Otakar Borůvka

Sur la structure de l'esemble des transformations différentielles linéaires complètes du second ordre

Ann. Mat. Pura Appl., IV Ser., Vol. 58, 1962, 317-333

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500096

BORŮVKA, O.
1962
Annali di Matematica pura ed applicata
(IV), Vol. LVIII, pp. 317-334

Sur la structure de l'ensemble des transformations différentielles linéaires complètes du second ordre.

Memoria di O. BORŮVKA (à Brno)

À M. Enrico Bompiani pour son Jubilé scientifique.

Résumé. - *Dans un récent Memoire* (1) *nous avons étudié les questions fondamentales concernant l'existence et la généralité des transformations différentielles linéaires complètes du second ordre. Il s'agit, à présent, d'une étude des propriétés de ces transformations et surtout de l'analyse de la structure de leur ensemble. On considère, bien entendu, des matières dans le domaine réel et de caractère global.*

1. Introduction.

1. Nous allons commencer par indiquer un procédé qui paraît d'ouvrir la voie la plus directe, et la plus simple en même temps, à la théorie des transformations différentielles linéaires du second ordre. Ce procédé conduit, en particulier, rapidement, au point de départ de nos investigations au sujet des transformations complètes en question.

Nous considérons deux équations différentielles linéaires du second ordre

$$(a) \qquad y'' = q(t)y, \qquad Y'' = Q(T)Y; \qquad (A)$$

les fonctions q, Q sont supposées continues dans les intervalles ouverts $j = (a, b)$, $J = (A, B)$, les cas $a = -\infty$, $b = \infty$, $A = -\infty$, $B = \infty$ n'étant pas exclus. Pour éviter, dès le commencement, certains cas exceptionnels nous supposons que les équations (a), (A) admettent des points conjugués; en d'autres termes, nous supposons que toute intégrale de chacune de ces équations possède au moins un zéro.

Soient r, $\mathfrak{R}$ les espaces linéaires formés des intégrales des équations (a), (A). Nous choisissons à volonté, dans chacun de ces espaces, une base $u, v \in r$; $U, V \in \mathfrak{R}$, c'est-à-dire un couple ordonné d'intégrales linéairement indépendantes, u, v et U, V, des équations (a), (A); nous désignons par w, W les wronskiens correspondants, $w = uv' - u'v$, $W = UV' - U'V$. Moyennant de ces bases nous définissons une correspondance linéaire entre

(1) O. BORŮVKA, *Sur les transformations différentielles linéaires complètes du second ordre* «Ann. di Mat. p. ed app.», *49*, 1960, p. 229-251.

les espaces r, $\mathfrak{R}$, en associant l'une à l'autre deux intégrales quelconques $y \in r$, $Y \in \mathfrak{R}$, formées avec les mêmes coordonnées constantes, c_1, c_2, par rapport aux bases en question: $y = c_1 u + c_2 v$, $Y = c_1 U + c_2 V$. Par la fonction $y \to Y$ se trouve définie une représentation p de l'espace r sur l'espace $\mathfrak{R}$; le nombre $\tau = \frac{w}{W}$ s'appelle la caractéristique de la représentation p. De même, par la fonction $Y \to y$ se trouve définie une représentation P de l'espace $\mathfrak{R}$ sur r à la caractéristique $\mathcal{T} = \frac{W}{w}$. Les représentations p, P sont, évidemment, inverses l'une à l'autre et leurs caractéristiques jouissent de la même propriété: $\tau\mathcal{T} = 1$.

Nous exprimons les bases u, v; U, V en coordonnées polaires en termes de leurs amplitudes

$$\rho(t) = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)}, \quad P(T) = \sqrt{U^2(T) + V^2(T)}$$

et de certaines phases, $\alpha(t)$ (T), que nous choisissons, pour le moment, d'entre les phases déterminées par les bases en question, entièrement à volonté. Nous avons alors les formules

$$\begin{aligned} &u(t) = \varepsilon\rho(t) \sin \alpha(t), && v(t) = \varepsilon\rho(t) \cos\alpha(t), \\ &U(T) = EP(T) \sin A(T) && V(T) = EP(T) \cos A(T), \end{aligned} \tag{1}$$

$$(\varepsilon,\ E = \pm 1)$$

et nous voyons que, deux intégrales correspondantes quelconques, y, Y, s'expriment par les formules

$$y(t) = k_1\varepsilon\rho(t) \sin[\alpha(t) + k_2], \quad Y(T) = k_1 EP(T) \sin[A(T) + k_2], \tag{2}$$

les k_1, k_2 étant des constantes arbitraires.

Remarquons que, les fonctions ρ, α et de même P, A sont liées suivant les formules

$$\alpha'(t) = \frac{-w}{\rho^2(t)}, \quad A'(T) = \frac{-W}{P^2(T)} \tag{3}$$

Ceci étant, modifions, au cas de besoin, le choix des phases α, A de la manière suivante: D'après nos suppositions, chacune des intégrales u, U possède au moins un zéro, $t_0 \in j$, $T_0 \in J$, de sorte que, les valeurs des phases α, A, pour $t = t_0$, $T = T_0$, sont des multiples entiers de π, soit $n\pi$, $N\pi$. Or, la modification en question consiste en ceci que nous remplaçons les phases α, A par $\alpha - n\pi$, $A - N\pi$, en conservant d'ailleurs les mêmes notations α, A. Nous avons alors $\alpha(t_0) = A(T_0) = 0$ tandis que les formules (1), (2), (3) ne changent pas d'aspect; sont valables les relations $\varepsilon = \operatorname{sgn} v(t_0)$, $E = \operatorname{sgn} V(T_0)$.

