Otakar Borůvka

Über die allgemeinen Dispersionen der linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung

Ann. Sci. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi Secţ. Ia Mat. (N.S.) 11B, 1965, 217-238

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500110

ÜBER DIE ALLGEMEINEN DISPERSIONEN DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 2. ORDNUNG

VON

O. BORŮVKA, Brno (ČSSR)

Herrn Prof. Octav Mayer zu seinem 70. Geburtstage gewidmet

I. *Einleitung*

Die Transformationstheorie der linearen Differentialgleichungen (Diffgen) 2. Ordnung im reellen Gebiet behandelt im Wesentlichen die zwischen den Lösungen der linearen Diffgen 2. Ordnung

$$\text{(q)} \qquad y'' = q(t)\,y, \qquad \ddot{Y} = Q(T)\,Y \qquad \text{(Q)}$$

und denjenigen der nichtlinearen Diffgen 3. Ordnung

$$\text{(Qq)} \qquad -\{X, t\} + Q(X)\,X'^2 = q(t), \quad -\{x, T\} + q(x)\,\dot{x}^2 = Q(T) \qquad \text{(qQ)}$$

bestehenden Beziehungen. Die Symbole $\{X, t\}$, $\{x, T\}$ bezeichnen die schwarzschen Ableitungen:

$$\{X, t\} = \frac{1}{2}\frac{X'''}{X'} - \frac{3}{4}\frac{X''^2}{X'^2}, \quad \{x, T\} = \frac{1}{2}\frac{\dddot{x}}{\dot{x}} - \frac{3}{4}\frac{\ddot{x}^2}{\dot{x}^2}.$$

Den Kern der Theorie bildet die auf E. E. Kummer (1834) zurückgehende Erkenntnis, dass Lösungen X, x der Diffgen (Qq), (qQ) die Integrale Y, y der Diffgen (Q), (q) ineinander überführen, u. zwar im Sinne der Formeln:

$$\text{(T)} \qquad y(t) = \frac{Y[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}}, \qquad Y(T) = \frac{y[x(T)]}{\sqrt{\dot{x}(T)}}.$$

Ein wichtiger Abschnitt der Transformationstheorie bezieht sich auf oszillatorische Diffgen (q), (Q) mit dem Definitionsintervall ($-\infty, \infty$). „Oszillatorisch“ soll heissen, dass die Integrale von (q), (Q) in beiden Richtungen unendlich oftmal verschwinden. In diesem Falle definiert man im Intervall ($-\infty, \infty$), vermöge linearer Abbildungen der Integralräume r, R der Diffgen (q), (Q) aufeinander und vermöge geeigneter Zuordnung von Nullstellen je zwei entsprechender Integrale $y \in r$, $Y \in R$, gewisse Funktionen, die sogen. allgemeinen Dispersionen der Diffgen (q), (Q). Diese sind genau die im Intervall ($-\infty, \infty$) definierten Lösungen der Diffgen (Qq), (qQ). Zwischen diesen Lösungen und denjenigen der Diffgen (qq), (QQ) bestehen bemerkenswerte Zusammenhänge, die bei Einführung einer geeigneten algebraischen Operation, als Struktureigenschaften eines algebraischen Systems gedeutet werden können.

Die vorliegende Arbeit enthält eine Bearbeitung dieser Erkenntnisse. Sie bildet einen Beitrag zu den in meinen früheren Arbeiten über die erwähnte Transformationstheorie erzielten Ergebnisse im Falle oszillatorischer Diffgen (q), (Q).[1])

II. *Vorbereitung*

1. *Allgemeines.* In diesem Kapitel wollen wir die zum Verständniss der weiteren Überlegungen notwendigen Vorkenntnisse zusammenstellen.

Wir betrachten in den folgenden Ausführungen lineare oszillatorische Diffgen 2. Ordnung vom Jacobischen Typus

$$\text{(q)} \qquad y'' = q(t)\, y$$

mit stetigen „Trägern“ $q(t)$ in dem Intervall $j = (-\infty, \infty)$.

Es sei (q) eine Diffg dieser Art.

Unter einem *Integral* der Diffg (q) verstehen wir stets eine im (ganzen) Intervall j erklärte Lösung von (q). Das Integral $y \equiv 0$ schliessen wir von unseren Betrachtungen aus.

Unter einer *Basis* (u, v) *der Diffg* (q) verstehen wir eine zweigliedrige Folge von (linear) unabhängigen Integralen u, v von (q).

Unter dem *Integralraum* der Diffg (q) verstehen wir die aus allen Integralen von (q) bestehende Menge. Unter einer *Basis des Integralraumes* der Diffg (q) verstehen wir eine Basis dieser Diffg.

2. *Phasen.* Unter einer *ersten Phase einer Basis* (u, v) der Diffg (q) versteht man jede im Intervall j stetige und daselbst mit Ausnahme der Nullstellen des Integrals v der Gleichung $\operatorname{tg} \alpha = u : v$ genügende Funktion α.

Ähnlich definiert man vermöge der Formel $\operatorname{tg} \beta = u' : v'$ die *zweiten Phasen* β *der Basis* (u, v). Die im Folgenden in Betracht kommenden Phasen sind stets die ersten Phasen. Aus diesem Grunde sprechen wir im Weiteren kürzer von Phasen anstatt von ersten Phasen.

[1]) Man vergleiche das Literaturverzeichnis in [1].

Die Phasen der Basis (u, v) bilden ein abzählbares System, das sogen. (erste) *Phasensystem* der Basis (u, v), dessen Elemente sich voneinander um ganzzahlige Vielfache der Zahl π unterscheiden.

Es sei α eine Phase der Basis (u, v).

Die Funktion α hat im Intervall j folgende Eigenschaften:

1. α ist von beiden Seiten unbegrenzt; 2. $\alpha \in C_3$; 3. $\alpha' \neq 0$.

Ferner bestehen im Intervall j die Formeln:

$$u = \varepsilon\sqrt{|w|}\,\frac{\sin\alpha}{\sqrt{|\alpha'|}}, \quad v = \varepsilon\sqrt{|w|}\,\frac{\cos\alpha}{\sqrt{|\alpha'|}}, \tag{1}$$

wobei $\varepsilon = \pm 1$ und w $(= uv' - u'v)$ die wronskische Determinante der Basis (u, v) bezeichnet. Die Phase α heisst *eigentlich* oder *uneigentlich* bezüglich der Basis (u, v), jenachdem ob $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ ist.

