Otakar Borůvka

Sur l'ensemble des équations différentielles linéaires ordinaires du deuxième ordre qui ont la meme dispersion foundamentale

Bul. Inst. Politehn. Iaşi, Serie noua, 9 (13) 1963, no. 3-4, 11-20

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500102

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
T mul IX (XII), Fa 3 4, 1963

C. D 517 942

SUR L'ENSEMBLE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ORDINAIRES DU DEUXIÈME ORDRE QUI ONT LA MÊME DISPERSION FONDAMENTALE

OTAKAR BORUVKA

I Introduction

1. Considérons une équation différentielle linéaire ordinaire du deuxième ordre de la forme jacobienne:

(q) $$y'' \quad q(t \; y,$$

la fonction q étant continue dans l'intervalle $j - (-\infty, \quad)$. Pour abréger le langage nous appelons la fonction q la *base* de l'équation (q).

Nous supposons que l'équation (q) est oscillatoire; ceci veut dire que toute intégrale de l'équation (q) po sède, vers les deux extrémités de l'intervalle j, une infinité de zéros.

Dans ces conditions on définit, dans l'intervalle j, une fonction φ, appelée la *dispersion centrale fondamentale de première espèce* de l'equation (q) [2]. Nous parlerons plus brievement de la dispersion *fondamentale* de l'equation (q) ou bien de la dispersion fondamentale appartenent à la base q, etc. La fonction φ est définie d'une telle manière que, pour $t \in j$, la valeur $\varphi(t)$ soit le premier nombre conjugué à droite au nombre t; en d'autres termes, si l'on considère une intégrale quelconque de l'équation (q), s'annulant en t, alors $\varphi(t)$ représente le premier zéro de l'intégrale en question qui dépasse t. La fonction φ possède, dans l'intervalle j, les propriétés suivantes:

(1) $$1 \; \varphi(t) > t, \quad 2 \; \varphi \in C_3, \quad 3 \; \varphi'(t > 0, \quad 4 \; \lim_{t \to \quad \infty} \varphi(t) - -\infty, \lim_{t \to \infty} \varphi(t) = \infty.$$

Rappelons qu'on désigne par C_k, ($k \quad 0, 1, 2, \ldots$), la classe des fonctions réelles possédant partout la dérivée continue d'ordre k.

II. Position du problème

2. On s'est occupé, à plusieurs reprises, des équations différentielles (q), dont la dispersion fondamentale (φ) est linéaire et de la forme $\varphi(t) = t + d$, d étant une constante positive. Dans ce qui suit nous supposons (ce qui ne restreint point la généralité) $d = \pi$. Nous appelons *base élémentaire* la base de toute équation (q) pour laquelle $\varphi(t) = t + \pi$. Les équations (q) à bases élémentaires sont caractérisées, évidemment, par la propriété que deux zéros consecutifs de leurs intégrales ont toujours la même distance, qui est égale à π.

O. Borůvka [2] a montré que toute base élémentaire est periodique de période π. M. M. Laitoch [6] s'est occupé des équations différentielles (q) ayant la dispersion fondamentale $\varphi(t) = at + d$, avec $a > 0$, $d > 0$ — constantes. M. L. Frank [4] s'est occupé plus profondément des bases élémentaires. M. E. Barvínek [1] a montré que toute fonction φ, jouissant des propriétés (1), représente la dispersion fondamentale de certaines équations différentielles (q) et il a déterminé toutes les bases correspondantes. M. F. Neuman [5] vient de déduire une formule élégante qui entraine toutes les bases élémentaires:

$$q(t) = f''(t) + f'^2(t) + 2f'(t)\operatorname{cotg}(t - c) - 1; \tag{2}$$

$c \in j$ désigne une constante arbitraire, $f \in C_2$ une fonction périodique de période π et telle que

$$f(c) = 0, \quad f'(c) - 0, \quad \int_0^\pi \frac{e^{-2f(\sigma)} - 1}{\sin^2(\sigma - c)}\, d\sigma = 0.$$

En particulier $\left(f(t) = -\frac{1}{2}\log\left[1 - \frac{1}{3}\sin 2(t - c)\sin^2(t - c)\right]\right)$ le système de bases:

$$q(t|c) = \left[\sin 4(t - c) + \frac{1}{3}\sin^4(t - c)\right] \Big/ \left[1 - \frac{1}{3}\sin 2(t - c)\sin^2(t - c)\right]^2 - 1, \tag{3}$$

déterminé par les différentes valeurs du paramètre $c \in [0, \pi/4]$, consiste en bases élémentaires.

