Otakar Borůvka

Über einige Ergebnisse aus der Theorie der linearen Differentialtransformationen 2. Ordnung

Heft 13 der Schriftenreihe der Institute für Mathematik. Bericht von der Dirichlet-Tagung, Akademie-Verlag Berlin, 1963, 51-57

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500100

Über einige Ergebnisse aus der Theorie der linearen Differentialtransformationen 2. Ordnung

Von O. Borůvka (Brno)

1. Dieser Vortrag enthält einen Bericht über einige Ergebnisse aus der Transformationstheorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Es geht dabei um Betrachtungen im reellen Gebiet und von globalem Charakter.

Wir betrachten zwei lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$y'' = q(t)\, y\,, \tag{a}$$

$$Y'' = Q(T) Y\;; \tag{A}$$

die Funktion q bzw. Q wird in einem offenen Intervall $j = (a, b)$ bzw. $J = (A, B)$ definiert und als stetig vorausgesetzt. Auch die Fälle $a, A = -\infty$, $b, B = +\infty$ werden zugelassen.

Den Ausgangspunkt der erwähnten Transformationstheorie bildet das folgende bereits von E. E. Kummer im Jahre 1834 behandelte Problem:

Zu einer Lösung Y z.B. der Differentialgleichung (A) sollen zwei Funktionen $X(t)$, $w(t)$ so bestimmt werden, daß die Funktion

$$y(t) = w(t)\; Y[X(t)]$$

eine Lösung der anderen Differentialgleichung (a) darstellt.

Es handelt sich also um Transformationen von Lösungen der betrachteten Differentialgleichungen, oder, wie wir es auch kurz ausdrücken, um Transformationen der beiden Differentialgleichungen ineinander.

Einleitend wollen wir an einige Begriffe aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung erinnern.

Unter einem *Integral* z.B. der Differentialgleichung (a) versteht man eine im ganzen Intervall j definierte und von der identisch verschwindenden Funktion verschiedene Lösung dieser Differentialgleichung.

Ist u, v ein geordnetes Paar von linear unabhängigen Integralen der Differentialgleichung (a), so versteht man unter einer *Phase* dieses Paares eine im Intervall j stetige und mit Ausnahme der Nullstellen von v überall der Beziehung

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{u(t)}{v(t)}$$

genügende Funktion α. Es ist leicht einzusehen, daß es eine abzählbare Menge von solchen Phasen gibt, wobei sich die einzelnen Phasen um ganzzahlige Vielfache der Zahl π voneinander unterscheiden. Kürzer spricht man von einer Phase von Integralen u, v der Differentialgleichung (a). Jede Phase ist eine stets wachsende oder stets abnehmende Funktion.

Unter einer Phase der Differentialgleichung (a) versteht man eine Phase von irgendwelchen linear unabhängigen Integralen dieser Differentialgleichung.

Wir wollen nun zu dem Kummerschen Transformationsproblem zurückkehren. Die auf seine Lösung hinzielenden Überlegungen führen zu den folgenden nicht-linearen Differentialgleichungen 3. Ordnung:

$$-\{X, t\} + Q(X)\,X'^2 = q(t)\,, \tag{b}$$

$$-\{x, T\} + q(x)\,\dot{x}^2 = Q(T)\,, \tag{B}$$

wobei die $\{X, t\}$, $\{x, T\}$ die Schwarzschen Ableitungen der Funktionen X, x im Punkt t, T bedeuten, also

$$\{X, t\} - \frac{1}{2}\,\frac{X'''(t)}{X'(t)} - \frac{3}{4}\,\frac{X''^2(t)}{X'^2(t)}\,, \qquad \{x, T\} = \frac{1}{2}\,\frac{\dddot{x}(T)}{\dot{x}(T)} - \frac{3}{4}\,\frac{\ddot{x}^2(T)}{\dot{x}^2(T)}\,.$$

Wenn die beiden Gleichungen (a), (A) zusammenfallen, wenn also $j = J$ und $q = Q$ ist, so fallen auch die beiden Gleichungen (b), (B) in die einzige Gleichung

$$-\{X, t\} + q(X)\,X'^2 = q(t) \tag{$\bar{\text{b}}$}$$

zusammen.

Die Analyse der Differentialgleichungen (b), (B) bzw. ($\bar{\text{b}}$) bildet den eigentlichen Kern der betrachteten Transformationstheorie.

Zunächst wollen wir die grundlegenden Resultate, die für die folgenden Ausführungen von Bedeutung sind, übersichtlich anführen [1].

