

Otakar Borůvka

Teoria analytică și constructivă a transformărilor diferențiale liniare de ordinul doi

Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. R. 1 (49), 1957, Nr. 2, 125-130

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/500082>

Terms of use:

© Societatea de Științe Matematice, Roumanie, 1957

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

TEORIA ANALITICĂ ȘI CONSTRUCTIVĂ A TRANSFORMĂRILOR DIFERENȚIALE LINIARE DE ORDINUL DOI

DE

O. BORŮVKA (Brno)

(Comunicare făcută Congresului matematicienilor români, București, mai-iunie 1956)

1. Introducere

Obiectul conferinței de față îl constituie o teorie a transformărilor ecuațiilor diferențiale liniare ordinare de ordinul doi.

Vom considera două ecuații diferențiale de tip *I a c o b i*

$$(a) \quad y'' - q(t)y, \quad Y'' = Q(T)Y, \quad (A)$$

presupunând funcțiile q, Q continue în intervalele deschise J, J .

Origina teoriei noastre o constituie problema următoare:

Fie $U(T)$ o integrală a ecuației (A). Se caută două funcții $w(t), X(t)$ astfel încât funcția compusă

$$u(t) = w(t)U[X(t)]$$

să fie o integrală a celeilalte ecuații (a). Cu alte cuvinte, căutăm să transformăm unele în altele în felul arătat mai sus, integralele ecuațiilor (a), (A).

Problema noastră o găsim pusă și de ilustrul geometru german E. E. K u m m e r care s-a ocupat de ea într-un articol publicat în 1834 în programul de liceu, la Liegnitz. Acest articol a fost republicat în *Journal de Crelle* în 1887, vol. 100. Raționamentele originale ale lui K u m m e r n-au fost, după cât știm, adîncite în așa fel încît să formeze o teorie satisfăcătoare din punctul de vedere al teoriilor moderne. Totuși, natura numeroaselor probleme clasice și moderne ale teoriei ecuațiilor diferențiale lineare de ordinul doi, de exemplu teoria clasică a lui F l o q u e t, criteriile privind caracterul oscilatoriu al soluțiilor, comportarea asimptotică a integralelor, problemele la limită etc. lasă să se prevadă că metoda transformării integralelor unei ecuații date în integralele unor ecuații mult mai simple, chiar în integralele unor ecuații ca $y'' = 0$ sau $y'' - y$ poate să prezinte mari avantaje.

Am fost condus la teoria de față de cercetările mele asupra dispersiilor ecuațiilor diferențiale lineare ordinare de ordinul doi. Memoriul meu apărut în *Czech.*

Math. Journ. 3 (78), 1953 este consacrat acestor studii. Teoria dispersiilor se ocupă în fond, de transformarea integralelor unei ecuații diferențiale lineare ordinare de ordinul doi în integralele aceleiași ecuații diferențiale, în condiții particulare. Este vorba, bine înțeles, de chestiuni privind domeniul real și de caracter global.

Teoria transformărilor diferențiale lineare de ordinul doi, pe care o voi prezenta aici în mod succint, se compune dintr-o parte analitică și dintr-o parte constructivă. Partea analitică constituie obiectul Memoriului care a apărut de curând în *Annali di Matematica p. ed appl.*, vol. 41 (1956). Îm voi permite să reamintesc rezultatele fundamentale care sînt indispensabile pentru o bună înțelegere a celor ce urmează. După aceasta însă mă voi ocupa pe scurt, de partea constructivă și voi indica cîteva aplicații ale teoriei de față.