Insistons, pour un moment, sur ce résultat. On voit facilement que pour $c_1 \neq c_2$ on a $q(t|c_1) \neq q(t|c_2)$. Ceci montre que le système en question a la puissance du continu, $\aleph$. Désignons par M l'ensemble formé de toutes les bases élémentaires. Les éléments de M étant des fonctions continues, on a $\operatorname{card} M \leqslant \aleph$. D'autre part, comme le système des fonctions $q(t|c)$ est un sous-ensemble de M, on voit que $\operatorname{card} M \geqslant \aleph$. Il en résulte $\operatorname{card} M = \aleph$. Nous arrivons ainsi au résultat que l'ensemble de toutes les équations différentielles (q) qui ont la même dispersion fondamentale $\varphi(t) = t + \pi$ a la puissance du continu.

Ces considérations conduisent au problème suivant:

Déterminer la puissance de l'ensemble formé par toutes les équations différentielles (q) *possédant la même dispersion fondamentale* φ, *qui est d'ailleurs arbitraire.*

III. L'algèbre des phases

3. Nous allons commencer par rappeler la notion et les propriétés essentielles des fonctions appelées phases de l'équation (q), fonctions qui jouent le rôle le plus important dans la théorie qui nous occupe.

Considérons une équation (q) dans les conditions énoncées. u, v étant un couple ordonné d'intégrales linéairement independantes de l'équation (q), on entend sous *phases* du couple en question toute fonction α qui est continue dans l'intervalle j, et y satisfait, à l'exception des zéros de l'intégrale v, à l'équation $\operatorname{tg} \alpha(t) = u(t)/v(t)$.

Il existe, par conséquent, précisément, un système dénombrable des phases en question et ces phases diffèrent, l'une de l'autre, par des multiples entiers de π.

On appelle phase de l'équation (q) une phase appartenant au système des phases déterminé par un couple ordonné d'intégrales linéairement indépendates quelconques de l'équation (q).

Résumons brièvement les propriétés fondamentales des phases de l'équation (q) en tant qu'elles nous seront utiles dans la suite.

Soit α une phase quelconque de l'équation (q).

D'abord, on voit facilement, compte tenu de la définition même de la notion de phase, que la fonction α appartient à la classe C_3, la dérivée α' étant toujours positive ou bien négative.

La fonction $y(t) = k_1 \{\sin[\alpha(t) + k_2]\}/\sqrt{\alpha'(t)}$, formée par des constantes k_1, k_2, représente l'intégrale générale de l'équation (q).

Ce résultat entraîne, et on le voit facilement si l'on tient compte de la supposition quant au caractère oscillatoire de l'équation (q), que la fonction α est inférieurement et supérieurement non-bornée.

On s'assure aussi, sans aucune espèce de difficultés, que la phase α se trouve liée, dans l'intervalle j, à la dispersion fondamentale φ par l'équation d'Abel:

$$\alpha\varphi(t) = \alpha(t) + s\pi, \quad (s = \operatorname{sgn} \alpha'(t)). \tag{4}$$

On voit que la phase α détermine univoquement la fonction φ suivant la formule:

$$\varphi(t) = \alpha^{-1}(\alpha(t) + s\pi). \tag{5}$$

Finalement, remarquons que, par la phase α se trouve univoquement déterminée la base q d'après l'une ou l'autre des formules:

$$(6) \quad -\{\operatorname{tg}\alpha,\ t\} = q(t), \qquad (7) \quad -\{\alpha,\ t\} - \alpha'^2(t) = q(t).$$

Nous avons désigné, comme d'habitude, par le symbole $\{\alpha, t\}$, par ex., la dérivee schwarzienne de la fonction α au point t:

$$\{\alpha,\ t\} = \frac{1}{2}\, \alpha'''(t)/\alpha'(t) - \frac{3}{4}\, \alpha''^2(t)/\alpha'^2(t).$$

4. Ceci étant prélevé la voie qui va conduire à la solution du problème proposé consiste dans l'étude de la structure de l'ensemble formé de certaines fonctions appelées fonctions-phases.

Nous denommons *fonctions-phase* toute fonction α, définie dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$, qui jouit dans cet intervalle de la propriété d'être inférieurement et supérieurement non-bornée et d'appartenir à la classe C_3; on suppose en outre que la dérivée α' est toujours positive ou bien négative.