1. Jede in einem Teilintervall von j definierte Lösung $X(t)$ der Differentialgleichung (b) ist eine stets wachsende oder stets abnehmende Funktion, so daß es zu ihr immer eine inverse Funktion $x(T)$ gibt. Diese letztere stellt eine Lösung der Differentialgleichung (B) dar.

2. Für jede Lösung Y von (A) und jede Lösung X von (b) stellt die Funktion

$$y(t) = \frac{Y[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}} \tag{1}$$

eine Lösung von (a) dar, und gleichzeitig gilt die inverse Beziehung

$$Y(T) = \frac{y[x(T)]}{\sqrt{|\dot{x}(T)|}}\,. \tag{1'}$$

Diese beiden Formeln können durch die einzige Formel

$$\sqrt[4]{|X'(t)|} \cdot y(t) = \sqrt[4]{|\dot{x}[X(t)]|} \cdot Y[X(t)]$$

oder

$$\sqrt[4]{|X'[x(T)]|} \cdot y[x(T)] = \sqrt[4]{\dot{x}|(T)|} \cdot Y(T)$$

ersetzt werden.

3. Grundlegend ist das folgende Existenz- und Eindeutigkeitstheorem für Lösungen der Differentialgleichung (b):

Es seien $t_0 \in j$, $X_0'(\neq 0)$, X_0'' beliebige Zahlen. Sodann gibt es eine in einem gewissen Intervall $i \subset j$ definierte und den Cauchyschen Anfangsbedingungen

$$X(t_0) = X_0\,, \quad X'(t_0) = X_0'\,, \quad X''(t_0) = X_0'' \tag{2}$$

genügende „breiteste" Lösung X der Differentialgleichung (b). Diese Lösung ist in dem Sinn die breiteste, daß jede andere den Anfangsbedingungen (2) genügende Lösung von (b) eine Teilfunktion von X darstellt.

4. Die breiteste Lösung X ist durch eine Identität der Form

$$\alpha(t) = A[X(t)] \tag{3}$$

bestimmt, wobei α eine beliebige in t_0 verschwindende Phase der Differentialgleichung (a) und A eine geeignete in X_0 verschwindende Phase von (A) bedeutet. Man hat also die folgende explizite Form von $X(t)$ bzw. $x(T)$:

$$X(t) = A^{-1}[\alpha(t)]\,,\ x(T) = \alpha^{-1}[A(T)]\,. \tag{3'}$$

Auf diese Weise erhält man genau alle breitesten Lösungen von (b) bzw. (B).

2. Nun wollen wir zu dem eigentlichen Problem, über das wir in diesem Vortrag berichten möchten, übergehen.

Den Ausgangspunkt dazu bildet das oben angeführte Existenz- und Eindeutigkeitstheorem für Lösungen der Differentialgleichung (b). Das darin erwähnte Definitionsintervall i der breitesten Lösung X braucht keinesfalls mit dem Intervall j zusammenzufallen, und ebenso bedecken die Werte dieser Lösung im allgemeinen das Intervall J nicht ganz. Damit hängt ersichtlich zusammen, daß sich die Transformationsformeln (1), (1′) nicht auf ganze Integrale y, Y, sondern nur auf bestimmte in gewissen Teilintervallen von j, J definierte Lösungen der Differentialgleichungen (a), (A) beziehen. Diese Bemerkung führt zu dem folgenden Problem [2]:

Unter welchen Umständen gibt es Lösungen der Differentialgleichung (b), *die im ganzen Intervall j definiert sind und deren Werte das Intervall J genau bedecken? Was ist die Gesamtheit dieser Lösungen X? Was kann von den Eigenschaften dieser Funktionen erforscht werden?*

Wir nennen die Lösungen X der eben beschriebenen Art *vollständig*. Dementsprechend bezeichnen wir die nach den Formeln (1), (1′) mittels einer vollständigen Lösung X der Differentialgleichung (b) bzw. ihrer inversen Funktion x realisierten Transformationen von Integralen der Differentialgleichungen (a), (A) als vollständig. In diesem Sinn sprechen wir auch von vollständigen Transformationen der Differentialgleichungen (a), (A) ineinander.

Durch vollständige Transformationen werden also Integrale der Differentialgleichungen (a), (A) in ihrem ganzen Verlauf ineinander überführt. Man sieht leicht, daß jede vollständige Lösung der Differentialgleichung (b) eine topologische Abbildung des Intervalls j auf das Intervall J darstellt, wobei je zwei zueinander im bezug auf die Differentialgleichung (a) konjugierte Punkte auf zwei zueinander konjugierte Punkte im bezug auf die Differentialgleichung (A) abgebildet werden.