Considérons alors l'équation

$$\alpha(t) = A(T) \tag{4}$$

Cette équation résulte vérifiée, évidemment, pour les valeurs $t_0 \in j$, $T_0 \in J$. Puisque chaque phase α, A va constamment en croissant ou bien en décroissant, il existe précisément une fonction $T = X(t)$, définie dans un voisinage $i \subset j$ de t_0, qui prend pour $t = t_0$ la valeur T_0 et satisfait identiquement, dans l'intervalle i, à l'équation (4); nous avons en vue le plus large intervalle i jouissant de cette propriété. De même, il existe précisément une fonction $t = x(T)$, définie dans un voisinage $I \subset J$ de T_0, qui prend pour $T = T_0$ la valeur t_0 et vérifie identiquement, dans I, l'équation (4); I désigne le plus large intervalle ayant la dite propriété. L'intervalle I représente, évidemment, l'ensemble des valeurs de la fonction X dans l'intervalle i, $I = X(i)$, et on a de même $i = x(I)$. On voit que les fonctions X, x sont inverses l'une à l'autre et s'expriment par les formules

$$X(t) = A^{-1}[\alpha(t)], \quad x(T) = \alpha^{-1}[A(T)]. \tag{5}$$

Finalement, on s'assure que, ces fonctions appartiennent à la classe C_3 et satisfont aux équations différentielles non linéaires du troisième ordre

$$(b) \qquad -\{X, t\} + Q(X)X'^2 = q(t), \quad -\{x, T\} + q(x)\dot{x}^2 = Q(T) \qquad (B)$$

les $\{X, t\}$, $\{x, T\}$ étant les dérivées schwarziennes des fonctions X, x aux points t, T respectivement. Ajoutons que, les équations (b), (B) peuvent être remplacées par l'équation unique suivante

$$\frac{1}{4}\left[\frac{1}{X'(t)}\right]'' + Q(X)X'(t) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\dot{x}(T)}\right]^{\cdot\cdot} + q(x)\dot{x}(T),$$

les valeurs t, T étant liées l'une à l'autre par les formules $T = X(t) \in I$, $t = x(T) \in i$.

Revenons à la définition des intervalles i, I pour préciser leur position dans les intervalles j, J,

Soit $i = (a', b)$, $I = (A', B)$ et désignons par c_1, c_2; C_1, C_2 les quantités suivantes:

$$c_1 = \lim_{t \to a} \alpha(t), \quad c_2 = \lim_{t \to b-} \alpha(t); \quad C_1 = \lim_{T \to A+} A(T), \quad C_2 = \lim_{T \to B-} A(T).$$

On a, évidemment, $c_1 < c_2$ ($C_1 < C_2$) ou bien $c_1 > c_2$ ($C_1 > C_2$) suivant que la fonction α (A) va constamment en croissant ou bien en décroissant.

Or, la position des intervalles i, I dans les intervalles j, J dépend des relations existant entre les quantités c_1, c_2 et C_1, C_2.

Soit, par exemple, $c_1 < c_2$, $C_1 < C_2$ et examinons les différents cas $c_1 \lesseqgtr C_1$, $c_2 \lesseqgtr C_2$. On s'aperçoit facilement qu'on a pour

$$1.\ c_1 < C_1, \quad 2.\ c_1 = C_1, \quad 3.\ c_1 > C_1$$

les relations

$$1.\ a' > a,\ A' = A, \quad 2.\ a' = a,\ A' = A, \quad 3.\ a' = a,\ A' > A$$

et de même, pour

$$1.\ c_2 < C_2, \quad 2.\ c_2 = C_2, \quad 3.\ c_2 > C_2$$

les relations

$$1.\ b' = b,\ B' < B, \quad 2.\ b' = b,\ B' = B, \quad 3.\ b' < b,\ B' = B.$$

On voit que, dans tous les cas, se confondent les extrémités gauches (droites) des intervalles i, j ou bien les extrémités gauches (droites) des intervalles I, J; en même temps coïncident les extrémités gauches (droites) des intervalles I, J ou bien les extrémités gauches (droites) des intervalles i, j.

On obtient le même résultat si $c_1 > c_2$, $C_1 > C_2$.

Dans les cas $c_1 < c_2$, $C_1 > C_2$ et $c_1 > c_2$, $C_1 < C_2$ se présente une situation analogue suivante:

Se confondent toujours les extrémités gauches (droites) des intervalles i, j ou bien les extrémités droites (gauches) des intervalles I, J; en même temps coïncident les extrémités gauches (droites) des intervalles I, J ou bien les extrémités droites (gauches) des intervalles i, j.

On peut résumer ces résultats de façon que, les intervalles i, I s'étendent toujours, dans le sens énoncé plus haut, jusqu'aux extrémités des intervalles j, J.

Remarquons qu'en certains cas particuliers, les intervalles i, j et en même temps les intervalles I, J peuvent être identiques: $i = j$, $I = J$.

Ceci étant éclairci, envisageons les formules (2). Nous voyons que les intégrales y, Y se transforment l'une à l'autre, moyennant des fonctions x, X, d'après les formules

$$y(t) = \varepsilon \mathrm{E} \frac{\rho(t)}{P[X(t)]} Y[X(t)], \quad Y(T) = \varepsilon \mathrm{E} \frac{P(T)}{\rho[x(T)]} y[x(T)]$$

qui, à leur tour, peuvent être mises, d'après (3), (4), sous la forme

$$\varepsilon \sqrt[4]{|\mathfrak{T}|}\, y(t) = E \sqrt[4]{|\tau|}\, \frac{Y[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}},$$

$$E\sqrt[4]{|\tau|}\, Y(T) = \varepsilon \sqrt[4]{|\mathfrak{T}|}\, \frac{y[x(T)]}{\sqrt{|\dot{x}(T)|}}.$$

Pour simplifier ces formules normons les intégrales y, Y en les multipliant par les quantités $\varepsilon\sqrt[4]{|\mathfrak{T}|}$, $E\sqrt[4]{|\tau|}$ et conservons pour les intégrales normées les mêmes notations y, Y. Les formules ci-dessus peuvent alors être remplacées par la relation symétrique suivante

$$\sqrt[4]{|X'(t)|}\; y(t) = \sqrt[4]{|\dot{x}(T)|}\; Y(T); \tag{6}$$

les quantités t, T intervenant dans cette relation sont, naturellement, les valeurs des fonctions X, x définies plus haut, $t = x(T) \in i$, $T = X(t) \in I$.

Il est digne de remarque que, si l'on remplace la correspondance linéaire considérée, existant entre les espaces $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{R}$, par une correspondance, dite linéairement dépendante de la correspondance en question, définie à l'aide des bases de la forme ku, kv; KU, KV, les k, K étant des constantes non nulles quelconques, les phases α, A ne changent pas et, par conséquent, les fonctions X, x restent les mêmes.