On voit que toute phase d'une équation oscillatoire quelconque (q) est une fonction-phase et, inversement, toute fonction-phase α, représente une phase d'une équation oscillatoire (q), la base de cette équation étant donnée par une formule telle que (6) ou bien (7). Nous parlons, par conséquent, plus brièvement, des phases au lieu des fonction-phases.

L'étude de la structure de l'ensemble des phases que nous allons développer, revient à appliquer des méthodes algébriques empruntées de la théorie des groupes. C'est alors dans ce sens que nous parlons de *l'algèbre des phases*.

5. *Groupe des phases*. Soit $\mathfrak{G}$ l'ensemble formé de toutes les phases.

On voit facilement que l'ensemble $\mathfrak{G}$ contient la phase-identité $\varphi_0(t) = t$ et que, pour deux phases quelconques, α, $\beta \in \mathfrak{G}$, la fonction composée $\alpha\beta$ et de même la fonction inverse α^{-1} appartiennent encore à $\mathfrak{G}$. Il en résulte que l'ensemble $\mathfrak{G}$, dans lequel on a défini l'opération binaire (multiplication) à l'aide de la composition des fonctions, représente un groupe, avec l'élément neutre $\varphi_0(t)$. Nous appelons $\mathfrak{G}$ le *groupe des phases*.

6. *Équivalence des phases*. Nous définissons, à présent, dans le groupe $\mathfrak{G}$, une relation d'équivalence de la manière suivante.

Étant données deux phases α, $\beta \in \mathfrak{G}$ quelqonques, on définit la phase β d'être équivalente à α s'il subsiste une relation de la forme:

(8) $$\operatorname{tg}\beta(t) = [c_{11} + c_{12}\operatorname{tg}\alpha(t)]/[c_{21} + c_{22}\operatorname{tg}\alpha(t)],$$

c_{11}, c_{12}, c_{21} étant des constantes convenables telles que $c_{ij}| \neq 0$. On suppose la relation vérifiée pour toutes les valeurs $t \in j$ à l'exception des points singuliers du premier membre.

La relation en question étant, évidemment, reflexive, symétrique et transitive, elle représente, en effet, une relation d'équivalence $(\mathcal{R})$.

Le groupe $\mathfrak{G}$ se décompose, par conséquent, en différentes classes mod $\mathcal{R}$. Toute classe consiste en phases qui sont équivalentes par paires, tandis que deux phases appartenant à des classes différentes ne sont jamais équivalentes l'une à l'autre.

7. *Sous-groupe fondamental*. Désignons par $\mathfrak{E}$ cette classe mod $\mathcal{R}$ qui contient l'élément neutre du groupe $\mathfrak{G}$, $\varphi_0(t)$.

La classe $\mathfrak{E}$ consiste, par conséquent, en phases, ε, telles que:

(9) $$\operatorname{tg}\varepsilon(t) = (c_{11} + c_{12}\operatorname{tg} t)/(c_{21} + c_{22}\operatorname{tg} t),$$

les constantes c_{ij} prenant toutes les valeurs pour lesquelles $|c_{ij}| \neq 0$.

Or, on voit que pour deux phases ε_1, $\varepsilon_2 \in \mathfrak{E}$ quelconques, la fonction composée $\varepsilon_1\varepsilon_2$ et de même la fonction inverse ε_1^{-1} appartiennent encore à $\mathfrak{E}$. Ceci montre que la classe $\mathfrak{E}$ représente un sous-groupe du groupe $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{G}$. Nous appelons $\mathfrak{C}$ le *sous-groupe fondamental* du groupe $\mathfrak{G}$.

Soit $\alpha \in \mathfrak{G}$ une phase arbitraire. Désignons par $\bar{a}$ la classe mod $\mathcal{R}$ qui renferme α, $\alpha \in a$. En remplaçant dans la formule (9) t par $\alpha(t)$ on voit que, pour tout élément $\varepsilon \in \mathfrak{C}$, la phase $\varepsilon\alpha$ résulte équivalente à α. Ceci entraîne $a \supset \mathfrak{C}\alpha$, $\mathfrak{C}\alpha$ étant la classe latérale à droite de l'élément α par rapport au sous-groupe $\mathfrak{C}$. D'autre part, en remplaçant, dans la formule (8), t par $\alpha^{-1}(t)$, on voit que, pour toute phase β équivalente à α, la fonction $\beta\alpha^{-1} (= \varepsilon)$ appartient au sous-groupe $\mathfrak{C}$, de sorte que $\beta = \varepsilon\alpha \in \mathfrak{C}\alpha$. Ceci entraîne $a \subset \mathfrak{C}\alpha$. On a par conséquent, $a = \mathfrak{C}\alpha$.

