(\bar{A})$ dieselbe reduzierte Länge wie die Reihe $(\bar{A})$.

Sind $\alpha_1 < \ldots < \alpha_\beta$ beliebige natürliche Zahlen $\leqq \alpha$, wobei $\beta \geqq 1$, so ist

$$\bar{A}_{\alpha_1} \geqq \ldots \geqq \bar{A}_{\alpha_\beta}$$

auch eine Reihe von Zerlegungen auf G, eine sogenannte *Teilreihe* von $(\bar{A})$. Ist ferner A eine nicht leere Untermenge in G, so ist

$$\bar{A}_{\alpha_1} \sqcap A \geqq \ldots \geqq \bar{A}_{\alpha_\beta} \sqcap A$$

eine Reihe von Zerlegungen auf A.

21. Lokale Ketten. $((\bar{A}) \quad) \; \bar{A}_1 \geqq \ldots > \bar{A}_\alpha$ sei eine Reihe von Zerlegungen auf G von der Länge $\alpha \geqq 1$.

Es sei $a \in G$ ein beliebiges Element in G und a_γ dasjenige Element von $\bar{A}_\gamma$, welches a enthält $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$; wir setzen ferner $\bar{a}_0 = G$. Offenbar bestehen die Beziehungen

$$a_0 \supset \ldots \supset a_\alpha.$$

Weiter ist

$$(\bar{A}^a_{\gamma-1} \quad) \; \bar{a}_{\gamma-1} \sqsubset \bar{A}_\gamma$$

eine Zerlegung auf $\bar{a}_{\gamma-1}$, die $\bar{a}_\gamma$ als Element enthält. Also ist

$$\bar{A}^a_0 \to \ldots \to \bar{A}^a_{\alpha-1}$$

eine Kette von Zerlegungen von $\bar{a}_0$ nach a_α. Diese ist die zu dem Elemente a gehörige *lokale Kette* der Reihe $(\bar{A})$, kürzer: die lokale Kette von a. Bezeichnung: $[\bar{A}^a]$.

Satz:

1. Die lokale Kette $[\bar{A}^a]$ *ist eine elementare Kette von* $\bar{a}_0$ *nach* a_α *über* $\bar{A}_\alpha$.

Weiter gilt, daß die Länge von $[\bar{A}^a]$ gleich α und die reduzierte Länge von $[\bar{A}^a] \leq \alpha'$ ist, wobei α' die reduzierte Länge von $(\bar{A})$ bedeutet.

22. Verfeinerungen einer Reihe. $((\bar{A}) \quad) \; \bar{A}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{A}_\alpha$ sei eine beliebige Reihe von Zerlegungen auf G von der Länge $\alpha \geqq 1$.

Unter einer *Verfeinerung* der Reihe $(\bar{A})$ verstehen wir eine Reihe von

Zerlegungen auf G, welche $(\bar{A})$ als Teilreihe enthält. Jede Verfeinerung von $(\bar{A})$ hat also die Form

$$\begin{aligned} &\bar{A}_{1,1} \geqq \ldots \geqq \bar{A}_{1,\beta_1-1} \geqq \bar{A}_{1,\beta_1} \geqq \bar{A}_{2,1} \geqq \ldots \geqq \bar{A}_{2,\beta_2-1} \geqq \bar{A}_{2,\beta_2} \geqq \ldots \\ &\qquad \ldots > \bar{A}_{\alpha,\beta_\alpha} \geqq \bar{A}_{\alpha+1,1} \geqq \ldots \geqq \bar{A}_{\alpha+1,\beta_{\alpha+1}-1}, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei, für $\gamma = 1, \ldots, \alpha$, $\bar{A}_{\gamma,\beta_\gamma} - \bar{A}_\gamma$ bedeutet und $\beta_1, \ldots, \beta_{\alpha+1}$ natürliche Zahlen sind; wenn $\beta_\delta = 1$ ist, so werden die Glieder $\bar{A}_{\delta,1} \geqq \ldots \geqq \bar{A}_{\delta,\beta_\delta \; 1}$ nicht gelesen. Aus dieser Definition entnimmt man, daß man eine jede Verfeinerung von $(\bar{A})$ erhält, indem man zwischen einige benachbarte Glieder $\bar{A}_\gamma, \bar{A}_{\gamma+1}$ und eventuell vor das erste Glied $\bar{A}_1$ und hinter das letzte $\bar{A}_\alpha$ eine Reihe von Zerlegungen auf G eingliedert. Insbesondere ist also jede Verlängerung der Reihe $(\bar{A})$ ihre Verfeinerung.