Zwischen der Phase α und dem Träger q der Diffg (q) bestehen an jeder Stelle $t \in j$ die Beziehungen:

$$q(t) = -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t) \quad \text{bzw.} \quad q(t) = -\{\operatorname{tg}\alpha, t\}. \tag{2}$$

Unter einer *Phase der Diffg* (q) versteht man eine Phase irgendeiner Basis von (q). Zu beliebigen Zahlen t_0; α_0, $\alpha'_0 (\neq 0)$, α''_0 gibt es genau eine Phase α der Diffg (q) mit den Anfangswerten: $\alpha(t_0) = \alpha_0$, $\alpha'(t_0) = \alpha'_0$, $\alpha''(t_0) = \alpha''_0$ ([2]).

Jede im Intervall j erklärte „Phasenfunktion" α, d. h. eine Funktion α mit den obigen Eigenschaften 1.—3. stellt eine Phase einer Diffg (q), u. zwar derjenigen mit dem vermöge der Formeln (2) bestimmten Träger q, dar.

3. *Zentraldispersionen von der ersten Art.* Unter der *Zentraldispersion* (Zldsion) *von der ersten Art* und mit dem Index ν $(= 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ der Diffg (q) versteht man die im Intervall j folgendermassen definierte Funktion $\varphi_\nu(t)$:

An jeder Stelle $t \in j$ ist der Wert $\varphi_n(t)$, $\varphi_{-n}(t)$ der Zldsion φ_n bezw. φ_{-n} $(n = 1, 2, \ldots)$ die n-te mit t rechtsseitig bezw. linksseitig konjugierte Zahl (erster Art). M. a. W.: Betrachtet man ein an der Stelle t verschwindendes Integral y der Diffg (q), so stellt $\varphi_n(t)$ bezw. $\varphi_{-n}(t)$ die n-te rechts bezw. links von t liegende Nullstellen von y. $\varphi_0(t)$ bezeichnet die Funktion t.

Insbesondere heisst die Funktion φ_1 die *Fundamentaldispersion von der ersten Art* der Diffg (q); sie wird kürzer mit φ bezeichnet.

Neben den oben erklärten Zldsionen von der ersten Art gibt es Zldsion von der 2., 3., 4. Art der Diffg (q). Die im Folgenden in Betracht kommenden Zldsionen sind stets Zldsionen von der ersten Art. Aus diesem Grunde sprechen wir im Weiteren kürzer von Zldsionen der Diffg (q) anstatt von Zldsionen von der ersten Art.

Es sei φ_ν ($\nu = 0, +1, +2, \ldots$) eine beliebige Zldsion der Diffg (q). Die Funktion φ_ν hat im Intervall j folgende Eigenschaften:

$$1.\ \varphi_\nu(t) > \varphi_{\nu-1}(t);\qquad 2.\ \varphi_0 \in C_3;\qquad 3.\ \varphi_\nu'(t) > 0;$$

$$4.\ \lim_{t\to-\infty} \varphi_\nu(t) = -\infty,\ \lim_{t\to\infty} \varphi_\nu(t) - \infty.$$

Die zu φ_ν inverse Funktion φ_ν^{-1} fällt mit $\varphi_{-\nu}$ zusammen.

Jede Phase α der Diffg (q) steht im Intervall j mit der Zldsion φ_ν in folgender (sogenannter abelscher) Beziehung:

$$\alpha\,\varphi_\nu(t) = \alpha(t) + \nu\pi \operatorname{sgn} \alpha'. \tag{3}$$

4. *Die schwarzsche Ableitung.* Wir betrachten im Intervall j beliebige Funktionen $X, Y \in C_3$, deren Ableitungen X', Y' stets von Null verschieden sind: $X' \neq 0 \neq Y'$.

Wir erinnern an die folgenden Eigenschaften der schwarzschen Ableitungen:

1. Die schwarzsche Ableitung der zusammengesetzten Funktion $X(Y(t))$ (kürzer: XY) erfüllt an jeder Stelle $t \in j$ die Formel:

$$\{XY, t\} = \{X, Y(t)\}\, Y'^2(t) + \{Y, t\}. \tag{4}$$

2. Die schwarzschen Ableitungen $\{X, t\}$, $\{Y, t\}$ fallen im Intervall j dann und nur dann zusammen, also: $\{X, t\} = \{Y, t\}$, wenn die Funktionen X, Y miteinander projektiv zusammenhängen:

$$Y(t) = \frac{c_{11} X(t) + c_{12}}{c_{21} X(t) + c_{22}}; \tag{5}$$

$t \in j$; $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} =$ Konst.

III. *Lineare Abbildungen der Integralräume der Diffgen* (q) (Q) *aufeinander*

5. *Einleitung.* Wir betrachten zwei oszillatorische Diffgen (q), (Q) im Intervall $j = (-\infty, \infty)$. r, R seien ihre Integralräume, (u, v), (U, V) beliebige Basen von r, R und w, W die wronskischen Determinanten dieser Basen.

Jedes Integral $y \in r$ von (q) hat in bezug auf die Basis (u, v) bestimmte konstante Koordinaten c_1, c_2: $y = c_1 u + c_2 v$, und dasselbe gilt von jedem Integral $Y \in R$ von (Q): $Y = C_1 U + C_2 V$. Umgekehrt gehört zu jeder zweigliedrigen Folge von Konstanten c_1, c_2 bezw. C_1, C_2 genau ein Integral $y \in r$ von (q) bezw. genau ein Integral $Y \in R$ von (Q) mit den Koordinaten c_1, c_2 bezw. C_1, C_2.

Wir definieren nun eine lineare Abbildung (kurz: l. Abg) p des Integralraumes r auf den Integralraum R so, dass wir jedem Integral $y \in r$ von (q),

$$y \quad \lambda u + \mu v,$$

das mit denselben Konstanten λ, μ gebildete Integral $Y \in R$ von (Q) zuordnen:

$$Y = \lambda U + \mu V.$$

Das Bild Y von y in der 1. Abg. p bezeichnen wir py, also: $Y = py$; gelegentlich schreiben wir auch $y \to Y$ (p), kürzer: $y \to Y$. Die Basen (u, v), (U, V) nennen wir die *erste* bezw. *zweite Basis der l. Abg. p*. Offenbar haben wir: $u \to U$, $v \to V$ (p). Wir sagen, die 1. Abg. p sei durch die Basen (u, v), (U, V) (in dieser Anordnung) bestimmt; dies drücken wir auch so aus: $p = [u \to U,\ v \to V]$. Die Zahl $w : W$ heisst die *Charakteristik* der 1. Abg p; Bezeichnung: χp.

Die 1. Abg. p ist auch durch eine beliebige erste Basis $(\bar{u}, \bar{v})$ und die zweite Basis $(p\bar{u}, p\bar{v})$ bestimmt, also: $p = [\bar{u} \to p\bar{u},\ \bar{v} \to p\bar{v}]$. Die wronskischen Determinanten der Basen $(\bar{u}, \bar{v})$, $(p\bar{u}, p\bar{v})$ unterscheiden sich von w, W durch dieselbe von Null verschiedene multiplikative Konstante; wir sehen: die Charakteristik der 1. Abg p hängt von der Wahl ihrer Basen nicht ab.