Nous voyons que les classes des phases mutuellement équivalentes mod $\mathcal{R}$, représentent précisément les classes latérales à droite par rapport au sous-groupe fondamental $\mathfrak{C}$. On peut dire aussi que *la décomposition du groupe $\mathfrak{G}$ en classes* mod $\mathcal{R}$ *coïncide avec la décomposition en classes latérales à droite par rapport au sous-groupe fondamental.* Dans la suite nous désignons par $\bar{E}$ la décomposition en question du groupe $\mathfrak{G}$.

8. *Bases.* Associons à toute phase α la fonction q, appelée la *base de* α, fonction donnée par une formule telle que (6) ou bien (7). La base q appartient, évidemment, à la classe C_0.

On a, en particulier, $q_{\varphi_0} = -1$, φ_0 étant, rappelons-le, l'élément neutre du groupe $\mathfrak{G}$, $\varphi_0(t) = t$.

Subsiste, pour deux phases quelconques, α, $\beta \in \mathfrak{G}$, *la formule*:

$$q_{\alpha\beta} = q_\beta + (1 + q_\alpha \beta)\beta'^2. \tag{10}$$

On a, en effet:

$$q_{\alpha\beta}(t) = -\{\operatorname{tg} \alpha\beta,\ t\} = -\{\operatorname{tg} \alpha,\ \beta(t)\}\beta'^2(t) - \{\beta,\ t\} =$$
$$= q_\alpha[\beta(t)]\beta'^2(t) - \{\beta,\ t\} = (1 + q_\alpha[\beta(t)])\beta'^2(t) + q_\beta(t),$$

ce qui démontre la formule (10).

La formule en question entraîne, en particulier, que les bases associées à deux phases mutuellement inverses, α, $\bar{\alpha} (= \alpha^{-1})$, sont liées, l'une à l'autre, suivant la formule $(1 + q_{\bar{\alpha}}) + (1 + q_\alpha \bar{\alpha})\bar{\alpha}'^2 = 0$, qui peut être mise sous la forme symétrique:

$$[1 + q_\alpha(t)]/\alpha'(t) + [1 + q_{\bar{\alpha}}(\bar{t})]/\bar{\alpha}'(\bar{t}) = 0;$$

les valeurs t, $\bar{t} \in j$ se rattachent l'une à l'autre par les équations $\bar{t} = \alpha(t)$, $t = \bar{\alpha}(\bar{t})$.

Remarquons que la formule (10) peut être généralisée pour un nombre (fini) quelconque de phases $\alpha, \beta, \dots, \lambda$. On a, par ex., pour trois phases arbitraires, α, β, γ:

$$q_{\alpha\beta\gamma} = q_\gamma + (1 + q_\beta\gamma)\gamma'^2 + (1 + q_\alpha \beta\gamma)(\beta\gamma)'^2. \tag{11}$$

9. Nous allons montrer maintenant que *les bases, q_α, q_β, associées à deux phases arbitraires* α, $\beta \in \mathfrak{G}$, *coïncident si et seulement si les phases*

en question sont mutuellement équivalentes, on bien, en d'autres termes, *si elles appartiennent au même élément de la décomposition E.*

En effet, si les phases α, β sont mutuellement équivalentes, on a une relation telle que (8) et cette relation entraîne:

$$q_\beta(t) = -\{\operatorname{tg}\beta, t\} = -\{\operatorname{tg}\alpha, t\} = q_\alpha(t).$$

Inversement, si les bases q_α, q_β coïncident, on a l'égalité du deuxième et du troisième membre dans les équations précédentes, égalité qui entraîne une relation de la forme (8).

Nous voyons, par conséquent, que toutes les phases appartenant à la même classe quelconque $\mathfrak{E}\alpha \in E$, possèdent toujours la même base q_α, tandis qu'à des phases appartenant à des éléments différentes de la décomposition E se trouvent associées des bases différentes.

Toute classe $\mathfrak{E}\alpha \in E$ détermine, par conséquent, précisément une équation (q) oscillatoire, à savoir celle avec la base q_α; inversement, à toute équation (q) oscillatoire correspond précisément un élément de la décomposition E, à savoir l'élément constitué par des phases qui déterminent la base de l'équation (q).