Es sei $(\mathring{A})$ eine Verfeinerung von $(\bar{A})$, wobei wir dieselben Bezeichnungen wie in (1) wählen, also insbesondere $\bar{A}_{\gamma,\beta_\gamma} = \bar{A}_\gamma$, für $\gamma = 1, \ldots, \alpha$. Es sei $a \in G$ ein beliebiges Element und sei ferner $\bar{a}_{\mu,\nu}$, für $\mu = 1, \ldots, \alpha + 1$; $\nu = 1, \ldots, \beta_\mu$, dasjenige Element von $\bar{A}_{\mu,\nu}$, in dem a gelegen ist; wir haben also insbesondere $\bar{a}_{\gamma,\beta_\gamma} = \bar{a}_\gamma$, wobei wieder $a \in \bar{a}_\gamma \in \bar{A}_\gamma$ ist. Die zum Elemente a gehörige lokale Kette von $(\mathring{A})$, $[\mathring{A}^a]$, ist

$$\begin{aligned} &\bar{A}^a_{1,0} \to \ldots \to \bar{A}^a_{1,\beta_1-1} \to \bar{A}^a_{2,0} \to \ldots \to \bar{A}^a_{2,\beta_2-1} \to \ldots \\ &\qquad \ldots \to \bar{A}^a_{\alpha,\beta_\alpha-1} \to \bar{A}^a_{\alpha+1,0} \to \ldots \to \bar{A}^a_{\alpha+1,\beta_{\alpha+1} \; 2}, \end{aligned}$$

wobei natürlich $\bar{A}^a_{\mu,\nu-1} = \bar{a}_{\mu,\nu-1} \sqsubset \bar{A}_{\mu,\nu}$, $\bar{a}_{\mu,0} = \bar{a}_{\mu-1}$, $\bar{a}_0 - G$ bedeutet. Daraus entnimmt man, daß *die zu einem beliebigen Elemente $a \in G$ gehörige lokale Kette einer Verfeinerung der Reihe $(\bar{A})$ eine Verfeinerung der zu a gehörigen lokalen Kette von $(\bar{A})$ ist, oder eine solche Verfeinerung, die durch Hinzufügen einer Kette am Ende der lokalen Kette von $(\bar{A})$ erweitert wird.*

23. Abbildung von Reihen von Zerlegungen. Es seien

$$\begin{aligned} &((\bar{A}) \quad\ ) \ \bar{A}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{A}_\alpha, \\ &((\bar{B}) \ -) \ \bar{B}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{B}_\beta \end{aligned} \tag{1}$$

beliebige Reihen von Zerlegungen auf G von den Längen $\alpha, \beta \geqq 1$. Unter einer Abbildung der Reihe $(\bar{A})$ in (auf) $(\bar{B})$ verstehen wir natürlich eine Abbildung der Menge der Glieder von $(\bar{A})$ in (auf) diejenige von $(\bar{B})$. Durch eine Abbildung von $(\bar{A})$ in $(\bar{B})$ wird also einem jeden Gliede $\bar{A}_\gamma$ der ersten Reihe ein bestimmtes Glied $\bar{B}_\delta$ der zweiten eindeutig zugeordnet.

Es sei $\mathfrak{f}$ eine Abbildung von $(\bar{A})$ in $(\bar{B})$. Wir betrachten die zu einem beliebigen Elemente $a \in G$ gehörigen lokalen Ketten von $(\bar{A})$ und $(\bar{B})$:

$$\begin{aligned} &([\bar{A}^a] \quad) \ \bar{A}^a_0 \to \ldots \to \bar{A}^a_{\alpha-1}, \\ &([\bar{B}^a] \quad) \ \bar{B}^a_0 \to \ldots \to \bar{B}^a_{\beta-1}. \end{aligned}$$

Durch die Abbildung $\mathfrak{f}$ ist eine Abbildung der Kette $[\bar{A}^a]$ in die Kette $[\bar{B}^a]$ festgelegt, die zu jedem Elemente $\bar{A}^a_{\gamma-1} \in [\bar{A}^a]$ das Element $\bar{B}^a_{\delta-1} \in [\bar{B}^a]$ zuordnet, wobei $\bar{B}_\delta = \mathfrak{f}\bar{A}_\gamma$ ist. Diese Abbildung nennen wir die durch $\mathfrak{f}$ induzierte zu a gehörige *lokale Abbildung*, kürzer: lokale Abbildung $\mathfrak{f}$.