In der 1. Abg p werden zwei voneinander unabhängige Integrale der Diffg (q) auf ebensolche Integrale von (Q) abgebildet. Die Bilder von zwei voneinander abhängigen Integralen der Diffg (q) sind voneinander abhängig und unterscheiden sich voneinander durch dieselbe multiplikative Konstante wie ihre Urbilder.

Von zwei 1. Abgen des Integralraumes r auf den Integralraum R sagen wir, sie haben denselben oder den entgegengesetzten Charakter, jenachdem ob ihre Charakteristiken dasselbe Vorzeichen haben oder nicht.

Es sei $c \neq 0$ eine beliebige Zahl. Die durch die Basen (u, v), (cU, cV) bestimmte 1. Abg bezeichnen wir mit cp, also: $cp = [u \to cU,\ c \to cV]$. Diese 1. Abg bildet jedes Integral $y \in r$ von (q) auf das Integral $c.py \in R$, also auf ein von py abhängiges Integral von (Q) ab. Wir sagen, die 1. Abg cp sei *linear abhängig*, kürzer: *abhängig*, von p; gelegentlich nennen wir sie eine *Abänderung von p*. Die Charakteristik von cp ist $(1 : c^2) . (w : W)$, also: $\chi cp = (1 : c^2) \chi p$. Folglich haben die 1. Abgen p und cp denselben Charakter. Die Nullstellen der Bilder jedes Integrals $y \in r$ von (q) in den 1. Abgen p und cp sind offenbar dieselben.

6. Neben der 1. Abg p wollen wir nun eine 1. Abg P des Integralraumes R von (Q) auf den Integralraum R einer weiteren Diffg (Q) betrachten.

Für die erste Basis von P dürfen wir (U, V) wählen; die zweite sei (U, V): $P = [U \to U,\ V \to V]$. Mit W bezeichnen wir die wronskische Determinante von (U, V). Wir haben also: $\chi P = W : W$. Wir zeigen:

Die zusammengesetzte Abbildung $P = Pp$ des Integralraumes r auf den Integralraum R ist die 1. Abg $P = [u \to U,\ v \to V]$. Ihre Charakteristik ist das Produkt von χP, χp, also:

$$\chi Pp = \chi P .\ \chi p. \tag{6}$$

In der Tat, es sei $y \in r$ ein beliebiges Integral von (q) und ferner $Y = py$, $Y = PY$. Sodann bestehen die mit geeigneten Konstanten λ, μ gebildeten Beziehungen:

$$y = \lambda u + \mu v,\ Y = \lambda U + \mu V,\ Y = \lambda U + \mu V,$$

und aus ihnen folgt der erste Teil unserer Behauptung. Die Charakteristik χP ist offenbar $w : W$ ($(w : W)$ $(W : W)$), womit auch der zweite Teil bewiesen ist.

Die zu der 1. Abg p inverse Abbildung p^{-1} des Integralraumes R auf den Integralraum r ist die 1. Abg $p^{-1} = [U \to u,\ V \to v]$. Ihre Charakteristik ist der reziproke Wert von p, also:

$$\chi p^{-1} = (\chi p)^{-1}. \tag{7}$$

In der Tat, die zu der 1. Abg p inverse Abbildung p^{-1} des Integralraumes R auf den Integralraum r ist so definiert, dass $p^{-1}\, p$ die identische Abbildung e des Integralraumes r auf sich darstellt: $p^{-1} p = e$. Daraus folgt der erste Teil unserer Behauptung. Nun ist offenbar $e = [u \to u,\ v \to v]$, $\chi e = 1$. Folglich ist nach (6) (für $P = p^{-1}$) auch der zweite Teil richtig.

7. Die obigen Betrachtungen kommen natürlich auch dann zu Geltung, wenn einige von den Diffgen (q), (Q), (Q) und folglich auch die entsprechenden Integralräume r, R, R zusammenfallen.

Betrachten wir insbesondere den Fall $Q = Q = q$, $R = R = r$. In diesem Falle handelt es sich um 1. Abgen des Integralraumes r der Diffg (q) auf sich. Eine solche 1. Abg p ist durch eine erste und zweite Basis (u, v), (U, V) der Diffg (q) in dem obigen Sinne bestimmt: $p = [u \to U,\ v \to V]$. Die aus zwei 1. Abgen $p = [u \to V,\ v \to V]$, $P = [U \to U,\ V \to V]$ des Integralraumes r auf sich zusammengesetzte Abbildung Pp ist die 1. Abg $Pp = [u \to U,\ v \to V]$ von r auf sich und es gilt eine Formel wie (6). Die 1. Abg $p^{-1} = [U \to u,\ V \to v]$ ist die zu p inverse 1. Abg des Integralraumes r auf sich und es besteht eine Formel wie (7). Ferner gilt: $p^{-1} p = e$, $\chi e = 1$.

8. *Bestimmung der 1. Abgen vermöge Phasen.* Es sei $p = [u \to U,\ v \to V]$ eine 1. Abg des Integralraumes r von (q) auf den Integralraum R von (Q).

Wir wählen beliebige (erste) Phasen α, A der Basen (u, v), (U, V) der 1. Abg p. Sodann haben wir nach (1):

$$u = \varepsilon\sqrt{|w|}\,\frac{\sin\alpha}{\sqrt{|\alpha'|}},\quad v = \varepsilon\sqrt{|w|}\,\frac{\cos\alpha}{\sqrt{|\alpha'|}},\tag{8}$$

$$U = E\sqrt{|W|}\,\frac{\sin A}{\sqrt{|\dot{A}|}},\quad V = E\sqrt{|W|}\,\frac{\cos A}{\sqrt{|\dot{A}|}},$$

ε, E sind gleich $+1$ oder -1, jenachdem ob die Phasen α, A bezüglich der Basen (u, v), (U, V) eigentlich sind oder nicht.