Désignons par $\mathcal{B}E$ l'ensemble formé par des bases de toutes les équations oscillatoires (q). L'application en question ($\mathcal{B}$) de l'ensemble E sur $\mathcal{B}E$, faisant correspondre à toute classe $\mathfrak{E}\alpha \in E$ la base $q_\alpha \in \mathcal{B}E$, résulte, évidemment, biunivoque.

Remarquons que, en particulier, la base déterminée par le sous-groupe fondamental $\mathfrak{E}$ est la fonction $q_{\varphi 0}(t) = -1$, $\mathcal{B}\mathfrak{E} = -1$.

10. *Phases élémentaires.* On entend sous *phase élémentaire* une phase (A) qui vérifie, dans l'intervalle j, l'équation:

$$\text{(12)} \qquad \mathrm{A}(t+\pi) = \mathrm{A}(t) + s\pi, \quad (s = \operatorname{sgn} \mathrm{A}').$$

Ainsi, par ex., la phase-unité du groupe $\mathfrak{G}$, $\varphi_0(t) = t$, est une phase élémentaire.

On démontre facilement qu'*une phase* A *est élémentaire si et seulement si la dispersion fondamentale correspondante* φ *est linéaire et de la forme* $\varphi(t) = t + \pi$.

En effet, soit A une phase quelconque et φ la dispersion fondamentale appartenant à A. Si la fonction φ est linéaire et de la forme en question, l'équation d'Abel correspondante a la forme (12), ce qui montre que la phase A est élémentaire. Inversement, si la phase A est élémentaire alors l'équation (12), confrontée avec l'équation d'Abel correspondante, conduit à la formule $\varphi(t) = t + \pi$, ce qui achève la démonstration.

Nous avons appelé (v. 2) base élémentaire, la base d'une équation (q) dont la dispersion fondamentale est égale à $t + \pi$. Nous voyons, par conséquent, que dans notre langage, *les phases élémentaires engendrent des bases élémentaires, lesquelles, à leur tour, se trouvent associées à des phases élémentaires.*

Soit A une phase élémentaire. On a, par conséquent, dans l'intervalle j, une relation telle que (12). On en voit, que la fonction $P(t) = \mathrm{A}(t) - st$, $(s = \operatorname{sgn} \mathrm{A}')$, jouit, dans l'intervalle en question, des propriétés suivantes: 1° $P \in C_3$, 2° $P'(t) + s > 0$ ou bien < 0 suivant que $s = +1$ ou bien $= -1$, 3° $P(t+\pi) = P(t)$. Remarquons que, en particulier, la fonction P est périodique et de période π.

Inversement, on se rend compte facilement que P étant dans l'intervalle j une fonction jouissant des propriétés 1°...3° avec $s = \pm 1$, la fonction

$$\mathrm{A}(t) = st + P(t) \tag{13}$$

représente une phase élémentaire telle que $\operatorname{sgn} \mathrm{A}' = s$. Par conséquent, la formule (13) entraîne toutes les phases élémentaires [1].

11. Dans ce paragraphe nous allons montrer que *l'ensemble des phases élémentaires $\mathfrak{H}$ forme un sous-groupe du groupe $\mathfrak{G}$.*

En effet, on voit d'abord, comme nous l'avons d'ailleurs déja remarqué, que $\varphi_0(t) \in \mathfrak{H}$.

De plus, la phase AB, constituée par les phases élémentaires A, B, résulte encore élémentaire, ce qui résulte de l'inspection des formules ci-dessous:

$$\begin{aligned} \mathrm{AB}(t+\pi) &= \mathrm{A}[\mathrm{B}\,t+\pi)] = \mathrm{A}[\mathrm{B}(t) + s_2\pi] = \mathrm{AB}(t) + s_1 s_2 \pi = \\ &= \mathrm{AB}(t) + \operatorname{sgn}(\mathrm{AB})'\pi, \quad (s_1 = \operatorname{sgn} \mathrm{A}', \; s_2 = \operatorname{sgn} \mathrm{B}'). \end{aligned}$$

Finalement, la phase $\bar{\mathrm{A}}\,(= \mathrm{A}^{-1})$, inverse à la phase A, est encore élémentaire. On a, pour $T \in j$, les relations:

$$\mathrm{A}[\mathrm{A}(T) + \pi] = \mathrm{A}[\mathrm{A}(T + s\pi] = T + s\pi, \quad (s = \operatorname{sgn} \mathrm{A}' = \operatorname{sgn} \mathrm{A}'),$$

qui entraînent, pour $t = \mathrm{A}(T)$, $T = \mathrm{A}(t)$ l'équation $\bar{\mathrm{A}}(t+\pi) = \mathrm{A}(t) + s\pi$.