Nous voilà arrivés au résultat suivant:

Étant donnée une correspondance linéaire entre les espaces $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{R}$, il existe des fonctions mutuellement inverses, $T = X(t)$, $t = x(T)$, définies dans certains intervalles $i \subset j$, $I \subset J$, qui jouissent de la propriété que, deux intégrales correspondantes quelconques des équations (a), (A), convenablement normées, $y \in \mathfrak{r}$, $Y \in \mathfrak{R}$, se transforment l'une à l'autre, dans les intervalles i, I, suivant la formule (6). Les fonctions X, x sont définies par la relation $\alpha(t) = A(T)$, α, A étant de convenables phases des équations (a), (A), et satisfont aux équations non linéaires du troisième ordre (b), (B); leurs intervalles de définition, i, I, s'étendent toujours, dans un certain sens du mot, aux extrémités des intervalles j, J, et peuvent se confondre, en cas particuliers, avec ces intervalles j, J

Nous voyons que, dans certaines conditions d'égalité existant entre les quantités c_1, c_2 et C_1, C_2, les fonctions X, x, solutions de l'équation $\alpha(t) = A(T)$, existent dans les intervalles $(i =)\ j$, $(I =)\ J$ entiers, de sorte que les intégrales y, Y se transforment l'une à l'autre, suivant la formule (6), dans toute leur étendue. Nous avons appelé *complètes* les solutions X, x jouissant de la dite propriété et nous avons utilisé la même dénomination pour les transformations des équations (a), (A), réalisées, dans le sens de la formule (6), par les transformations complètes X, x ([2]).

2. Situation de départ.

2. Nous allons rappeler brièvement quelques résultats fondamentaux de la théorie des transformations complètes qui paraissent indispensables en vue de nos considérations ultérieures.

Nous nous bornons au cas des équations (a), (A) de types finis (m), (M) à points conjugués ($m \geq 2$, $M \geq 2$). On sait que, les équations (a), (A) peuvent être transformées complètement, l'une à l'autre, seulement dans le cas d'égalité de leurs types, $M = m$. *Nous supposons*, par conséquent, *dans la suite, la validité de cette relation.* Nous désignons par a_ν, $b_{-\nu}$ et A_ν, $B_{-\nu}(\nu = 1, \ldots, m-1)$ les membres des suites fondamentales de points conjugués des équations (a), (A) et nous avons les formules

$$(a <) \quad b_{-m+1} \leq a_1 < b_{-m+2} \leq \ldots < b_{-1} \leq a_{m-1} \ (< b)$$

$$(A <) \quad B_{-m+1} \leq A_1 < B_{-m+2} \leq \ldots < B_{-1} \leq A_{m-1} \ (< B).$$

Rappelons que les signes $=$ figurant dans les formules de la première (seconde) ligne subsistent ou bien ne subsistent pas tous en même temps; dans le premier cas l'équation (a) $[(A)]$ s'appelle *spéciale*, dans le second on l'appelle *générale* ou encore *non-spe iale.*

D'entre les notions intervennant substantiellement dans la théorie en question nous avons à mentionner la notion de *caractéristiques aux limites des phases des équations* (a), (A), celle de *nombres mutuellement associés ou inverses*, et finalement la notion de *phases des équations* (a), (A) *directement ou inversement applicables l'une à l'autre.* Quant aux définitions respectives nous renvoyons le lecteur au Mémoire cité plus haut.

Ceci étant prélevé, les résultats au sujet de l'existence et la généralité des transformations complètes des équations (a), $(A$ sont les suivants:

Pour que les équations (a), (A) soient complètement transformables l'une à l'autre, il faut et il suffit qu'elles soient toutes les deux générales ou spéciales.

Si cette condition est vérifiée, il existe toujours des solutions complètes constamment croissantes (décroissantes) des équations (b), (B), mutuellement inverses, $X(t)$, $x(T)$, prenant en un nombre $t_0 \in j$ ou bien $T_0 \in J$, choisi arbitrairement, une valeur $T_0 \in J$, $t_0 \in j$ donnée d'avance, qui réalisent la

([2]) O. Borůvka, l. c., p. 230.

transformation en question. Les valeurs T_0, t_0 sont assujeties à la seule condition d'être mutuellement associées (inverses).

On obtient toutes les solutions complètes constamment croissantes (décroissantes), $X(t)$, $x(T)$, en choisissant à volonté une phase de l'équation (A) par exemple, $A(T)$. s'annulant en T_0, et en prenant les différentes phases de l'équation (a), s'annulant en t_0, qui sont directement (inversement) applicables sur A; les solutions en question sont alors données par les formules telles que (5).

Dans le cas des équations (a), (A) générales il existe, en somme, une famille de ∞^1 solutions complètes des équations (b), (B) qui sont constamment croissantes et autant de solutions complètes constamment décroissantes. Si les équations (a), (A) sont spéciales, il existe, en somme, une famille de ∞^2 solutions complètes constamment croissantes et autant de solutions complètes constamment décroissantes.

3. Phases privilégiées.

3. Dans la théorie des solutions complètes des équations (b), (B) interviennent substantiellement, nous venons de le voir, les phases des équations (a), (A). Il paraît utile, par conséquent, d'introduire dans la théorie en question des phases qui soient en quelque sorte privilégiées par les données du problème. Cette idée conduit naturellement à considérer les phases liées aux intégrales des équations (a), (A) s'annulant aux points des suites fondamentales correspondantes.

Nos considérations suivantes à ce sujet se rattachent à l'équation (a) par exemple, dans les suppositions habituelles. Sont à distinguer deux cas suivant qu'il s'agit d'une équation générale ou spéciale, admettant, par conséquent, deux ou bien une seule suite fondamentale de points conjugués.

4. *Cas général.* Dans ce cas on a deux suites fondamentales de points conjugués

$$(a <)\ a_1 < \dots < a_{m-1}\ (< b), \qquad (b >)\ b_{-1} > \dots > b_{-m+1}\ (> a),$$

qui sont différentes l'une de l'autre.

Il existe par conséquent deux systèmes d'intégrales privilégiées de l'équation (a), dont chacun consiste d'intégrales linéairement dépendantes les unes des autres, à savoir le système, (u), formé des intégrales s'annulant aux points a_ν et le système, (v), ayant la même propriété par rapport aux points $b_{-\nu}$ $(\nu = 1, \dots, m-1)$.