Die mit beliebigen Koordinaten $\lambda = \gamma \cos k_2$, $\mu = \gamma \sin k_2$ $(\gamma > 0$, $0 \leqslant k_2 < 2\pi)$, in bezug auf die Basen (u, v), (U, V) gebildeten Integrale $y = \lambda u + \mu v$ $(\in r)$, $Y = \lambda U + \mu V$ $(\in R)$ von (q), (Q) können offenbar so ausgedrückt werden:

$$y = k_1 \frac{\sin(\alpha + k_2)}{\sqrt{|\alpha'|}},\quad Y = \frac{\varepsilon E}{\sqrt{|\chi p|}} \cdot k_1 \frac{\sin(A + k_2)}{\sqrt{|\dot{A}|}} \qquad (k_1 = \varepsilon\sqrt{|w|}\,\gamma).\tag{9}$$

Wir sehen: Bei jeder Wahl der Phasen α, A der Basen (u, v), (U, V) der 1. Abg p ist die 1. Abg p durch die Formel $y \rightarrow Y$ gegeben; y, Y stellen je zwei mit beliebigen Konstanten $k_1\,(\neq 0)$, $0 \leqslant k_2 < 2\pi$ im Sinne der Formeln (9) definierte Integrale der Diffgen (q), (Q) dar.

Wir nennen eine zweigliedrige Folge (α, A) von Phasen der Basen (u, v), (U, V) der 1. Abg p eine *Phasenbasis* von p. Bei jeder Wahl der Phasenbasis (α, A) der 1. Abg p bestehen also für je zwei Integrale $y \in r$, $Y = py \in R$ die mit denselben Konstanten k_1, k_2 gebildeten Formeln (9).
Aus den Formeln (8) erhalten wir die Beziehung:

$$\operatorname{sgn}\chi p = \operatorname{sgn}\alpha' \,.\, \operatorname{sgn}\dot{A}.\tag{10}$$

Wir sehen: Die Charakteristik χp ist positiv, wenn beide Phasen α, A wachsen oder abnehmen; sie ist negativ, wenn eine von diesen Phasen wächst und die andere abnimmt.

Wir haben gesehen (Nr. 5), dass die 1. Abg p auch durch eine beliebige erste Basis $(\bar{u}, \bar{v})$ der Diffg (q) und die zweite Basis $(p\bar{u}, p\bar{v})$ bestimmt werden kann. Daraus geht hervor: Als erstes Glied einer Phasenbasis (α, A) der 1. Abg p kann eine beliebige Phase α der Diffg (q) gewählt werden; sodann ist das zweite Glied A bis auf ganzzahlige Vielfache der Zahl π eindeutig bestimmt.

9. Wir wollen nun wieder neben der 1. Abg p eine 1. Abg P des Integralraumes R von (Q) auf den Integralraum R einer weiteren Diffg (Q) betrachten.

Es sei (α, A) eine Phasenbasis von p und (A, A) diejenige von P. ε, E, $\bar{E}$ sollen für die Phasen α, A, A die übliche Bedeutung haben.

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit der folgenden Sätze:

Die zusammengesetzte 1. Abg Pp des Integralraumes r auf den Integralraum R lässt die Phasenbasis (α, A) zu und es bestehen für je zwei Integrale $y \in r$, $\bar{Y} = Ppy \in R$ die Formeln:

$$(11) \qquad y - k_1 \frac{\sin(\alpha + k_2)}{\sqrt{\alpha'}}, \quad Y = \sqrt{\frac{\varepsilon EE}{\chi P| \cdot \chi p}}\, k_1 \frac{\sin(A' + k_2)}{\sqrt{\bar{A}'}} .$$

Die zu der 1. Abg p inverse 1. Abg p^{-1} des Integralraumes R auf den Integralraum r lässt die Phasenbasis (A, α) zu und es bestehen für je zwei Integrale $Y \in R$, $y = p^{-1}\, Y \in r$ die Formeln:

$$(12) \qquad Y = k_1 \frac{\sin(A + k_2)}{\sqrt{\dot{A}}}, \quad y = \varepsilon E \sqrt{\chi p|}\, k_1 \frac{\sin(\alpha + k_2)}{\sqrt{\alpha'|}} .$$

Jede Phasenbasis der identischen 1. Abg e des Integralraumes r auf sich ist offenbar: $(\alpha, \alpha + n\pi)$, n ganz; α ist eine (beliebige) Phase der Diffg (q).

10. Oben haben wir zu jeder 1. Abg p des Integralraumes r auf den Integralraum R zweigliedrige Folgen von Phasen α, A der Diffgen (q), (Q), die Phasenbasen von p, zugeordnet, u. zwar so, dass sich jedes Integral $y \in r$ und sein Bild $Y = py \in R$ vermöge der Formeln (9) ausdrücken lassen.

Umgekehrt folgt aus den Formeln (8), (9):

Beliebige Phasen a, A der Diffgen (q), (Q) bilden eine Phasenbasis (a, A) unendlich vieler voneinander abhängiger 1. Abgen cp $(c \neq 0)$ des Integralraumes r auf den Integralraum R. Man erhält die Basen (u, v), (U, V) einer 1. Abg p aus diesem System im Sinne der Formeln (8), bei beliebiger Wahl der Konstanten ε, $E = \pm 1$; w, W $(\neq 0)$, und es gelten für jedes Integral $y \in r$ und sein Bild $Y = py \in R$ Formeln wie (9).

11. *Normierte lineare Abbildungen.* Wir übernehmen die obigen Bezeichnungen.

Es seien $p = [u \to U, v \to V]$, $P = [U \to U, V \to V]$ beliebige 1. Abgen des Integralraumes r von (q) auf den Integralraum R von (Q) bezw. des Integralraumes R auf den Integralraum R von (Q). Ferner seien (α, A), (A, A) irgendwelche Phasenbasen dieser 1. Abgen p, P.

Es seien z, $Z \in j$ beliebige Zahlen.

Wir nennen die 1. Abg p *normiert in bezug auf die Zahlen* z, Z (in dieser Anordnung), wenn sie jedes Integral $y \in r$ von (q), welches an der Stelle z verschwindet, auf ein an der Stelle Z verschwindendes Integral $Y \in R$ von (Q) abbildet. M. a. W., wenn aus $y(z) = 0$ die Beziehung $py(Z) = 0$ folgt.

Offenbar ist die 1. Abg p normiert in bezug auf die Zahlen z, Z, wenn sie ein (einziges) Integral $y \in r$ von (q), welches an der Stelle z verschwindet, auf ein an der Stelle Z verschwindendes Integral $Y \in R$ von (Q) abbildet.

Man sieht: Ist $y \in r$ ein beliebiges Integral von (q) und $Y \in R$ sein Bild in der 1. Abg p, so ist die 1. Abg p normiert in bezug auf jede Nullstelle von y und jede Nullstelle von Y.

Ferner: Ist die 1. Abg p normiert in bezug auf die Zahlen z, Z so hat auch jede von p abhängige 1. Abg cp $(c \neq 0)$ dieselbe Eigenschaft.