Nous voyons, par conséquent, que l'ensemble $\mathfrak{H}$ représente bien un sous-groupe du groupe $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$.

Nous allons montrer à présent que toute phase B qui est équivalente à une phase élémentaire A est aussi élémentaire.

En effet, la phase A étant élémentaire, la base associée à A, q_{A}, résulte aussi élémentaire. D'autre part, la phase B étant équivalente à A, on a $q_{\mathrm{B}} = q_{\mathrm{A}}$. Il en résulte que la base q_{B} est élémentaire; on conclut, par conséquent, que la phase B est élémentaire.

Cette observation entraîne que, chaque classe $a \in E$ qui renferme une phase élémentaire, est constituée entièrement par des phases élémentaires. On voit, en particulier, que le sous-groupe fondamental $\mathfrak{E}$ est constitué entièrement par des phases élémentaires. Par conséquent, *le sous-groupe $\mathfrak{E}$ représente un sous-groupe du groupe $\mathfrak{H}$.* Nous arrivons ainsi aux relations $\{1\} \subset \mathfrak{E} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$, $\{1\}$ étant le plus petit sous-groupe en $\mathfrak{G}$, constitué par l'élément unique $\varphi_0(t) = t$.

Désignons par $\bar{H}$ la décomposition du groupe $\mathfrak{G}$ en classes latérales à droite par rapport à $\mathfrak{H}$.

La relation $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{H}$ entraîne $E \leqslant H$ [3, p. 135], c'est-à-dire que toute classe $\mathfrak{H}\alpha \in H$ est la réunion de certaines classes-éléments de la décomposition E.

Pour toute classe $\mathfrak{H}\alpha \in H$ désignons par $\overline{H}_\alpha$ l'ensemble des classes-éléments de la décomposition E qui fournissent, par réunion, la classe $\mathfrak{H}\alpha$, et au lieu de H_{φ_ϵ} écrivons, plus simplement $\overline{H}_\epsilon$. Nous avons, par conséquent, $H_\alpha = \mathfrak{H}\alpha \cap E \subset E$ et, en particulier, $H_\epsilon = \mathfrak{H} \cap E \subset E$ [3, p. 8].

12. Nous allons montrer maintenant que *les ensembles* $\overline{H}_\epsilon$, $\overline{H}_\alpha$ *ont la même puissance* (au sens de la théorie des ensembles).

Dans ce but remarquons d'abord que les éléments de l'ensemble H_ϵ, H_α sont respectivement $\mathfrak{E}\mathrm{A}$, $\mathfrak{E}\mathrm{A}\alpha$, où $\mathrm{A} \in \mathfrak{H}$ parcourt les différentes phases élémentaires. Faisons alors correspondre à tout élément $\mathfrak{E}\mathrm{A} \in H_\epsilon$ l'élément $\mathfrak{E}\mathrm{A}\alpha \in H_\alpha$. De cette manière on définit une représentation, évidemment univoque, de l'ensemble H_ϵ sur H_α. Si les images $\mathfrak{E}\mathrm{A}\alpha$, $\mathfrak{E}\mathrm{B}\alpha \in H_\alpha$ de deux éléments quelconques $\mathfrak{E}\mathrm{A}$, $\mathfrak{E}\mathrm{B} \in H_\epsilon$ coïncident, on a $\mathfrak{E}\mathrm{A}\alpha = \mathfrak{E}\mathrm{B}\alpha$ et cette relation entraîne $(\mathrm{A}\alpha)(\mathrm{B}\alpha)^{-1} \in \mathfrak{E}$. D'autre part sont valables, évidemment, les formules $(\mathrm{A}\alpha)(\mathrm{B}\alpha)^{-1} = \mathrm{A}\alpha\alpha^{-1}\mathrm{B}^{-1} = \mathrm{A}\mathrm{B}^{-1}$, de sorte que la coïncidence des images en question conduit à la relation $\mathrm{A}\mathrm{B}^{-1} \in \mathfrak{E}$; cette dernière donne, à son tour, $\mathfrak{E}\mathrm{A} = \mathfrak{E}\mathrm{B}$. On voit que la représentation ci-dessus de l'ensemble H_ϵ sur H_α est biunivoque. La proposition se trouve démontrée.

