Otakar Borůvka

Über die algebraische Struktur der Phasenmenge der linearen oszillatorischen Differentialgleichungen 2. Ordnung

Bericht von der Tagung über geordnete Mengen, Brno, November 1963. Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. P., Brno, no. 457, 1964, 461-462

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500106

ÜBER DIE ALGEBRAISCHE STRUKTUR DER PHASENMENGE DER LINEAREN OSZILLATORISCHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 2. ORDNUNG

O. Borůvka, Brno

1. Wir betrachten lineare oszillatorische Differentialgleichungen (Diffgen) 2. Ordnung vom Jacobischen Typus

$$\text{(q)} \qquad y'' = q(t)\, y,$$

mit stetigen „Trägern" $q(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$. „Oszillatorisch" soll heißen, daß die Integrale von (q) in beiden Richtungen unendlich oftmal verschwinden.

Es sei (q) eine Diffg von der betrachteten Art.

Unter einer *Basis* (u, v) der Diffg (q) versteht man eine zweigliedrige Folge von (linear) unabhängigen Integralen u, v von (q). Eine *Phase* der Basis (u, v) heißt jede im Intervall $j = (-\infty, \infty)$ stetige und daselbst mit Ausnahme der Nullstellen des Integrals v der Gleichung $\operatorname{tg} \alpha = u : v$ genügende Funktion α. Als eine Phase der Diffg (q) wird eine Phase irgendeiner Basis von (q) bezeichnet. Jede Phase α der Diffg (q) hat im Intervall j folgende Eigenschaften: 1. α ist von beiden Seiten unbegrenzt, 2. $\alpha \in C^3$, 3. $\alpha' \neq 0$. Umgekehrt stellt jede im Intervall j erklärte „Phasenfunktion" α, d. h. eine Funktion α mit den Eigenschaften 1.—3., eine Phase der Diffg (q) mit dem Träger $q(t) = -\{\operatorname{tg} \alpha, t\}$ dar; das Symbol $\{\}$ bezeichnet die schwarzsche Ableitung. Eine Phasenfunktion α heißt *elementar*, wenn im Intervall j stets $\alpha(t + \pi) = \alpha(t) + \delta\pi$, mir $\delta = \pm 1$, gilt.

Die im Intervall j erklärte Funktion φ, durch die jeder Zahl $t \in j$ die erste mit ihr rechtseitig (von der 1. Art) konjugierte Zahl $\varphi(t)$ zugeordnet wird, heißt die *Fundamentaldispersion* 1. *Art* der Diffg (q), kürzer: Fundamentaldispersion (Fdsion) von (q). Diese Funktion hat im Intervall j folgende Eigenschaften: 1. $\varphi(t) > t$, 2. $\lim\limits_{t \to -\infty} \varphi(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t \to \infty} \varphi(t) = \infty$, 3. $\varphi \in C^3$, 4. $\varphi' > 0$. Umgekehrt gibt es zu jeder Funktion φ im Intervall j, mit den Eigenschaften 1.—4., Diffgen (q) mit der Fdsion φ.

Den Anlaß zur Untersuchung der algebraischen Struktur der Phasenmenge der linearen oszillatorischen Diffgen (q) 2. Ordnung gibt das folgende Problem: *Es soll die Mächtigkeit der Menge aller Diffgen* (q) *mit derselben Fundamentaldispersion* φ *bestimmt werden.*

2. Es sei $\mathfrak{G}$ die Menge aller Phasenfunktionen, kürzer: Phasen, im Intervall j. Diese Menge, zusammen mit der in ihr vermöge von Zusammensetzung von Funktionen erklärten Multiplikation (Verknüpfungs-

regel), bildet eine Gruppe mit dem Einselement $\varepsilon(t) = t$. Die Menge aller wachsenden Phasen bildet in der Gruppe $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ vom Index 2; die Menge der abnehmenden Phasen ist die Nebenklasse der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$.

Es sei nun $\mathscr{R}$ die folgende Äquivalenzrelation in der Gruppe $\mathfrak{G}$:

$$\alpha^* - \alpha \pmod{\mathscr{R}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha^* = \frac{c_{11} \operatorname{tg} \alpha + c_{12}}{c_{21} \operatorname{tg} \alpha + c_{22}} ;$$

$c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ bedeuten (reelle) Zahlen, $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \neq 0$, und die rechts stehende Beziehung gilt für jeden Wert $t \in j$, mit Ausnahme der singulären Stellen von $\operatorname{tg} \alpha^*$ und $\operatorname{tg} \alpha$.

Die das Einselement ε enthaltende Klasse mod $\mathscr{R}$ stellt eine Untergruppe $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{G}$ dar, und die Klassenzerlegung mod $\mathscr{R}$ fällt mit der rechtsseitigen Restklassenzerlegung $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{F}$ zusammen. Zwei Elemente α^*, $\alpha \in \mathfrak{G}$ sind Phasen derselben Diffg (q) dann und nur dann, wenn sie in demselben Element von $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{F}$ liegen.

Ferner bilden die elementaren Phasen eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ und es gilt: $\mathfrak{H} \supset \mathfrak{F}$. Folglich ist jedes Element von $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{F}$ in einem Element $\mathfrak{H}\alpha \in \mathfrak{G}/_r\mathfrak{H}$ als Teilmenge enthalten. Man beweist, daß zwei Diffgen (q) genau dann dieselbe Fdsion besitzen, wenn die aus ihren Phasenmengen bestehenden Elemente von $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{F}$ in demselben Element $\mathfrak{H}\alpha \in \mathfrak{G}/_r\mathfrak{H}$ als Teilmengen enthalten sind. Nach einem Satz der Gruppentheorie hängt die Mächtigkeit der Menge aller in einem Element $\mathfrak{H}\alpha \in \mathfrak{G}/_r\mathfrak{H}$ enthaltenen Elemente von $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{F}$ von der Wahl des Elementes $\mathfrak{H}\alpha$ nicht ab. Folglich ist die Mächtigkeit der Menge aller Diffgen (q) mit derselben Fundamentaldispersion φ von der Wahl dieser letzteren unabhängig und man beweist, daß sie der Mächtigkeit des Kontinuums gleich ist. Dies ist die Lösung des obigen Problems.

ÜBER HOMOMORPHE GRUPPENBILDER TEILWEISE GEORDNETER HALBGRUPPEN

László Fuchs, Budapest

Es wird untersucht, nach welchen Äquivalenzrelationen einer (teilweise) geordneten Halbgruppe die Faktorhalbgruppe eine geordnete Gruppe ist. Dieses Problem wurde für residuierte kommutative Halbgruppen, die bez. der Vereinigung Halbverbände sind, von Madame Dubreil-Jacotin betrachtet. Um unser allgemeineres Problem lösen zu können, führen wir den Begriff der *verallgemeinerten Residuation* ein; mittels dessen wird das Problem durch eine Verallgemeinerung des Artinschen Äquivalenzbegriffes gelöst.