Wichtig ist der folgende

S a t z. *Die 1. Abg p ist normiert in bezug auf die Zahlen z, Z dann und nur dann, wenn sich die Werte $\alpha(z)$, $A(Z)$ der Glieder von (α, A) an den Stellen z, Z um ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl π unterscheiden, also:* $\alpha(z) - A(Z) = n\pi$, *n ganz.*

B e w e i s. Es sei $y \in r$ ein an der Stelle z verschwindendes Integral von (q), also $y(z) = 0$, und ferner $Y \quad py \in R$ sein Bild in der 1. Abg p. Es bestehen also die mit geeigneten Konstanten k_1, k_2 gebildeten Formeln (9) und die Zahl $\alpha(z) + k_2$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von π.

Ist die 1. Abg p normiert in bezug auf die Zahlen z, Z, so gilt: $Y(Z) = 0$. Sodann ist die Zahl $A(Z) + k_2$ ein ganzzahliges Vielfaches von π und dasselbe gilt offenbar auch von der Zahl $\alpha(z) - A(Z)$.

Ist umgekehrt $\alpha(z) - A(Z)$ ein ganzzahliges Vielfache von π, so gilt dies auch von der Zahl $A(Z) + k_2$ und daraus folgt: $Y(Z) = 0$. Damit ist der Beweis beendet.

Ferner zeigen wir:

Ist die 1. Abg p normiert in bezug auf die Zahlen z, Z, so ist sie auch normiert in bezug auf je zwei Zahlen $\bar{z}$, $Z \in j$ von denen z mit z und Z mit Z konjugiert ist. Wenn umgekehrt p in bezug auf die Zahlen z, Z und zugleich in bezug auf zwei Zahlen $\bar{z}$, $Z \in j$ normiert ist, wobei z mit z oder Z mit Z konjugiert ist, so ist z mit z und Z mit Z konjugiert.

B e w e i s. Die 1. Abg p sei normiert in bezug auf die Zahlen z, Z, also: $\alpha(z) - A(Z) - n\pi$, n ganz.

a. Es seien $\bar{z}, Z \in j$ beliebige Zahlen, von denen z mit z und Z mit Z konjugiert ist. Wir haben also $\bar{z} \quad \varphi_\nu(z)$, $Z = \Phi_N(Z)$, wobei φ_ν, Φ_N geeignete Zldsionen der Diffgen (q) bezw. (Q) bezeichnen. Nun ergibt die abelsche Funktionalgleichung (3):

$$\alpha(z) = \alpha(z) + \nu\pi \,.\, \operatorname{sgn} \alpha', \quad A(Z) = A(Z) + N\pi \,.\, \operatorname{sgn} \dot{A}.$$

Wir sehen, dass die Zahl $\alpha(z) - A(Z)$ ein ganzzahliges Vielfaches von π ist.

b. Es sei p in bezug auf die Zahlen z, Z normiert und z. B. die Zahl $\bar{z}$ mit z konjugiert. Sodann ist $\alpha(\bar{z}) - A(Z)$ ein ganzzahliges Vielfaches von π und dasselbe gilt (nach der abelschen Funktionalgleichung) von der Zahl $\alpha(z) - \alpha(z)$. Wir haben also: $A(Z) - A(Z) = m\pi$, m ganz, und diese Beziehung ergibt, im Hinblick auf die abelsche Funktionalgleichung: $Z = \Phi_M(Z)$, mit $M = m \,.\, \operatorname{sgn} \dot{A}$.

Ferner überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der folgenden Aussagen:

Sind die 1. Abgen p, P normiert in bezug auf die Zahlen z, Z bezw. Z, Z, so ist die zusammengesetzte 1. Abg Pp normiert in bezug auf z, Z.

Ist die 1. Abg p normiert in bezug auf die Zahlen z, Z, so ist die inverse 1. Abg p^{-1} normiert in bezug auf Z, z.

Ist die identische 1. Abg e des Integralraumes r auf sich normiert in bezug auf die Zahlen z, Z, so sind diese miteinander konjugiert.

12. Wir zeigen:

Ist die 1. Abg p des Integralraumes r von (q) auf den Integralraum R von (Q) normiert in bezug auf die Zahlen z, $Z \in j$, so besitzt sie eine Phasenbasis (α, A), deren Glieder an den Stellen z bezw. Z verschwinden: $\alpha(z) = 0$, $A(Z) - 0$.

B e w e i s. Nehmen wir an, p sei normiert in bezug auf die Zahlen z, Z. Wir wissen, dass man als erstes Glied einer Phasenbasis von p eine beliebige Phase von (q) wählen darf, wonach dann das zweite Glied bis auf ganzzahlige Vielfache der Zahl π eindeutig bestimmt ist. Wählen wir also als erstes Glied einer Phasenbasis (α, A) von p eine beliebige Phase α von (q), die an der Stelle z verschwindet: $\alpha(z) = 0$. Sodann gilt, da p in bezug auf z, Z normiert ist: $A_0(Z)$ $n\pi$, n ganz. Ersetzt man nun die Phase A_0 von (Q) durch $A = A_0 - n\pi$, so bilden die Phasen α, A eine Phasenbasis von p mit der erwünschten Eigenschaft.

Wir nennen eine Phasenbasis (α, A) einer in bezug auf die Zahlen z, Z, normierten 1. Abg p, *kanonische Phasenbasis in bezug auf die Zahlen* z, Z, falls ihre Glieder α, A an den Stellen z, Z verschwinden: $\alpha(z) = 0$, $A(Z) = 0$.

Offenbar gelten die folgenden Aussagen:

Sind (α, A), (A, A) kanonische Phasenbasen der 1. Abgen p, P in bezug auf die Zahlen z, Z, bezw. Z, Z, so stellt (α, A) eine kanonische Phasenbasis der 1. Abg Pp in bezug auf die Zahlen z, Z dar.

Ist (α, A) eine kanonische Phasenbasis der 1. Abg p in bezug auf die Zahlen z, Z, so stellt (A, α) eine kanonische Phasenbasis der inversen 1. Abg. p^{-1} in bezug auf die Zahlen Z, z dar.

Jede kanonische Phasenbasis der identischen 1. Abg e des Integralraumes r auf sich in bezug auf die Zahlen z, $\varphi_\nu(z)$ hat die Form $(\alpha, \alpha\varphi_{-\nu})$, wobei α eine an der Stelle z verschwindende Phase der Diffg (q) bezeichnet: $\alpha(z) = 0$.

IV. *Allgemeine Dispersionen der Differentialgleichungen* (q), (Q)

Wir kommen nun zu der eigentlichen Theorie der allgemeinen Dispersionen der Diffgen (q), (Q). Wir übernehmen die obigen Begriffe und Bezeichnungen.