Si l'on prend deux intégrales $u \in (u)$, $v \in (v)$ quelconques, à tout arrangement de ces intégrales, u, v, ou bien v, u, correspond un système dénombrable de phases,* (α), $(\bar{\alpha})$. Les phases appartenant au système (α) vont constamment en croissant ou bien en décroissant, tandis que celles du système $(\bar{\alpha})$ vont constamment en décroissant ou bien en croissant, suivant que la quantité $\varepsilon = \operatorname{sgn}(-w)$, $w = uv' - u'v$ étant le wronskien correspondant, résulte $+1$ ou -1.

Nous aurons à considérer, en particulier, les phases $\alpha \in (\alpha)$, $\bar{\alpha} \in (\bar{\alpha})$ s'annulant aux points a_r, b_{-r}; nous choisissons ces points d'entre les a_ν, $b_{-\nu}$ arbitrairement mais une fois pour toute. Les caractéristiques aux limites de ces phases α, $\bar{\alpha}$ sont, évidemment,

$$\omega_r(\varepsilon) = (a_r, \ -r\pi\varepsilon, \ \overline{m - r - \tfrac{1}{2}}\ \pi\varepsilon), \quad \bar{\omega}_r(\varepsilon) = (b_{-r}, \ \overline{m - r - \tfrac{1}{2}}\ \pi\varepsilon, \ -r\pi\varepsilon).$$

Toute phase α à la caractéristique aux limites $\omega_r(\varepsilon)$ prend aux points a_ν, $b_{-\nu}$ les valeurs $-(r-\nu)\pi\varepsilon$, $\left(m - r - \nu - \frac{1}{2}\right)\pi\varepsilon$ et de même, toute phase $\bar{\alpha}$ à la caractéristique aux limites $\bar{\omega}_r(\varepsilon)$ les valeurs $\left(m - r - \nu - \frac{1}{2}\right)\pi\varepsilon$, $-(r-\nu)\pi\varepsilon$; $\nu = 1, \ldots, m-1$. On en voit que les valeurs de deux phases quelconques, α, β, ayant la même caractéristique aux limites $\omega_r(\varepsilon)$ ou $\bar{\omega}_r(\varepsilon)$ diffèrent l'une de l'autre en tout point $t \in j$ de moins de $\frac{\pi}{2}: |\alpha(t) - \beta(t)| < \frac{\pi}{2}$.

On se rend compte facilement que, toutes les phases de l'équation (a) qui ont la même caractéristique aux limites $\omega_r(\varepsilon)$, $\bar{\omega}_r(\varepsilon)$ s'obtiennent de la façon indiquée ci-dessus à l'aide de deux intégrales convenables $u \in (u)$, $v \in (v)$ telles que sgn $(-w) = \varepsilon$.

Les propriétés des phases de l'équation (a) à la même caractéristique aux limites $\omega_r(\varepsilon)$ ou $\bar{\omega}_r(\varepsilon)$ résultent dans ces deux cas parfaitement analogues. Ceci permet de nous borner, dans la règle, aux phases à la caractéristique aux limites $\omega_r(\varepsilon)$ sans indiquer explicitement, dans l'autre cas, les résultats correspondants.

5. Pour aller plus loin, choisissons une fois pous toutes, deux intégrales quelconques $u_0 \in (u)$, $v_0 \in (v)$ assujeties à la seule condition d'avoir leur wronskien, w_0, égale à -1: $-w_0 = 1$. Chaque intégrale $u \in (u)$ a la forme λu_0 et il en est de même pour toute intégrale $v \in (v)$, $v = \mu v_0$, les λ, μ étant des constantes non nulles. Comme le système de phases déterminé par deux intégrales quelconques u, v ne change pas si l'on multiplie ces intégrales par la même constante différente de zéro, d'ailleurs arbiraire, on voit que les différentes phases de l'équation (a) à la caractéristique aux limites $\omega_r(\varepsilon)$ sont précisément celles qui s'annulent au point a_r et se trouvent déterminées par les couples d'intégrales λu_0, v_0 avec $\lambda \neq 0$. On a évidemment $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$ suivant $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$, c'est-à-dire

suivant que la phase correspondante va constamment en croissant ou bien en décroissant.

Pour simplifier l'écriture nous écrivons dans la suite $u, v; w$ au lieu de $u_0, v_0; w_0$ et nous désignons par α_λ la phase à la caractéristique aux limites $\omega, (\varepsilon)$ détérminée par les intégrales $\lambda u, v$. Nous avons alors pour toute valeur $t \in j$ différente de $b_{-\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, m-1)$, la formule $tg\alpha_\lambda = \lambda u : v$.

La correspondance faisant associer aux différents nombres λ $(\neq 0)$ les phases respectives α_λ resulte, évidemment, biunivoque.

Ceci étant prélevé, considérons deux phases différentes quelconques à la même caractéristique aux limites $\omega, (\varepsilon)$: $\alpha_\lambda, \alpha_\mu$. On peut supposer $\lambda < \mu$ de sorte qu'on a $0 < \lambda < \mu$ ou $\lambda < \mu < 0$ suivant que $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$. La fonction $u : v$ étant positive dans chaque intervalle $(j_\nu =)$ $(a_\nu, b_{-m+\nu+1})$, $\nu = 0, \ldots, m-1$; $a_0 = a$, $b_0 = b$, et négative dans chaque intervalle $(j'_\nu =)$ $(b_{-m+\nu+1}, a_{\nu+1})$, $\nu = 0, \ldots, m-2$, on a, dans les deux cas $\varepsilon = \pm 1$, les relations

$$\alpha_\lambda(t) < \alpha_\mu(t) \text{ pour } t \in j_\nu, \quad \alpha_\lambda(t) > \alpha_\mu(t) \text{ pour } t \in j'_\nu.$$

On voit que les phases possèdant la même caractéristique aux limites $\omega, (\varepsilon)$, $\varepsilon = \pm 1$, conservent dans l'intervalle j tout entier leur rapport mutuel en grandeurs, ce qui veut dire ceci: De deux phases différentes quelconques, α_λ, α_μ, à la même caractéristique aux limites $\omega, (\varepsilon)$, l'une d'entre elles, α_μ, à savoir celle qui correspond à la valeur plus grande du paramètre, μ, prend en chaque point $t \in j_\nu$ une valeur supérieure et en chaque point $t \in j'_\nu$ une valeur inférieure à celle de l'autre, α_λ; l'indice ν se rapporte, dans les deux cas, aux valeurs indiquées ci-dessus.