2. Partea analitică

Pe lîngă ecuațiile diferențiale lineare (a), (A) vom asocia două ecuații diferențiale nelineare de ordinul doi, în jurul cărora gravitează toată teoria considerată:

$$(b) \quad -\{X, t\} + Q(X) X'^2 = q(t), \quad -\{x, T\} + q(x) \dot{x}^2 = Q(T); \quad (B)$$

X, x sînt funcții necunoscute și simbolurile $\{X, t\}$, $\{x, T\}$ reprezintă derivatele schwartziene în raport cu variabilele independente t, T :

$$\{X, t\} = \frac{1}{2} \frac{X'''}{X'} - \frac{3}{4} \frac{X''^2}{X'^2}; \quad \{x, T\} = \frac{1}{2} \frac{\ddot{X}}{\dot{x}} - \frac{3}{4} \frac{\ddot{x}^2}{\dot{x}^2}.$$

Vom considera de asemenea și cazuri particulare ale ecuațiilor (b), (B) și anume:

$$(\bar{b}) \quad -\{X, t\} + q(X) X'^2 = q(t), \quad -\{x, T\} + Q(x) \dot{x}^2 = Q(T). \quad (B)$$

Fundamentele teoriei sînt date de rezultatele următoare:

1. Relații între soluțiile ecuațiilor (b), (B).

Pentru fiecare soluție a ecuației (b), $X(t)$, funcția inversă $x(T)$, reprezintă o soluție a ecuației (B); reciproc, pentru fiecare soluție a ecuației (B), $x(T)$, funcția inversă $X(t)$, este o soluție a ecuației (b).

2. Relații între soluțiile ecuațiilor (A), (b); (a), (B).

Pentru fiecare integrală a ecuației (A), $U(T)$ și fiecare soluție a ecuației (b), $X(t)$, funcția compusă

$$u(t) = \frac{U[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}}$$

reprezintă o integrală a ecuației (a); în același timp avem și formula inversă:

$$U(T) = \frac{u[x(T)]}{\sqrt{|\dot{x}(T)|}},$$

$x(T)$ fiind funcția inversă lui $X(t)$.

Se găsesc rezultate analoge pentru fiecare integrală a ecuației (a), $u(t)$, și fiecare soluție a ecuației (B), $x(T)$.

3. Teoremă asupra existenței și unicității soluțiilor ecuației (b).

Fie $t_0 \in j$, $X_0 \in J$, $X'_0 (\neq 0)$, X''_0 numere arbitrare. Există o integrală $X(t)$ a ecuației (b) definită într-un interval deschis, i , care satisface datelor lui Cauchy:

$$X(t_0) = X_0, X'(t_0) = X'_0, X''(t_0) = X''_0,$$

și care este în același timp, cea mai cuprinzătoare în sensul că orice integrală a ecuației (b), verificând aceleași condiții inițiale, coincide cu ea pe intervalul în care este definită.

Dacă se cunosc integralele generale ale ecuațiilor lineare (a), (A), soluția $X(t)$ se obține prin integrarea unei ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi cu variabile separate.

4. Grupurile de soluții ale ecuațiilor (b), (\bar{B}).

Să presupunem că integralele ecuațiilor (a), (A) sînt oscilante, adică au spre cele două extremități ale intervalelor j și J o infinitate de rădăcini. Atunci cele mai cuprinzătoare soluții ale fiecărei ecuații (\bar{b}), (\bar{B}) există și sînt definite în tot intervalul corespunzător j , J și ele formează un grup continuu depinzînd de 3 parametri.

Grupul acesta al soluțiilor ecuației (b), de exemplu, se împarte în două clase, după cum este vorba de soluții crescătoare sau descrescătoare. Clasa formată din soluțiile crescătoare formează în acest grup un subgrup normal care posedă la rîndul său, un centru numărabil format tocmai din dispersiile centrale de prima speță $\varphi_n(t)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ în raport cu ecuația (a).

Reamintim că valoarea celei de-a n -a dispersii centrale de prima speță în punctul $t \in j$, $\varphi_n(t)$ coincide cu al n -lea număr conjugat valorii t în raport cu ecuația (a) situat la dreapta sau la stînga acestei valori, după cum n este pozitiv sau negativ; pentru $n = 0$ punem $\varphi_0(t) = t$.

3. Partea constructivă

Partea constructivă a teoriei de față constă în raționamentele conducînd la construirea tuturor soluțiilor cele mai cuprinzătoare ale ecuațiilor neliniare de ordinul trei (b), (B). Din cauza relațiilor pe care le-am arătat, care subsistă între soluțiile celor două ecuații (b), (B), este suficient în mod evident, de a considera numai una din aceste ecuații, de exemplu ecuația (b).