24. Verknüpfte Reihen von Zerlegungen. Wir betrachten wieder beliebige Reihen von Zerlegungen auf G: **23**, (1).

Wir nennen die Reihen $(\overline{A})$, $(\overline{B})$ *verknüpft*, wenn es eine eineindeutige Abbildung $\mathfrak{f}$ von $(\overline{A})$ auf $(\overline{B})$ gibt — die sogenannte *erste Abbildung* — derart, daß je zwei einander in der zu jedem beliebigen Elemente $a \in G$ gehörigen lokalen Abbildung $\mathfrak{f}$ zugeordneten Zerlegungen verknüpft sind.

Wir setzen nun voraus, daß die Reihen $(\overline{A})$, $(\overline{B})$ verknüpft sind.

Mit $\mathfrak{f}$ bezeichnen wir die erste Abbildung von $(\overline{A})$ auf $(\overline{B})$ und mit $[\overline{A}^a]$, $[\overline{B}^a]$ die zu einem beliebigen Elemente $a \in G$ gehörigen lokalen Ketten. Durch $\mathfrak{f}$ wird also jedem Gliede $\overline{A}^a_{\gamma-1}$ $(= \bar{a}_{\gamma-1} \sqsubset \overline{A}_\gamma)$ von $[\overline{A}^a]$ ein Glied $\overline{B}^a_{\delta-1}$ $(= \bar{b}_{\delta-1} \sqsubset \overline{B}_\delta)$ von $[\overline{B}^a]$ eineindeutig zugeordnet und die beiden Zerlegungen $\overline{A}^a_{\gamma-1}$, $\overline{B}^a_{\delta-1}$ sind verknüpft. $\bar{a}_\gamma$, $\bar{b}_\delta$ seien durch die folgenden Beziehungen definiert: $a \in \bar{a}_\gamma \in \overline{A}^a_{\gamma-1}$, $a \in \bar{b}_\delta \in \overline{B}^a_{\delta-1}$.

Sätze:

·1. *Das Element $\bar{a}_\gamma$ ist gerade nur mit dem Elemente $\bar{b}_\delta$ und $\bar{b}_\delta$ gerade nur mit $\bar{a}_\gamma$ inzident.*

·2. *Es gilt: $\overline{A}^a_{\gamma-1} \simeq \overline{B}^a_{\delta-1}$.*

·3. *Ist $\overline{A}^a_{\gamma-1}$ ein unwesentliches Glied von $[\overline{A}^a]$, so ist auch $\overline{B}^a_{\delta-1}$ ein unwesentliches Glied von $[\overline{B}^a]$.*

·4. *Die beiden Ketten $[\overline{A}^a]$, $[\overline{B}^a]$ haben dieselbe Länge und dieselbe reduzierte Länge.*

·5. *In der ersten Abbildung ist einem unwesentlichen Gliede von $(\overline{A})$ entweder das erste Glied $\overline{B}_1$ von $(\overline{B})$ zugeordnet und in diesem Falle gilt $\overline{B}_1 \doteq \overline{G}_{\max}$, oder aber auch ein unwesentliches Glied von $(\overline{B})$.*

·6. *Wenn in der ersten Abbildung dem ersten Gliede von $(\overline{A})$ das erste Glied von $(\overline{B})$ zugeordnet ist, so haben die Reihen $(\overline{A})$, $(\overline{B})$ dieselbe reduzierte Länge.*

25. Komplementäre Reihen von Zerlegungen. Wir betrachten wieder beliebige Reihen von Zerlegungen auf G: **23**, (1).

Die Reihen $(\overline{A})$, $(\overline{B})$ heißen *komplementär*, wenn jedes Glied *von $(\overline{A})$ zu jedem Gliede von $(\overline{B})$ komplementär ist.*

Sätze:

·1. *Die zu einem beliebigen Elemente $a \in G$ gehörigen lokalen Ketten von $(\overline{A})$, $(\overline{B})$ sind adjungiert, falls ihre Enden dieselben sind.*

·2. *Die Reihen $(\overline{A})$, $(\overline{B})$ besitzen verknüpfte Verfeinerungen von derselben reduzierten Länge,* die durch die folgende Konstruktion gegeben sind.