6. Considérons à présent deux nombres arbitraires, λ, μ, tels que $\lambda\mu > 0$ et soient $\alpha_\lambda, \alpha_\mu$ les phases correspondantes ayant la même caractéristique aux limites $\omega, (\varepsilon)$ $(\varepsilon = \pm 1)$. Nous avons vu que les valeurs de ces phases diffèrent l'une de l'autre, en chaque point $t \in j$, de moins de $\frac{\pi}{2}$.

Il paraît utile, en vue de nos futurs besoins, de donner une estimation de la différence $\alpha_\lambda(t) - \alpha_\mu(t)$ en fonction des valeurs λ, μ, indépendamment de t.

Or, nous avons pour toute valeur $t \in j$ différente de $a_\nu, b_{-\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, m-1)$ les formules

$$tg(\alpha_\lambda - \alpha_\mu) = \frac{tg\alpha_\lambda - tg\alpha_\mu}{1 + tg\alpha_\lambda tg\alpha_\mu} = \frac{\lambda - \mu}{\frac{v}{u} + \lambda\mu\frac{u}{v}}.$$

Il en résulte

$$|\alpha_\lambda - \alpha_\mu| \leq tg\,|\alpha_\lambda - \alpha_\mu| = \frac{|\lambda-\mu|}{\left|\frac{v}{u} + \lambda\mu\frac{u}{v}\right|} = \frac{|\lambda - \mu|}{\left(\sqrt{\left|\frac{v}{u}\right.} - \sqrt{\lambda\mu}\sqrt{\left.\frac{u}{v}\right|}\right)^2 + 2\sqrt{\lambda\mu}}$$

d'où on tire

$$|\alpha_\lambda - \alpha_\mu| \leq \frac{|\lambda-\mu|}{2\sqrt{\lambda\mu}} = \frac{1}{2}\left|\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right|; \tag{7}$$

cette formule subsiste, évidemment, pour toute valeur $t \in j$.

On voit que, la valeur μ étant fixée, on a, quelque soit le nombre $\eta > 0$, l'inégalité $|\alpha_\lambda(t) - \alpha_\mu(t)| < \eta$, valable dans l'intervalle j, pour toutes les valeurs λ assez proches au nombre μ.

7. *Cas spécial.* Supposons à présent que l'équation (a) est spéciale de sorte qu'il n'y a qu'une seule suite fondamentale de points conjugués

$$(a <)\ a_1 < \dots < a_{m-1}\ (< b).$$

Dans ce cas il existe un système d'intégrales privilégiées de l'équation (a) formé d'intégrales linéairement dépendantes les unes des autres, à savoir le système, (u), formé des intégrales s'annulant aux points a_ν $(\nu = 1, \dots, m-1)$.

Si l'on prend une intégrale de l'équation (a), v, n'appartenant pas au système (u), et qu'on choisit parmi les points a_ν un point a_r. la phase, α, déterminée par les intégrales u, v et s'annulant au point a_r. possède la caractéristique aux limites

$$\omega_r(\varepsilon) = (a_r, -r\pi\varepsilon,\ m - r\pi\varepsilon);\quad (w = uv' - u'v,\ \ \varepsilon = \operatorname{sgn}(-w))$$

on a encore $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$ suivant que la phase α résulte constamment croissante ou constamment décroissante. Toute phase de l'équation (a) à la caractéristique aux limites $\omega_r(\varepsilon)$ prend aux points a_ν les valeurs $(\nu - r)\pi\varepsilon$; $\nu = 1, \dots, m-1$. On voit que les valeurs de deux phases quelconques, α, β, qui ont la même caractéristique aux limites $\omega_r(\varepsilon)$, diffèrent l'une de l'autre en tout point $t \in j$ de moins de π.

On se rend compte facilement que toutes les phases de l'équation (a) à la caractéristique aux limites $\omega_r(\varepsilon)$, ε étant ± 1, s'obtiennent de la façon indiquée ci-dessus à l'aide de deux intégrales linéairement indépendantes, $u \in (u)$, v, telles que $\operatorname{sgn}(-w) = \varepsilon$.

Choi issons une fois pour toutes deux intégrales linéairement indépendantes de l'équation (a), $u \in (u)$ v, assujeties à la seule condition d'avoir le wronskien, w, égale à -1: $-w = 1$.

On voit facılement que toutes les phases de l'équation (a), α, qui ont la même caractéristique aux limites $\omega, (\varepsilon)$, sont precisément celles déterminées par les couples d'intégrales λu, $\varkappa u + v$ et s'annulant au point a_r. Ici λ $(\neq 0)$, $\varkappa$ désignent d'arbitraires paramètres; on a $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$ suivant le cas $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon =$ 1. Subsiste par conséquent pour toute valeur $t \in j$, à l'exception des zéros de l'intégrale $\varkappa u + v$, la formule: $tg\, \alpha = \lambda u : (\varkappa u + v)$.

Pour chaque valeur $\varkappa$, l'intégrale $\varkappa u + v$ possède dans l'intervalle $(a_\nu,\ a_{+})$ $(\nu - 0, \dots, m-1)$; $a = a$, $a_m = b)$ précisément un zéro, $t_{m+\ +1}$, dans lequel la phase α prend alors la valeur $(\nu - r + \frac{1}{2})\,\pi\varepsilon$. Inversement, si l'on se donne arbitrairement dans l'intervalle j une suite de m nombres mutuellement conjugés, $t_0 > t_1 > \dots > t_{m+1}$, on peut disposer univoquement de la valeur du paramètre $\varkappa$ de manière que, toutes les phases α déterminées par cette valeur $\varkappa$ et par les différentes valeurs $\lambda > 0$ $(\lambda < 0)$ prennent en chaque point $t_{m+\ +1}$ la valeur $(\nu - r + \frac{1}{2})\pi\varepsilon$ avec $\varepsilon = +1$ $(\varepsilon = -1)$. L'ensemble des phases de l'équation (a) qui ont la même caractéristique aux limites $\omega, (\varepsilon)$ consiste par conséquent en une infinité de familles à ∞^1 de phases, chaque famille étant déterminée par une valeur fixe de $\varkappa$ et par les dif érentes valeurs de λ qui sont toujours positives ou toujours négatives. Sans entrer dans les détails, nous nous contentons de remarquer que, les phases de chaque famille en question se comportent d'une manière analogue que les phases dans le cas général à la caractéristique aux limites $\omega, (\varepsilon)$ ou $\omega, (\varepsilon)$ (nos 5,6), les points t_ν, qui sont, bien entendu, en nombre m, jouant le rôle des points de la seconde suite fondamentale.