Pentru a evita complicațiile, de altfel neesențiale, legate de determinarea intervalelor de definiție a celor mai largi (cuprinzătoare) soluții ale ecuației (b), vom presupune că intervalele ecuațiilor lineare (a), (A) sînt oscilatorii, adică au spre ambele extremități ale intervalului j , respectiv J , o infinitate de rădăcini.

Fie date două numere arbitrare $t_0 \in j$, $X_0 \in J$.

Vom începe cu observația următoare. Să considerăm două integrale (neidentice), y, Y , a ecuațiilor (a), (A) (definite pe tot intervalul j , respectiv J); vom presupune că aceste integrale sau se anulează simultan în t_0 , X_0 sau nu se anulează niciuna în t_0 , X_0 ; avem astfel $y(t_0) = 0 = Y(X_0)$ sau $y(t_0) \neq 0 \neq Y(X_0)$.

Integralele acestea au, după cum am presupus, o infinitate de rădăcini către cele două extremități ale intervalelor j, J .

Definim între rădăcinile integralelor y, Y o corespondență biunivocă, numită directă, care face să corespundă celei de-a n -a ($n \geq 1$) rădăcină a integralei y , situată la dreapta (la stînga) lui t_0 a n -a rădăcină a integralei Y , situată de ase-

menea la dreapta (la stînga) lui X_0 ; dac̃a integralele y, Y se anuleaz̃a în t_0 , X_0 , vom face s̃a corespund̃a r̃ad̃ăcinei t_0 a integralei y r̃ad̃ăcina X_0 a integralei Y .

În afar̃ă de această corespondenț̃a definim și o corespondenț̃a analog̃ă numit̃ă indirect̃ă punînd în corespondenț̃a a n -a ($n \geq 1$) r̃ad̃ăcină a integralei y situat̃ă la dreapta (la stînga) lui t_0 cu a n -a r̃ad̃ăcină a integralei Y situat̃ă la stînga (la dreapta) lui X_0 și eventual asociînd r̃ad̃ăcinii t_0 a integralei y , r̃ad̃ăcina X_0 a integralei Y .

Succesul raționamentului părții constructive a teoriei considerate constă în considerarea corespondențelor omografice între integralele celor două ecuații (a), (A). Avem în vedere bine înțeles, integralele ecuațiilor (a), (A) neidentice nule și definite în intervalele întregi j, J .

Vom considera totalitatea integralelor ecuațiilor (a), (A), σ, Σ .

Să alegem două perechi ordonate de integrale liniar independente ale ecuațiilor (a), (A): $u, v \in \sigma, U, V \in \Sigma$; vom însemna cu w, W constantele de arie corespunzătoare, $w = uv' - u'v, W = UV' - U'V$.

Prin această alegere am determinat o corespondenț̃ă omografică, p , între sistemele σ, Σ , corespondenț̃ă definit̃ă în modul următor: la fiecare integrală $y \in \sigma, y = \lambda u + \mu v$ asociem integrala $py = Y \in \Sigma, Y = \lambda U + \mu V$ formată cu aceleași constante, λ, μ . Numărul $\tau = \text{sgn}(w: W) = \pm 1$, se numește *caracteristica omografiei* p .

Vom considera în cele ce urmează, omografiile p «regulate» în raport cu numerele t_0, X_0 prin proprietatea că fac s̃a corespund̃a fiecărei integrale y care se anulează în t_0 o integrală care se anulează în X_0 . Se vede că omografia p este regulat̃ă în raport cu t_0, X_0 dac̃a, și numai dac̃a, are loc relația: $u(t_0) V(X_0) - v(t_0) U(X_0) = 0$. Omografiile regulate în raport cu t_0, X_0 depind de 3 parametri arbitrari.

Vom defini acum, în intervalul j , două funcții D, \bar{D} numite *dispersii asociate ecuațiilor* (a), (A) care joac̃ă un rol fundamental în teoria de faț̃ă.