13. *Die Grundzahlen und Grundintervalle der Diffg* (q). Es sei $t_0 \in j$ eine beliebige Zahl. Ferner sei t_ν die ν-te mit t_0 konjugierte Zahl, also $t_\nu = \varphi_\nu(t_0)$; $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Die Zahlen t_ν sind also die Nullstellen jedes an der Stelle t_0 verschwindenden Integrals v von (q): t_ν fällt mit t_0 zusammen oder sie stellt die ν-te nach t_0 folgende oder dieser Zahl vorangehende Nullstelle von v, jenachdem ob $\nu = 0$ oder $\nu > 0$ oder $\nu < 0$ ist.

Wir nennen t_ν die *ν-te Grundzahl der Diffg* (q) *in bezug auf* t_0, kürzer: die ν-te Grundzahl.

Das Intervall $j_\nu = [t_\nu, t_{\nu+1})$ bezw. $\bar{j}_\nu = (t_{\nu-1}, t_\nu]$ nennen wir das *ν-te rechtsseitige* bezw. *linksseitige Grundintervall der Diffg* (q) *in bezug auf* t_0, kürzer: das *ν-te rechtsseitige* bezw. *linksseitige Grundintervall der Diffg* q *in bezug auf* t_0 kürzer: das *ν-te rechtsseitige* bezw. *linksseitige Grundintervall.*

Offenbar haben die Grundintervalle j_ν und $\bar{j}_\nu$ genau die Zahl t_ν gemeinsam; das Innere von j_ν fällt mit dem Inneren von $\bar{j}_{\nu+1}$ zusammen.

Jede Zahl $t \in (-\infty, \infty)$ liegt in einem wohlbestimmten Grundintervall j_ν bezw. $\bar{j}_\mu$; im Falle $t = t_\nu$ haben wir $\mu = \nu$, im Falle $t \neq t_\nu$: $\mu = \nu + 1$. Insbesondere liegt jede Nullstelle eines beliebigen Integrals y von (q) in einem wohlbestimmten Grundintervall j_ν bezw. $\bar{j}_\mu$; umgekehrt enthält jedes Grundintervall j_ν bezw. $\bar{j}_\mu$ genau eine Nullstelle von y.

14. *Der Dispersionsbegriff.* Wir wollen nun jeder normierten 1. Abg p des Integralraumes r von (q) auf den Integralraum R von (Q) eine in dem Intervall $j = (-\infty, \infty)$ definierte Funktion X zuordnen.

Es sei p eine in bezug auf die (beliebig gewählten) Zahlen $t_0, T_0 \in j$ normierte 1. Abg des Integralraumes r auf den Integralraum R.

Mit t_ν, T_ν bezeichnen wir die Grundzahlen der Diffgen (q), (Q) in bezug auf t_0, T_0; mit j_ν, J_ν die rechtsseitigen und mit $\bar{j}_\nu$, $\bar{J}_\nu$ die linksseitigen Grundintervalle der Diffgen (q), (Q) in bezug auf t_0, T_0; $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Es sei $t \in (-\infty, \infty)$ eine beliebige Zahl und y ein an der Stelle t verschwindendes Integral der Diffg (q); die Zahl t liegt in einem wohlbestimmten rechtsseitigen ν-ten Grundintervall j_ν.

Nun definieren wir den Wert $X(t)$ der Funktion X an der Stelle t, je nach dem Falle $\chi p > 0$ oder $\chi p < 0$, so:

Im Falle $\chi p > 0$ ist $X(t)$ die in dem rechtsseitigen ν-ten Grundintervall J_ν liegende Nullstelle des Integrals py von (Q);

Im Falle $\chi p < 0$ ist $X(t)$ die in dem linksseitigen $-\nu$-ten Grundintervall $\bar{J}_{-\nu}$ liegende Nullstelle des Integrals py von (Q).

Die Funktion X nennen wir die *allgemeine Dispersion der Diffgen* (q), (Q) (in dieser Anordnung) *in bezug auf die Zahlen* t_0, T_0 *und die* *l. Abg p*; kürzer: die allgemeine Dispersion (a. Dsion). Die Zahlen t_ν, T_ν sind die *Grundzahlen* und insbesondere t_0, T_0 die *Anfangszahlen* der a. Dsion X. Die 1. Abg p heisst die *Erzeugende von* X. Im Falle $\chi p > 0$ nennen wir die a. Dsion X *direkt*, im Falle $\chi p < 0$ *indirekt*. Im Falle $Q = q$ sprechen wir kürzer von der a. Dsion X der Diffg (q).

Die a. Dsion der Diffgen (q), (Q) in bezug auf dieselben Zahlen t_0, T_0 und eine von p abhängige 1. Abg cp $(c \neq 0)$ fällt mit X zusammen, da die 1. Abg cp wieder in bezug auf t_0, T_0 normiert ist und die Nullstellen der Bilder py, cpy jedes Integrals y von (q) dieselben sind.

Wir sehen: Die a. Dsion X ist durch ihre Anfangszahlen t_0, T_0 und die Erzeugende p eindeutig bestimmt.

Offenbar gelten, je nach dem Falle $\chi p > 0$ oder $\chi p < 0$ die Formeln

$$X(t_\nu) = T_\nu \text{ oder } X(t_\nu) = T_{-\nu}, \tag{13}$$

und ferner, an jeder Stelle $t \in (t_\nu, t_{\nu+1})$:

$$X(t) \in (T_\nu, T_{\nu+1}) \text{ oder } X(t) \in (T_{-\nu-1}, T_{-\nu}), \tag{14}$$
$$(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

15. *Eigenschaften der allgemeinen Dispersionen.* Grundlegend für die Theorie der a. Dsionen ist der folgende

Satz. *Es sei X die a. Dsion mit den Anfangszahlen t_0, T_0 und der Erzeugenden p. Ferner sei (α, A) eine kanonische Phasenbasis von p in bezug auf die Zahlen t_0, T_0. Sodann erfüllt die a. Dsion X im Intervall $(-\infty, \infty)$ die Funktionalgleichung:*

$$\alpha(t) = A(X(t)). \tag{16}$$

Beweis. Es sei $x \in (-\infty, \infty)$ eine beliebige Zahl. Dieselbe liegt in einem wohlbestimmten Intervall j_ν. Folglich haben wir, im Hinblick auf $\alpha(t_0) = 0$:

$$\nu\pi \leqslant \alpha(x) < (\nu + 1) \text{ oder } -(\nu + 1)\pi < \alpha(x) \leqslant -\nu\pi, \tag{17}$$

jenachdem ob $\operatorname{sgn} \alpha' = +1$ oder $= -1$ ist.