Wir setzen

$$[\overline{A}_1, \overline{B}_1] = \overline{U}, \quad (\overline{A}_\alpha, \overline{B}_\beta) = \overline{V},$$
$$\overline{A}_0 = \overline{B}_0 = \overline{G}_{\max}, \quad \overline{A}_{\alpha+1} = \overline{B}_{\beta+1} = \overline{V}.$$

Wegen $\overline{A}_{\gamma-1} \geq \overline{A}_\gamma$, $\overline{B}_{\delta-1} \geq \overline{B}_\delta$ und der Voraussetzung, daß $\overline{A}_\gamma$, $\overline{B}_\delta$ komplementär sind, haben wir nach **15**·*1*

$$(\mathring{\overline{A}}_{\gamma,\nu} \quad) \ [\overline{A}_\gamma, (\overline{A}_{\gamma-1}, \overline{B}_\nu)] = (\overline{A}_{\gamma-1}, [\overline{A}_\gamma, \overline{B}_\nu]),$$
$$(\mathring{\overline{B}}_{\delta,\mu} =) \ [\overline{B}_\delta, (\overline{B}_{\delta-1}, \overline{A}_\mu)] = (\overline{B}_{\delta-1}, [\overline{B}_\delta, \overline{A}_\mu]),$$

und zwar für $\gamma, \mu = 1, \ldots, \alpha + 1$; $\delta, \nu = 1, \ldots, \beta + 1$. Aus dieser Definition von $\mathring{A}_{\gamma,\nu}$, $\mathring{B}_{\delta,\mu}$ folgt insbesondere

$$\mathring{A}_{\gamma,\beta+1} = \overline{A}_{\gamma}, \quad \mathring{B}_{\delta,\alpha+1} = \overline{B}_{\delta},$$

und ferner

$$\mathring{A}_{\gamma,\nu} \geqq \mathring{A}_{\gamma,\nu+1}, \quad \mathring{B}_{\delta,\mu} \geqq \mathring{B}_{\delta,\mu+1}.$$

Die beiden Reihen von Zerlegungen auf G:

$$((\mathring{A}) \quad) \; \overline{U} = \mathring{A}_{1,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{A}_{1,\beta+1} \geqq \mathring{A}_{2,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{A}_{2,\beta+1} \geqq \ldots$$
$$\ldots \geqq \mathring{A}_{\alpha+1,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{A}_{\alpha+1,\beta+1} = \overline{V},$$
$$((\mathring{B}) \quad) \; \overline{U} = \mathring{B}_{1,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{B}_{1,\alpha+1} \geqq \mathring{B}_{2,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{B}_{2,\alpha+1} \geqq \ldots$$
$$\ldots \geqq \mathring{B}_{\beta+1,1} \geqq \ldots \geqq \mathring{B}_{\beta+1,\alpha+1} - \overline{V}$$

sind die erwähnten Verfeinerungen. Die erste Abbildung $\mathfrak{f}$ von $(\mathring{A})$ auf $(\mathring{B})$ ist mit $\mathfrak{f}\mathring{A}_{\gamma,\delta} = \mathring{B}_{\delta,\gamma}$ definiert.

Die obige Konstruktion ist nach dem Muster der Zassenhausschen Konstruktion von isomorphen Verfeinerungen von Normalketten durchgeführt.[6])

26. Reihen von Zerlegungen in Verbänden. Es sei $\boldsymbol{A}$ ein beliebiger Verband von Zerlegungen auf G mit den Verbandsoperationen [] und ().

Eine Reihe von Zerlegungen *gehört* in $\boldsymbol{A}$, wenn jedes Glied der Reihe ein Element von $\boldsymbol{A}$ ist.

Eine in $\boldsymbol{A}$ gehörige Reihe von Zerlegungen auf G heißt eine *Hauptreihe* von $\boldsymbol{A}$, wenn jede in $\boldsymbol{A}$ gehörige Verfeinerung der Reihe ihre Verlängerung ist.

Sätze:

·1. *Wenn $\boldsymbol{A}$ ein größtes (kleinstes) Element enthält, so beginnt (endet) mit ihm jede Hauptreihe von $\boldsymbol{A}$.*

·2. *Alle komplementären Hauptreihen von $\boldsymbol{A}$ haben dieselbe reduzierte Länge.*

---

[6]) H. Zassenhaus, *Zum Satz von Jordan-Hölder-Schreier* [Abh. Hamb. Univ., 10, 106—108 (1934)].

BUCHDRUCKEREI PROMETHEUS, PRAG VIII.