Or, revenons à l'application $\mathcal{B}$ de l'ensemble E sur l'ensemble $\mathcal{B}E$ formé de toutes les bases des équations (q) oscillatoires, application que nous avons considérée dans **11.** Cette application étant biunivoque les ensembles H_ϵ, $\mathcal{B}H_\epsilon$ et de même les ensembles $\overline{H}_\alpha$, $\mathcal{B}\overline{H}_\alpha$ ont des puissances égales. D'autre part, les ensembles H_ϵ, H_α ayant eux aussi la même puissance, comme nous venons de le voir, il en est de même pour les ensembles $\mathcal{B}\overline{H}_\epsilon$, $\mathcal{B}H_\alpha$ qui ont, par conséquent, des puissances égales. Or, l'ensemble $\mathcal{B}H_\epsilon$ étant formé de toutes les bases élémentaires, il a la puissance du continu $\aleph$ (v. 2).

Nous sommes donc arrivés à la conclusion que *l'ensemble* $\mathcal{B}H_\alpha$, *formé par des bases correspondantes aux différents éléments de la décomposition* E *et située dans le même élément* $\mathfrak{H}\alpha \in \overline{H}$, *a toujours la puissance du continu.*

13. En ce qui concerne notre problème, jouit un rôle important la proposition suivante:

Deux phases quelconques $\alpha, \beta \in \mathfrak{G}$ *possèdent la même dispersion fondamentale si et seulement si la phase* $\mathrm{A} = \alpha\beta^{-1}$ *résulte élémentaire.*

D é m o n s t r a t i o n. a) Supposons que les phases α, β possèdent la même dispersion fondamentale, φ. Nous avons alors les formules:

$$\alpha\varphi = \alpha + s_1\pi, \quad (s_1 = \operatorname{sgn} \alpha'), \quad \beta\varphi = \beta + s_2\pi, \quad (s_2 = \operatorname{sgn} \beta')$$

et leurs conséquences:

$\beta^{-1}(\beta + s_2\pi) = \alpha^{-1}(\alpha+s_1\pi)$, $\alpha\beta^{-1}(\beta+s_2\pi) = \alpha+s_1\pi$, $\alpha\beta^{-1}(t+s_2\pi) = \alpha\beta^{-1}+s_1\pi$. La dernière de ces équations entraîne $\alpha\beta^{-1}(t+\pi) = \alpha\beta^{-1}(t) + s_1 s_2 \pi$, et on voit que la phase $A = \alpha\beta^{-1}$ est bien élémentaire.

b) Supposons, à présent, que la phase $A = \alpha\beta^{-1}$ est élémentaire. Désignons par φ_1, φ_2 les dispersions fondamentales appartenant aux phases α, β et soient $s_1 = \operatorname{sgn} \alpha'$, $s_2 = \operatorname{sgn} \beta'$. Nous avons alors les formules:

$$\alpha = A\beta,\ \alpha\varphi_2 = A\beta\varphi_2 = A(\beta + s_2\pi) = A\beta + s_1\pi = \alpha + s_1\pi = \alpha\varphi_1\,,$$

qui entraînent, à leur tour, $\varphi_1 = \varphi_2$. Notre proposition se trouve, par conséquent, démontrée.

Le résultat que nous venons d'obtenir permet à conclure que, deux phases quelconques $\alpha, \beta \in \mathfrak{G}$ ont la même dispersion fondamentale, φ, si et seulement si elles sont contenues dans le même élément de la décomposition H.

En effet, d'après le résultat en question, les phases α, β ont la même dispersion fondamentale φ si et seulement si l'on a $\alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{H}$. Or, on sait [3, p. 140] que cette relation est nécessaire et suffisante pour que les classes $\mathfrak{H}\alpha$, $\mathfrak{H}\beta$ coïncident, ou bien, pour que les phases α, β soient contenues dans le même élément $\mathfrak{H}\alpha - \mathfrak{H}\beta$ de la décomposition H.