Fie p o omografie regulat̃ă în raport cu t_0, X_0 . Fie $t \in j$ un număr arbitrar și $y \in \sigma$ o integrală care se anulează în t . Definiția anunțat̃ă revine la aceea că valoarea funcției $D(\bar{D})$ în t coincide cu r̃ad̃ăcina integralei py asociat̃ă r̃ad̃ăcinii t a lui y în corespondenț̃ă direct̃ă (indirect̃ă) existînd între r̃ad̃ăcinile integralelor y, py . Vom numi funcția $D(\bar{D})$ *dispersie direct̃ă* (indirect̃ă) determinat̃ă de numerele t_0, X_0 și de omografia p .

Această definiție pune în evidenț̃ă cîteva proprietăți imediate ale funcțiilor D, \bar{D} . Vom indica numai acelea care sînt exprimate prin formulele

$$D[\varphi_n(t)] = \Phi_n[D(t)]; \bar{D}[\varphi_n(t)] = \Phi_{-n}[\bar{D}(t)], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

φ_n, Φ_n fiind dispersiile centrale de prima speț̃ă ale ecuațiilor (a), (A).

Rezultatul central al acestei părți constructive a teoriei transformărilor pe care o prezentăm, este dat de următoarea teoremă:

Cele mai cuprinzătoare soluții ale ecuației diferențiale (b) exist̃ă în intervalul j întreg și coincid tocmai cu dispersiile directe determinate de diversele omografii regulate cu caracteristice pozitive și cu dispersiile indirecte determinate de omografiile regulate cu caracteristica negativă. Dispersiile directe reprezintă toate soluțiile cele mai cuprinzătoare crescătoare pe cînd dispersiile indirecte reprezintă pe cele descrescătoare.

4. Aplicații

Există numeroase aplicații ale teoriei precedente. Ne vom mulțumi să indicăm câteva rezultate particulare privind structura tuturor funcțiilor q pentru care integralele ecuației (a) posedă un caracter oscilatoriu dat. Aceste rezultate se obțin prin aplicarea teoriei precedente cazurilor particulare $Q = 0$, $Q = -1$.

Iată rezultatele:

1. Pentru ca orice integrală a ecuației (a) să posedă în intervalul j cel mult o rădăcină este necesar și suficient ca funcția q să fie derivata schvartziană, cu semnul schimbat, a unei funcții crescătoare X , verificând pentru un număr dat $t_0 \in j$ condițiile $X(t_0) = 0$, $X'(t_0) = 1$:

$$q(t) = -\{X, t\}.$$

2. Pentru ca orice integrală a ecuației (a) să aibă în intervalul j , $m (\geq 0)$ sau $m + 1$ rădăcini situate la stînga unui punct dat $t_0 \in j$, în acelaș timp, $n (\geq 0)$ sau $n + 1$ rădăcini situate la dreapta lui t_0 , este necesar și suficient ca funcția q să fie de forma:

$$q(t) = -\{X, t\} - X'^2(t),$$

X fiind o funcție crescătoare care se anulează în t_0 și verifică relațiile următoare:

$$-(m+1)\pi < \inf_{t \in j} X(t) < -m\pi; \quad n\pi < \sup_{t \in j} X(t) < (n+1)\pi.$$

3. Pentru ca integralele ecuației (a) să fie oscilatorii, adică să aibă către cele două extremități ale intervalului j o înfinitate de rădăcini, este necesar și suficient ca funcția q să fie de forma

$$q(t) = -\{X, t\} - X'^2(t),$$

X fiind o funcție crescătoare, nemărginită atât inferior cât și superior.

Alte aplicații care sînt în legătură cu teoria precedentă și care privesc diferite chestiuni ale teoriei ecuațiilor diferențiale liniare de ordinul doi și de ordine superioare, au fost publicate (mai ales în *Czech. Math. Journ.*) în ultimii ani de colaboratorii mei, M. Greguš, M. Laitoch, Marko Švec.