4. Propriétés des transformations complètes.

8. Pour étudier les propriétés des solutions complètes des équations (b), (B) il suffit, manifestement, de considérer l'une ou l'autre de ces équations, par exemple (b).

Nous savons que les solutions complètes de l'équation (b) dépendent d'un ou deux paramètres suivant que les équations (a), (A) sont générales ou spéciales. Cette dıfférence exerce, naturellement, son influence sur la structure de l'ensemble des solutions complètes en question. En tout cas l'ensemble des solutions complètes de l'équation (b) consiste en deux familles,) $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}$, dont l'une, , est formée des fonctions constamment croissantes, l'autre, , des fonctions constamment décroissantes.

Soit X une solution complète de l'équation (b). D'après la notion même de solution complète, la fonction X se trouve définie dans l'intervalle j et ses valeurs recouvrent l'intervalle J entier.

Soit $t_0 \in j$ un nombre arbitraire et $X_0 \in J$ la valeur correspondante de X. Nous savons qu'il existe de phases des équations (A), (a), soit A, α, qui s'annulent en X_0, t_0 et permettent d'exprimer la fonction X par une formule telle que (5). Les phases en question sont directement ou inversement applicables l'une à l'autre suivant que $X \in \mathfrak{M}$ ou bien $X \in \overline{\mathfrak{M}}$. Se présentent par conséquent les possibilités suivantes:

Pour la valeur t_0 satisfaisant à l'une des relations

$$1.\ t_0 = a_{\nu+1},\quad 2.\ t_0 = b_{-m+\nu+1},\quad 3.\ a_\nu < t_0 < b_{-m+\nu+1},\quad 4.\ b_{-m+\nu+1} < t_0 < a_{\nu+1}$$

on a, dans le cas $X \in \mathfrak{M}$, les relations

$$1.\ X_0 = A_{\nu+1},\quad 2.\ X_0 = B_{-m+\nu+1},\quad 3.\ A_\nu < X_0 < B_{-m+\nu+1},$$
$$4.\ B_{-m+\nu+1} < X_0 < A_{\nu+1}$$

et de même, si $X \in \mathfrak{M}$, les relations

$$1.\ X_0 = B_{-\nu-1},\quad 2.\ X_0 = A_{m-\nu-1},\quad 3.\ A_{m-\nu-1} < X_0 < B_{-\nu},$$
$$4.\ B_{-\nu-1} < X_0 < A_{m-\nu-1}.$$

Si les équations (a), (A) sont spéciales on applique ces formules en posant $b_{-m+\nu+1} = a_{\nu+1}$, $B_{-m+\nu+1} = A_{\nu+1}$ $(\nu = 0, \ldots, m-2)$.

Dans la suite nous allons distinguer deux cas suivant que les équations (a), (A) sont générales ou bien spéciales.

9. *Cas général.* Les relations précédentes mettent en évidence que toute fonction $X \in \mathfrak{M}$ passe par les $2(m-1)$ points fixes (a_ν, A_ν), $(b_{-\nu}, B_{-\nu})$ et de même toute fonction $X \in \overline{\mathfrak{M}}$ par les $2(m-1)$ points fixes $(a_\nu, B_{-\nu})$, $(b_{-\nu}, A_\nu)$; $\nu = 1, \ldots, m-1$.

On voit aussi que, les courbes représentées par les différentes fonctions $X \in \mathfrak{M}$ se trouvent situées dans le domaine, D, formé des points fixes en question et des domaines rectangulaires

$$(a_\nu, b_{-m+\nu+1}) \times (A_\nu, B_{-m+\nu+1}),\quad (b_{-m+\nu+1}, a_{\nu+1}) \times (B_{-m+\nu+1}, A_{\nu+1}),$$

et de même, les courbes représentées par les différentes fonctions $X \in \mathfrak{M}$ se trouvent situées dans le domaine, D, formé des points fixes mentionnés ci-dessus et des domaines rectangulaires

$$(a_\nu,\ b_{-m+\nu+1}) \times (A_{m-\nu-1},\ B_{-\nu}), \qquad b_{m+\nu+1},\ a_{\nu+1}) \times (B_{-\nu-1},\ A_{m-\nu-1}).$$

On se rend compte facilement que les domaines D, D se trouvent remplis par les courbes correspondantes entièrement.

10. Pour aller plus loin, nous choisissons une fois pour toutes deux intégrales quelconques de l'équation (A), U, V, qui s'annulent aux points A_ν, $B_{-\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, m-1)$ et dont le wronskien, W, égale à -1: $-W = 1$. Soit A la phase des intégrales U, V qui s'annule au point A_r, ce point étant choisi d'entre les points A_ν arbitrairement. La caractéristique aux limites de la phase A, $\Omega_r(1)$, résulte par conséquent $\Omega_r(1) = (A_r, -r\pi, \overline{m - r - \frac{1}{2}}\,\pi)$.

Soit alors X une solution complète de l'équation (b). Nous savons qu'il existe une phase de l'équation (a), directement ou inversement applicable sur A, suivant que $X \in \mathfrak{M}$ ou bien $X \in \mathfrak{M}$, et cette phase est identique à la fonction $A[X(t)]$. Or, la phase en question ayant sa caractéristique aux limites égale à $\omega_r(1) = (a_r, -r\pi,\ m - r - \frac{1}{2}\,\pi)$ ou bien $\omega_r(1) = (b_{-r}, \overline{m - r - \frac{1}{2}}\,\pi, -r\pi)$, elle s'obtient à l'aide de deux intégrales u, v ou bien v, u telles que nous les avons considérées au nº 5, et se trouve déterminée par un nombre $\lambda > 0$; nous désignons la phase en question, conformément aux notations employées au nº 5, α_λ ou bien α_λ. Nous avons par conséquent pour $t \in j$ les relations respectives

$$A[X(t)] = \alpha_\lambda(t), \quad A[X(t)] = \bar{\alpha}_\lambda(t),$$

$$\frac{U[X(t)]}{V[X(t)]} = \lambda \frac{u(t)}{v(t)}, \quad \frac{U[X(t)]}{V[X(t)]} = \lambda \frac{v(t)}{u(t)},$$

où l'on suppose, au besoin, $t \neq b_{-1}, \ldots, b_{-m+1}$, $t \neq a_1, \ldots, a_{m-1}$.