Eine erste Idee zur Lösung dieses Problems kommt bei der Betrachtung der Formel (3). In der Tat, es ist leicht einzusehen, daß die durch diese Gleichung definierte Lösung X der Differentialgleichung (b) genau dann vollständig ist, wenn die folgenden Beziehungen bestehen:

$$\lim_{t\to a+} \alpha(t) = \lim_{T\to A+} A(T)\,,\quad \lim_{t\to b-} \alpha(t) = \lim_{T\to B-} A(T)$$

oder

$$\lim_{t\to a+} \alpha(t) = \lim_{T\to B-} A(T)\,,\quad \lim_{t\to b-} a(t) = \lim_{T\to A+} A(T)\,.$$

Diese Idee, deren Durchführung eine tiefgreifende Analyse der Eigenschaften von Phasen der Differentialgleichungen (a), (A) erfordert, führt tatsächlich zu erwünschten Resultaten.

Bei der Besprechung dieser Resultate werden wir uns im wesentlichen auf die sogenannten Differentialgleichungen von endlichen Typen mit konjugierten Punkten beschränken.

Die Differentialgleichung (a) wird *vom Typus* (m) genannt, wobei m eine natürliche Zahl ist, wenn sie Integrale mit m Nullstellen, nicht aber solche mit $m + 1$ Nullstellen im Intervall j zuläßt.

Der in Betracht kommende Fall ist also der, daß die Differentialgleichungen (a), (A) Integrale mit nur endlich vielen, aber mindestens zwei Nullstellen in den Intervallen j, J zulassen.

Die in diesem Fall zur Lösung unseres Problems angewandten Methoden sind jedoch auch für Differentialgleichungen (a), (A) aller übrigen Typen anwendbar.

Wir setzen also im folgenden die Differentialgleichung (a) als vom Typus (m) voraus, wobei $m \geqq 2$ ist.

In diesem Fall gibt es im Intervall j zwei ausgezeichnete Zahlen a_1, b_{-1}, die auf folgende Weise definiert sind:

Die Zahl a_1 ist die untere Grenze der Menge aller im Intervall j liegenden Zahlen, zu denen es wenigstens eine linksseitig konjugierte Zahl gibt. Analog ist die Zahl b_{-1} die obere Grenze der Menge aller im Intervall j liegenden Zahlen, zu denen wenigstens eine rechtsseitig konjugierte Zahl existiert.

Man zeigt leicht, daß es zu a_1 im Intervall j genau $m - 2$ rechtsseitig konjugierte Zahlen gibt. Die Zahl a_1 und diese $m - 2$ Zahlen nennen wir die *linksseitigen Grundzahlen* der Differentialgleichung (a). Wir wollen dieselben in einer wachsenden Folge $a_1 < a_2 < \cdots < a_{m-1}$ anordnen.

Analog gibt es zu b_{-1} im Intervall j genau $m - 2$ linksseitig konjugierte Zahlen. Die Zahl b_{-1} und diese $m - 2$ Zahlen nennen wir die *rechtsseitigen Grundzahlen* der Differentialgleichung (a). Wir ordnen dieselben in abnehmender Folge

$$b_{-1} > b_{-2} > \cdots > b_{-m+1}.$$

Unter den links- und rechtsseitigen Grundzahlen a_ν und $b_{-\nu}$ bestehen die folgenden Beziehungen:

$$(a <)\, b_{-m+1} \leqq a_1 < b_{-m+2} \leqq a_2 < \cdots < b_{-2} \leqq a_{m-2} < b_{-1} \leqq a_{m-1} \quad (< b),$$

wobei entweder keines der angeführten Gleichheitszeichen gilt oder alle zugleich.

Es sind also zwei Fälle zu unterscheiden:

Der erste Fall tritt genau dann ein, wenn die beiden Zahlen a_1, b_{-1} nicht zueinander konjugiert sind. Sodann sind die links- und rechtsseitigen Grundzahlen der Differentialgleichung (a) sämtlich voneinander verschieden. In diesem Fall wird die Differentialgleichung (a) als *allgemein* oder *nicht-speziell* bezeichnet.

Der zweite Fall tritt dann ein, wenn die Zahlen a_1, b_{-1} zueinander konjugiert sind. Sodann fallen die links- und rechtsseitigen Grundzahlen der Differentialgleichung (a) zusammen, nach den Formeln: $b_{-m+\nu} = a_\nu$. In diesem Fall wird die Differentialgleichung (a) *speziell* genannt.