Es sei $y \in r$ ein an der Stelle x verschwindendes Integral der Diffg (q). Dasselbe ist vermöge der mit geeigneten Konstanten k_1, k_2 gebildeten Formel (9) gegeben. Da $y(x) = 0$ ist, so haben wir:

$$\alpha(x) + k_2 = n\pi, \; n \text{ ganz}. \tag{18}$$

Das Integral $Y = py \in R$ von (Q) ist vermöge der mit denselben Konstanten k_1, k_2 gebildeten Formel (9) gegeben. Nun ist aber nach der Definition von X die Zahl $X(x)$ eine Nullstelle des Integrals Y. Wir haben also:

(19) $$A(X(x)) + k_2 = N\pi, \ N \text{ ganz.}$$

Aus den Beziehungen (18), (19) folgt:

(20) $$\alpha(x) - A(X(x)) = m\pi, \ m \text{ ganz.}$$

Nun unterscheiden wir zwei Fälle, jenachdem ob $\chi p > 0$ oder $\chi p < 0$ ist. Im Falle $\chi p > 0$ liegt die Zahl $X(x)$ im Intervall $\mathfrak{J}_\nu$. Folglich haben wir, im Hinblick auf $A(T_0) = 0$:

(21) $$\nu\pi \leqslant A(X(x)) < (\nu + 1)\pi \text{ oder } -(\nu + 1)\pi < A(X(x)) \leqslant -\nu\pi,$$

jenachdem ob $\operatorname{sgn} \dot{A} = +1$ oder -1 ist.

Da nun (nach (10)) $\operatorname{sgn} \alpha' . \operatorname{sgn} \dot{A} = +1$ ist, so bestehen die ersten Ungleichungen (17) und (21) oder die zweiten. In beiden Fällen erhalten wir aus diesen Ungleichungen:

(22) $$-\pi < \alpha(x) - A(X(x)) < \pi.$$

Dies ergibt, zusammen mit (20): $\alpha(x) - A(X(x)) = 0$.

Im Falle $\chi p < 0$ liegt die Zahl $X(x)$ im Intervall $\mathfrak{J}_{-\nu}$. Folglich haben wir ähnlich wie oben:

(23) $$-(\nu + 1)\pi < A(X(x)) \leqslant -\nu\pi \text{ oder } \nu\pi \leqslant A(X(x)) < (\nu + 1)\pi,$$

jenachdem ob $\operatorname{sgn} \dot{A} = +1$ oder $= -1$ ist.

Nun ist (nach (10)) $\operatorname{sgn} \alpha' . \operatorname{sgn} \dot{A} = -1$ und folglich bestehen die ersten Ungleichungen (17) und die zweiten (23) oder die zweiten Ungleichungen (17) und die ersten (23). In beiden Fällen erhalten wir aus diesen Ungleichungen wieder die Formeln (22) und ferner: $\alpha(x) - A(X(x)) = 0$.

Damit ist der Beweis beendet.

Die Bedeutung der Funktionalgleichung (16) besteht darin, dass man bei ihrer Anwendung Eigenschaften der a. Dsionen vermöge deren der Phasen der Diffgen (q), (Q) zu ermitteln vermag.

Wir betrachten eine a. Dsion X. Es seien t_0, T_0 ihre Anfangszahlen und p die Erzeugende. Ferner sei (α, A) eine kanonische Phasenbasis der 1. Abg p in bezug auf die Zahlen t_0, T_0. Nach dem obigen Satz gilt also im Intervall $(-\infty, \infty)$ die Funktionalgleichung (16).

1. *Es besteht für $t \in (-\infty, \infty)$ die Formel:*

(24) $$X(t) = A^{-1}\alpha(t);$$

A^{-1} bedeutet natürlich die zu der Phase A inverse Funktion.

Dies folgt unmittelbar aus der Funktionalgleichung (16).

2. *Die Funktion X wächst im Intervall $(-\infty, \infty)$ von $-\infty$ nach ∞ oder nimmt in diesem Intervall von ∞ nach $-\infty$ ab, jenachdem ob sie direkt oder indirekt ist.*

In der Tat, ist z. B. die a. Dsion X direkt, so gilt (nach (10)): $\operatorname{sgn} \alpha' . \operatorname{sgn} \dot{A} = +1$. Wir sehen, dass beide Funktionen α, A im Intervall $(-\infty, \infty)$ wachsen von $-\infty$ nach ∞ oder beide nehmen von ∞ nach $-\infty$ ab. Daraus folgt im Hinblick auf (24) der entsprechende Teil unserer Behauptung.

3. *Die zu der a. Dsion X inverse Funktion X^{-1} ist die von der zu p inversen* 1. *Abg p^{-1} erzeugte a. Dsion $x(T)$ der Diffgen* (Q), (q), *mit den Anfangszahlen T_0, t_0.*

Beweis. Die Formel (24) zeigt, dass die zu X inverse Funktion X^{-1} die folgende ist;

$$X^{-1}(T) = \alpha^{-1} A(T).$$

Nun ist aber (A, α) eine kanonische Phasenbasis der zu p inversen 1. Abg p^{-1} in bezug auf die Zahlen T_0, t_0 (12). Daraus folgt: $X^{-1}(T) = x(T)$.

4. *Die a. Dsion X ist im Intervall* $(-\infty, \infty)$ *dreimal stetig differenzierbar und es bestehen an je zwei homologen* (d. h. durch die Beziehungen $X = X(t)$, $t = X^{-1}(X)$ an einander gebundenen) *Stellen t, $X \in (-\infty, \infty)$ insbesondere die Formeln:*

$$(25)\qquad \begin{aligned} X'(t) &= \frac{\alpha'(t)}{\dot{A}(X)}; \quad X''(t) = \frac{1}{\dot{A}^3(X)}\left[\alpha''(t)\dot{A}^2(X) - \alpha'^2(t)\ddot{A}(X)\right], \\ \dot{A}(X) &= \frac{\alpha'(t)}{X'(t)}, \quad \ddot{A}(X) = \frac{1}{X'^3(t)}\left[\alpha''(t)X'(t) - X''(t)\alpha'(t)\right]. \end{aligned}$$

In der Tat, der erste Teil unserer Behauptung folgt unmittelbar aus der Formel (24), da die Funktionen α, A im Intervall $(-\infty, \infty)$ dreimal stetig differenzierbar sind. Den zweiten Teil erhält man vermöge zweimaliger Differentiation der Funktionalgleichung (16).

5. *Die erste Ableitung X' der a. Dsion X ist im Intervall $(-\infty, \infty)$ stets positiv oder stets negativ, jenachdem ob diese letztere direkt oder indirekt ist* $\operatorname{sgn} X' = \operatorname{sgn} \alpha' . \operatorname{sgn} \dot{A}$.

Dies folgt aus dem obigen Satz 2. und der ersten Formel (25).