Nous arrivons à la conclusion que, *les différentes classes à droite par rapport au sous-groupe* $\mathfrak{H}$, *ou bien*, en d'autres termes, *les différents éléments de la décomposition H, sont constitués par toutes les phases qui ont la même dispersion fondamentale.*

L'application de la décomposition H sur l'ensemble formé de toutes les dispersions fondamentales, qui associe à tout élément $\bar{a} \in H$ la dispersion fondamentale φ, formée, d'après la formule (5), à l'aide des phases $\alpha \in a$, résulte, évidemment, biunivoque.

IV. Solution du problème proposé

14. Les résultats précédents permettent d'arriver rapidement à la solution de notre problème.

Considérons l'ensemble M formé de toutes les bases des équations (q) oscillatoires qui ont la même dispersion fondamentale φ. Soit α une phase appartenant à une base quelconque $q_a \in M$. Alors toutes les phases qui appartiennent aux différentes bases-éléments de l'ensemble M constituent le classe $\mathfrak{H}\alpha \in H$ (v. 13). Par conséquent, les bases-éléments de l'ensemble M sont précisément les éléments de l'ensemble $\mathcal{B}H_a$, $M = \mathcal{B}H_a$. Nous voyons que l'ensemble M a la puissance du continu $\aleph$ (v. 12).

Nous obtenons de cette manière la solution du problème proposé: *La puissance de l'ensemble formé de toutes les équations* (q) *qui ont la même dispersion fondamentale* φ, *ne dépend point du choix particulier de la fonction* φ *et résulte toujours égale à la puissance du continu.*

15. Nous allons terminer nos considérations en indiquant une formule qui donne toutes les bases des équations (q) oscillatoires possédant la même dispersion fondamentale.

Revenons aux notations précédentes. Soit α une phase appartenant à une base arbitraire $q_\alpha \in M$.

Nous savons que toute phase β qui appartient à une base arbitraire $q_\beta \in M$ est de la forme $\beta = A\alpha$, A étant une phase élémentaire convenable. Nous avons, par conséquent, d'après la formule (10), $q_\beta = q_\alpha + (1 + q_A \alpha)\alpha'^2$, ou q_A désigne la base appartenant à la phase A, base qui est par conséquent élémentaire. Or, en se servant de la formule (2) (accommodée de sorte qu'on écrit t au lieu de $t - c$ et $f(t)$ au lieu de $f(t + c)$), on trouve la formule:

$$(14) \qquad q = q_\alpha + (f''\alpha + f'^2\alpha + 2f'\alpha . \operatorname{cotg} \alpha)\alpha'^2, \quad (q = q_\beta),$$

la fonction f étant, dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$, de la classe C_2, périodique de période π et telle que

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad \int_0^\pi \frac{e^{-2f(\sigma)} - 1}{\sin^2 \sigma} d\sigma = 0.$$

En définitive, *la formule* (14), *formée par les fonctions f jouissant des propriétés ci-dessus, donne toutes les bases oscillatoires q, possédant la même dispersion fondamentale* φ.

Reçu le 14 II 1963

Université de Brno,
R. S. Tchécoslovaque

BIBLIOGRAPHIE

1. Barvínek E., Acta F. R. N. Univ. Comen., Mat., 1961, V, *8—10*, pp. 465—474.
2. Borůvka O., Čech. mat. ž., 1953, 3 (78), pp. 199—251.
3. — *Grundlagen der Grupyoid- und Gruppentheorie.* VEB Deutscher Verlag der Wiss., Berlin, 1960.
4. Frank L., Sborník VUT v Brne, 1958, pp. 91—96.
5. Neuman F., *Sur les équations différentielles linéaires oscillatoires du deuxième ordre avec la dispersion fondamentale* $\varphi(t) = t + \pi$, (sous presse).
6. Laitoch M., Čech. mat. ž., 1955, 6 (81), pp. 365—380.

О МНОЖЕСТВЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ИМЕЮЩИХ ОСНОВНУЮ ДИСПЕРСИЮ

(Резюме)

Доказывается, что мощность множества всех дифференциальных уравнений (q) имеющих общую основную дисперсию φ, не зависит от частного образа выбора функции φ и является всегда равной мощности континуума.

ASUPRA MULŢIMII ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE ORDINARE DE ORDINUL AL DOILEA CARE AU ACEEAŞI DISPERSIE FUNDAMENTALĂ

(Rezumat)

Se demonstrează că puterea mulţimii tuturor ecuaţiilor diferenţiale (q) care au aceeaşi dispersie fundamentală φ, nu depinde de modul particular de alegere a funcţiei φ şi rezultă totdeauna egală cu puterea continuului.