Soit par exemple $X \in \mathfrak{M}$. La relation respective en seconde ligne ci-dessus conduit par différentiation, suivie au cas de besoin de multiplication des intégrales u, v par -1, aux formules

(8)
$$\frac{U[X(t)]}{\sqrt{X'(t)}} = \sqrt{\lambda}\, u(t),$$

$$\frac{V[X(t)]}{\sqrt{X(t)}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} v(t),$$

qui donnent à leur tour les relations

$$X'(t) = \frac{1}{\lambda}\frac{U^2[X(t)]}{u^2(t)} = \lambda \frac{V^2[X(t)]}{v^2(t)}.$$

Il en résulte la valeur de λ:

$$\lambda = X'(a_\nu)\frac{v^2(a_\nu)}{V^2(A_\nu)} = \frac{1}{X'(b_{-\nu})}\frac{U^2(B_{-\nu})}{u^2(b_{-\nu})}. \tag{9}$$

$$(\nu = 1, \dots, m-1).$$

Dans le cas $X \in \overline{\mathfrak{M}}$ on obtient les formules analogues:

$$\frac{U[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}} = \sqrt{\lambda}\, v(t), \qquad \frac{V[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} u(t), \tag{8}$$

$$\lambda = |X'(b_{-\nu})| \frac{u^2(b_{-\nu})}{V^2(A_\nu)} = \frac{1}{X'(a_\nu)}\frac{U^2(B_{-\nu})}{v^2(a_\nu)}, \tag{9}$$

$$(\nu = 1, \dots, m-1).$$

11. Considérons par exemple l'ensemble $\mathfrak{M}$.

Associons à tout élément $X \in \mathfrak{M}$ le nombre $\lambda\,(>0)$ réalisant les relations (8) et donné par conséquent par la formule (9). Nous obtenons une représentation, $\boldsymbol{a}$, de l'ensemble $\mathfrak{M}$ sur l'ensemble des nombres positifs. Cette représentation résulte évidemment biunivoque.

Soient $X, Y \in \mathfrak{M}$ deux éléments quelconques et $\lambda, \mu\,(>0)$ leurs images dans la représentation $\boldsymbol{a}$. Soit par exemple $\lambda < \mu$.

Nous avons les formules

$$A[X(t)] = \alpha_\lambda(t), \quad A[Y(t)] = \alpha\ (t)$$

et par conséquent

$$A[X(t)] - A[Y(t)] = \alpha_\lambda(t) - \alpha_\mu(t).$$

Cette relation entraîne pour chaque valeur $t \in j$:

$$X(t) - Y(t) = \{U^2(T) + V^2(T)\}\{\alpha_\lambda(t) - \alpha_\mu(t)\}, \tag{10}$$

T étant une quantité située entre les valeurs $X(t)$, $Y(t)$.

Or, comme les phases α_λ, α_μ conservent dans l'intervalle j leur rapport mutuel en grandeurs (nº 5), la formule (10) entraîne que la même propriété a lieu pour les fonctions X, Y.

Par conséquent l'ensemble $\mathfrak{M}$ peut être ordonné de manière que, pour $X, Y \in \mathfrak{M}$ la relation $X < Y$ équivaut à l'inégalité $X(t) < Y(t)$ pour $t \in j_\nu$ et $X(t) > Y(t)$ pour $t \in j'_\nu$; ici j_ν, j'_ν représentent les intervalles considérés au nº 5 ($\nu = 0, \dots, m-1$).

Avec cette loi d'ordination de l'ensemble $\mathfrak{M}$, la correspondance $\boldsymbol{a}$ réalise une application conforme sur l'ensemble des nombres positifs ordonnés par valeurs croissantes. L'ensemble $\mathfrak{M}$ résulte par conséquent semblable à l'ensemble des nombres positif ordonnés par valeurs croissantes.

Il suit de là qu'il y a dans l'ensemble $\mathfrak{M}$ des sousensembles dénombrables qui sont denses en $\mathfrak{M}$. Ainsi par exemple le sousensemble $\mathfrak{M}^*$ formé des fonctions $X \in \mathfrak{M}$, associées dans la correspondance $\boldsymbol{a}$ aux nombres rationnels positifs, jouit de la propriété en question.

12. Supposons à présent que chaque intégrale de l'équation (A) est bornée.

L'équation (A) étant de type fini, la supposition en question entraîne que l'intervalle J lui-même est borné. On peut donc introduire dans l'ensemble $\mathfrak{M}$ une métrique en définissant la distance de deux éléments $X, Y \in \mathfrak{M}$ par la formule

$$d(X,\ Y) = \sup_{t \in j} |\ X(t) - Y(t)\ | \,.$$

En se servant des formules (10), (7) on obtient pour deux éléments arbitraires $X, Y \in \mathfrak{M}$ et leurs homologues $\boldsymbol{a}X = \lambda$, $\boldsymbol{a}Y = \mu$, l'inégalité

$$d(X,\ Y) \leq C \left|\ \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\ \right|, \tag{11}$$

C étant une constante positive qui ne dépend pas du choix particulier des éléments X, Y. Cette formule entraîne, évidemment, la continuité de la fonction $\boldsymbol{a}^{-1}$.

Nous avons vu (nº 11) qu'il existe dans l'ensemble $\mathfrak{M}$ des sousensembles dénombrables qui sont denses en $\mathfrak{M}$, par exemple le sousensemble $\mathfrak{M}^*$ mentionné ci-dessus. La fonction $\boldsymbol{a}^{-1}$ étant continue, nous voyons que toute fonction $X \in \mathfrak{M}$ peut être approchée dans l'intervalle j par une fonction $X^* \in \mathfrak{M}^*$ avec une approximation η (> 0) donnée arbitrairement: $|\ X(t) - X^*(t)\ | < \eta$ pour $t \in j$.