Mit diesen Begriffen sind wir im Stande, die Lösung des obigen Problems zu geben. Für die links- bzw. rechtsseitigen Grundzahlen der Differentialgleichung (a) wollen wir die Bezeichnung a_ν und $b_{-\nu}$ beibehalten; für diejenigen der Differentialgleichung (A) wenden wir die analoge Bezeichnung A_ν und $B_{-\nu}$ an.

Die Resultate sind folgende:

Zwei Differentialgleichungen (a), (A) von endlichen Typen mit konjugierten Punkten können genau dann ineinander vollständig transformiert werden, wenn sie beide von demselben Typus und beide allgemein oder beide speziell sind.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so gibt es immer wachsende sowie auch abnehmende vollständige Lösungen X der Differentialgleichung (b), die in einem gegebenen Punkt $t_0 \in j$ einen beliebig gegebenen Anfangswert $X_0 \in J$ annehmen, vorausgesetzt, daß dieser letztere gewissen Bedingungen entspricht. Insbesondere hat jede wachsende vollständige Lösung der Differentialgleichung (b) in den Grundzahlen $b_{-\nu}$, a_ν die Werte $B_{-\nu}$ bzw. A_ν, und jede abnehmende vollständige Lösung die Werte A_ν bzw. $B_{-\nu}$.

Die vollständigen Lösungen der Differentialgleichung (b) sind durch Formeln der Art (3′) gegeben.

Wenn die Differentialgleichungen (a), (A) allgemein sind, so gibt es genau eine Schar von ∞^1 wachsenden vollständigen Lösungen der Differentialgleichung (b) und ebensoviele abnehmende vollständige Lösungen. Wenn aber die Differentialgleichungen (a), (A) speziell sind, so gibt es genau eine Schar von ∞^2 wachsenden bzw. abnehmenden vollständigen Lösungen.

Die obigen Resultate können unmittelbar auf vollständige Transformationen einer Differentialgleichung (a) in sich angewandt werden. Eine Differentialgleichung (a) von einem endlichen Typus mit konjugierten Punkten läßt also stets vollständige Transformationen in sich zu. Doch gibt es in diesem Fall etwas wesentlich Neues: Die vollständigen Lösungen der Differentialgleichung $(\overline{\text{b}})$ bilden stets eine stetige Gruppe $\mathfrak{G}$. Je nachdem die Differentialgleichung (a) allgemein oder speziell ist, hängt die Gruppe $\mathfrak{G}$ von einem oder von zwei Parametern ab.

Hinsichtlich der Eigenschaften der Gruppe $\mathfrak{G}$ wollen wir einiges nur für den Fall einer *allgemeinen* Differentialgleichung (a) hervorheben:

Wenn die Differentialgleichung (a) allgemein ist, so stellt $\mathfrak{G}$ eine einparametrige Gruppe dar. Die wachsenden vollständigen Lösungen der Differentialgleichung $(\overline{\text{b}})$ bilden eine Untergruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$, wobei der Index $\mathfrak{G}:\mathfrak{A}$ gleich zwei ist. Die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ besteht also aus zwei Nebenklassen, von denen eine die Menge der wachsenden und die andere die Menge der abnehmenden vollständigen Lösungen der Differentialgleichung $(\overline{\text{b}})$ darstellt. Wenn die Integrale der Differentialgleichung (a) sämtlich beschränkt sind, was natürlich nur für endliche Intervalle j in Frage kommt, so gibt es in $\mathfrak{A}$ eine abzählbare Untergruppe der Art, daß jede wachsende vollständige Lösung von $(\overline{\text{b}})$ durch Elemente dieser Untergruppe mit beliebiger Genauigkeit gleichmäßig approximiert werden kann. Ein ähnliches Resultat besteht auch für abnehmende vollständige Lösungen der Differentialgleichung $(\overline{\text{b}})$.