13. Remarquons qu'on a des résultats analogues en ce qui concerne l'ensemble $\mathcal{M}$.

Nous pouvons donc résumer les résultats précédents au sujet des transformations complètes de l'équation (*b*) dans le cas général:

Si les équations (*a*), (*A*) *sont générales, il existe, en somme, une famille de* ∞^1 *solutions complètes de l'équation* (*b*) *constamment croissantes,* $\mathcal{M}$, *et de même une famille de* ∞^1 *solutions complètes qui sont constamment décroissantes,* $\mathcal{M}$.

Toute fonction $X \in \mathcal{M}$ *passe par les* $2(m-1)$ *points fixes* (a_ν, A_ν), $(b_{-\nu}, B_{-\nu})$ *et toute fonction* $X \in \mathcal{M}$ *par les points* $(a_\nu, B_{-\nu})$, $(b_{-\nu}, A_\nu)$; $\nu = 1, \ldots, m-1$. *Les courbes représentées par les différentes fonctions* $X \in \mathcal{M}$, $X \in \mathcal{M}$ *se trouvent situées dans les domaines* D, $\bar{D}$ *indiqués au n° 9 et recouvrent ces domaines entièrement.*

Chaque ensemble $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ *admet une loi d'ordination à l'aide de valeurs de ses éléments de telle façon qu'il résulte semblable à l'ensemble des nombres positifs ordonnés par valeurs croissantes. Il y a par conséquent dans ces ensembles de sousensembles dénombrables qui sont denses en eux. Si toutes les intégrales de l'équation* (*A*) *sont bornées, chaque fonction* $X \in \mathcal{M}$ *ou* $X \in \mathcal{M}$ *peut être approchée dans l'intervalle* j *par des éléments d'un sousensemble dénombrable en question avec une approximation arbitrairement donnée.*

14. *Cas spécial.* Dans le cas spécial l'étude des propriétés des solutions complètes de l'équation (*b*) peut être traitée encore par les méthodes développées ci-dessus. Nous nous bornons à énoncer les résultats.

Si les équations (*a*), (*A*) *sont spéciales, il existe, en somme, une famille de* ∞^2 *solutions complètes de l'équation* (*b*) *constamment croissantes,* $\mathcal{M}$, *et une famille de la même généralité des sotutions complètes constamment décroissantes,* $\mathcal{M}$.

Toute fonction $X \in \mathcal{M}$ *passe par les* $m-1$ *points fixes* (a_ν, A_ν) *et toute fonction* $X \in \mathcal{M}$ *par les points* $(a_\nu\ A_{m-\nu})$; $\nu = 1, \ldots, m-1$. *Les courbes représentées par les différentes fonctions* $X \in \mathcal{M}$, $X \in \overline{\mathcal{M}}$ *se trouvent situées dans les domaines* D, D *et recouvrent ces domaines entièrement; le domaine* D *se compose des points* (a_ν, A_ν) *et des domaines rectangulaires* $(a_\nu, a_{\nu+1}) \times \times (A_\nu, A_{\nu+1})$, *le domaine* D *à son tour est formé des points* $(a_\nu, A_{m-\nu})$ *et des domaines rectangulaires* $(a_\nu, a_{\nu+1}) \times (A_{m-\nu-1}, A_{m-\nu})$ $(\nu = 0, \ldots, m-1;\ a_0 = a,\ a_m = b,\ A_0 = A,\ A_m = B)$.

Si l'on se donne arbitrairement deux suites à m *points mutuellement conjugués, l'une,* $T_0 > T_{-1} > \ldots > T_{-m+1}$, *par rapport à l'équation* (*A*), *l'autre,* $t_0 > t_{-1} > \ldots > t_{-m+1}$, *par rapport à* (*a*), *il existe dans l'ensemble* $\mathcal{M}$ *précisément une famille de* ∞^1 *éléments,* $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$, *telle, que toute fonction* $X \in \mathcal{M}'$ *passe, en outre des* $m-1$ *points* (a_ν, A_ν) *mentionnés, par les* m *points*

$(t_{-\mu}, T_{-\mu})$; *de même il existe dans l'ensemble* $\overline{\mathfrak{M}}$ *précisément une famille de* ∞^1 *éléments,* $\overline{\mathfrak{M}}' \subset \overline{\mathfrak{M}}$, *cette famille jouissant de la propriété que toute fonction* $X \in \mathfrak{M}'$ *passe par les* $2m-1$ *points* $(a_\nu, A_{m-\nu})$, $(t_{-\mu}, T_{-m+\mu+1})$; $\mu=0, \ldots, m-1$. *Les courbes représentées par les différentes fonctions* $X \in \mathfrak{M}'$, $X \in \overline{\mathfrak{M}}'$ *recouvrent sans lacunes les domaines* D', $\overline{D}'$: *Le domaine* D' *consiste en* $2m-1$ *points mentionnés* (a_ν, A_ν), $(t_{-\mu}, T_{-\mu})$ *et en* $2m$ *domaines rectangulaires* $(a_\mu, t_{-m+\mu+1}) \times (A_\mu, T_{-m+\mu+1})$, $(t_{-m+\mu+1}, a_{\mu+1}) \times (T_{-m+\mu+1}, A_{\mu+1})$, *celui,* $\overline{D}'$, *est formé d'autant de points* $(a_\nu, A_{m-\nu})$, $(t_{-\mu}, (T_{-m+\mu+1})$ *et de domaines rectangulaires* $(a_\mu, t_{-m+\mu+1}) \times (T_{-\mu}, A_{m-\mu})$, $(t_{-m+\mu+1}, a_{\mu+1}) \times (A_{m-\mu-1}, T_{-\mu})$.

La structure de chaque famille $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}'$ *est analogue à celle de l'ensemble des solutions complètes constamment croissantes ou constamment décroissantes de l'équation* (b) *dans le cas général* (n^o 13), *les suites* $\{T_{-\mu}\}$, $\{t_{-\mu}\}$ *jouant le rôle des suites fondamentales de points conjugués* $\{B_{-\nu}\}$, $\{b_{-\nu}\}$.