Bei dieser Gelegenheit wollen wir noch einige Worte sagen über Transformationen in sich solcher Differentialgleichungen (a), deren Integrale gegen die Endpunkte des Intervalls j unendlich viele Nullstellen besitzen. Es geht also jetzt um Differentialgleichungen (a) von einem *unendlichen* Typus. Über Transformationen solcher Differentialgleichungen in sich ist eine umfangreiche Theorie, die im wesentlichen eine Analyse der Differentialgleichung $(\overline{\text{b}})$ unter den neuen Voraussetzungen darstellt, aufgestellt worden [3]. Es zeigt sich, daß in diesem Fall die Gruppe $\mathfrak{G}$ der vollständigen Lösungen der Differentialgleichung $(\bar{b})$ von drei Parametern abhängt. Die algebraische Struktur der Gruppe $\mathfrak{G}$ kann weitgehend erforscht werden. Insbesondere bilden die wachsenden vollständigen Lösungen von (b) eine in $\mathfrak{G}$ invariante Untergruppe. Dieselbe besitzt ihrerseits ein abzählbares Zentrum, das von den sogenannten Zentraldispersionen erster Art der Differentialgleichung (a): $\ldots, \varphi_{-2}(t), \varphi_{-1}(t), \varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots$ gebildet wird. Wir bemerken, daß der Wert der Funktion φ_{-1} bzw. φ_1 in einem beliebigen Punkt $t \in j$ durch die ν-te zu diesem Punkt linksseitig bzw. rechtsseitig konjugierte Zahl gegeben ist ($\nu = 1, 2, \ldots$; $\varphi_0(t) = t$).

Im Zusammenhang mit der obigen Transformationstheorie begegnet man zahlreichen Problemen, insbesondere auch über lineare Differentialgleichungen höherer Ordnungen, die vermöge der in dieser Theorie entwickelten Begriffe und Methoden mit Erfolg gelöst werden können. Solche Probleme sind insbesondere in den letzten Jahrgängen des Czech. Math. Journ. betrachtet worden. In dieser Hinsicht wurden namentlich Fragen nach der Bestimmung aller Differentialgleichungen (a), deren Integrale gewisse im voraus gegebene Eigenschaften besitzen, behandelt. Von dieser Art sind z.B. die Resultate über Differentialgleichungen (a) eines beliebig gegebenen Typus [4], ferner über solche, deren Integrale äquidistante Nullstellen besitzen [5], u.a. Speziell wollen wir die Auffindung aller Differentialgleichungen (a), die Paare von linear unabhängigen Integralen u, v mit gemeinsamen Nullstellen der Produkte $u\,u'$, $v\,v'$ zulassen, erwähnen [6]. Die Lösung dieses schwierigen Problems konnte auf Grund älterer Resultate von J. Radon über konvexe Kurven gefunden werden [7].

3. Es sei (unter entsprechenden Annahmen über die Funktion q) $q_1(t) = q(t) + |q(t)|^{1/2} (|q(t)|^{-1/2})''$. Ist y ein Integral der Differentialgleichung (a), so stellt die Funktion $y_1(t) = y'(t) : \sqrt{|q(t)|}$ ein solches der Differentialgleichung (a_1) dar: $y'' = q_1(t)\, y$ [1]. Analoges gilt von den entsprechenden Funktionen $Q(T)$, $Q_1(T)$, $Y(T)$, $Y_1(T)$ im bezug auf die Differentialgleichung (A_1): $Y'' = Q_1(T)\, Y$. Wendet man die obige Theorie auf die Differentialgleichungen (a_1), (A) bzw. (a), (A_1) oder (a_1), (A_1) an, so erhält man Transformationen der Ableitungen von Lösungen der einen der beiden Differentialgleichungen (a), (A) in Lösungen oder deren Ableitungen der anderen. Wir wollen jedoch auf die diesbezüglichen Betrachtungen nicht näher eingehen.

LITERATUR

[1] Borůvka, O., Sur la transformation des intégrals des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre. Ann. di Mat. p. ed appl. **41** (1956) 325—342.

[2] Borůvka, O., Sur les transformations différentielles linéaires complètes du second ordre. Ann. di Mat. p. ed appl. **44** (1960) 229—251.

[3] Borůvka, O., Sur les intégrales oscillatoires des équations différentielles linéaires du second ordre. Czech. Math. Journ., **3(78)** (1953) 199—255. (Russisch. Französische Zusammenfassung).

[4] Borůvka, O., Théorie analytique et constructive des transformations différentielles linéaires du second ordre. Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R. P. R., **1** (1957) **(49)** 125—130.

[5] Laitoch, M., Die Identität der Zentraldispersionen erster und zweiter Art, die zu der Differentialgleichung zweiter Ordnung $y''\quad Q((x)\,y$ gehören. Czech. Math. Journ. **6** **(81)** (1956) 365—380 (Russisch. Deutsche Zusammenfassung).

[6] Chrastina, J., On coincistence of basic central dispersions of 3 rd and 4 th orders of the differential equation $y''(t) + Q(t)\,y(t) - 0$. Čas. pro pěst. matem. 87 (1962) 188—197 (tschechische, russische und englische Zusammenfassung).

[7] Radon, J., Über eine besondere Art ebener konvexer Kurven. Ber. Ver. Sächs. Akad. 68 (1916) 123—128.