6. *Es besteht für $t \in (-\infty, \infty)$ die Formel:*

$$(26)\qquad X[\varphi_\nu(t)] = \Phi_{\nu \operatorname{sgn} X'}[X(t)]; \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

φ_ν, Φ_ν bezeichnet die ν-te Zldsion der Diffg (q) *bezw.* (Q).

Beweis. Die Funktionalgleichung (16) ergibt an der Stelle $\varphi_\nu(t)$ die Beziehung

$$\alpha\varphi_\nu(t) = AX\varphi_\nu(t),$$

und ferner, im Hinblick auf (3):

$$A X(t) + \nu\pi \,.\, \operatorname{sgn} \alpha' \quad A X \varphi_\nu(t).$$

Die links stehende Funktion kann offenbar so ausgedrückt werden: $A X(t) + (\nu . \operatorname{sgn} \alpha' . \operatorname{sgn} \dot{A}) \pi . \operatorname{sgn} \dot{A}$ und ferner, da $\operatorname{sgn} \alpha' . \operatorname{sgn} \dot{A} - \operatorname{sgn} X'$ ist, so: $A\Phi_{\nu \operatorname{sgn} X'}[X(t)]$. Wir haben also:

$$A\Phi_{\nu \operatorname{sgn} X'}[X(t)] = A X \varphi_\nu(t)$$

und daraus folgt die Formel (26).

7. *Die a. Dsion X stellt im Intervall* $(-\infty, \infty)$ *eine Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung 3. Ordnung*:

$$\text{(Qq)} \qquad -\{X, t\} \quad Q(X) X'^2 \quad q(t)$$

dar.

Beweis. Es sei t eine beliebige Zahl. Nach dem Satz in Nr. 15. gilt an der Stelle t und in deren Umgebung die Funktionalgleichung (16). Bildet man hier beiderseits die schwarzsche Ableitung, so kommt im Hinblick auf (4) und die erste Formel (25) die Beziehung

$$\{X, t\} + [\{A, X\} + A'^2(X)] X'^2 \quad \{\alpha, t\} + \alpha'^2(t)$$

heraus. Wegen (2) ist dies die Beziehung (Qq).

Die Beziehung (Qq) nennen wir die *Differentialgleichung der allgemeinen Dispersionen der Differentialgleichungen* (q), (Q), kürzer: die a. Dispersionsgleichung.

8. *Die zu der a. Dsion X inverse Funktion x stellt im Interval:* $(-\infty, \infty)$ *eine Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung 3. Ordnung l*

$$\text{(qQ)} \qquad -\{x, T\} + q(x)\dot{x}^2 = Q(T)$$

dar.

Dies ist im Hinblick auf die obigen Sätze 3 und 7 unmittelbar ersichtlich.

Der folgende Satz bringt die Bedeutung der a. Dsionen für die gegenseitige Transformation von Integralen der Diffgen (q), (Q) zum Ausdruck.

9. *Nach eventueller Abänderung der 1. Abg p transformiert die a. Dsion X und die zu ihr inverse Funktion x je zwei einander entsprechende Integrale $y = p^{-1} Y \in r$ und $Y \quad py \in R$ der Diffgen* (q) *und* (Q) *ineinander, im Sinne der Formeln:*

$$\text{(27)} \qquad y(t) = \frac{Y[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)}}, \quad Y(T) \quad \frac{y[x(T)]}{\sqrt{|\dot{x}(T)}}$$

$$(t, T \in (-\infty, \infty)).$$

Beweis. Wir wissen (Nr. 8.) dass dür jedes Integral $y \in r$ von (q) und sein Bild $Y - py \in R$ die Formeln (9) bestehen. Aus ihnen folgt im Hinblick auf (16) und (25):

$$Y[X(t)] = \frac{\varepsilon E}{\sqrt{|\chi p|}} \sqrt{\frac{|\alpha'(t)|}{|\dot{A} X(t)|}}\, y(t) = \frac{\varepsilon E}{\sqrt{|\chi p|}} \sqrt{|X'(t)|}\, y(t),$$

$$y[x(T)] = \varepsilon E \sqrt{|\chi p|} \sqrt{\frac{|\dot{A}(T)|}{|\alpha'[x(T)]|}}\, Y(T) = \varepsilon E \sqrt{|\chi p|} \sqrt{|\dot{x}(T)|}\, Y(T).$$

Ersetzt man nun die 1. Abg p durch ihre Abänderung $(\varepsilon E : \sqrt{|\chi p|})\, p$, so gelten für diese abgeänderte Erzeugende von X die Formeln (27).

10. Wir wollen nun neben der 1. Abg p eine in bezug auf die Zahlen T_0, Z_0 (Z_0 beliebig) normierte 1. Abg P des Integralraumes R auf den Integralraum R betrachten; (A, A) sei eine kanonische Basis von P in bezug auf T_0, Z_0.

Wir wissen: Die zusammengesetzte 1. Abg Pp des Integralraumes r auf den Integralraum R ist normiert in bezug auf die Zahlen t_0, Z_0 und lässt bezüglich dieser letzteren die kanonische Phasenbasis (α, A) zu.

Es seien X, X die von den 1. Abgen p, P erzeugten a. Dsionen der Diffgen (q), (Q) bezw. (Q), (Q), mit den Anfangszahlen t_0, T_0 bezw. T_0, Z_0.

Wir zeigen:

Die zusammengesetzte Funktion XX ist die von der 1. Abg Pp erzeugte a. Dsion X der Diffgen (9), (Q) *mit den Anfangszahlen* t_0, Z_0.

Beweis. Aus den Formeln

$$X(t) = A^{-1}\alpha(t), \quad \bar{X}(T) = \bar{A}^{-1} A(T) \quad (t, T \in (-\infty, \infty))$$

haben wir:

$$XX(t) - \bar{A}^{-1}\alpha(t).$$

Nun ist aber $(\alpha, \bar{A})$ die kanonische Phasenbasis der 1. Abg Pp in bezug auf die Zahlen t_0, Z_0. Daraus folgt, im Hinblick auf (24): $XX(t) - X(t)$.

16. *Bestimmungselemente der a. Dsionen.* Wir wissen, dass durch die Anfangszahlen und eine in bezug auf sie normierte 1. Abg p stets genau eine a. Dsion bestimmt ist. Wir wollen uns nun zunächst mit der Frage befassen, inwieweit a. Dsionen durch eine gegebene 1. Abg p als ihre Erzeugende charakterisiert sind. Wir übernehmen die obigen Bezeichnungen.

1. *Es sei p eine 1. Abg des Integralraumes r von* (q) *auf den Integralraum R von* (Q). *Durch die 1. Abg p ist genau ein abzählbares System*

von a. Dsionen der Diffgen (q), (Q) *mit der Erzeugenden p bestimmt. Ist $X(t)$ eine a. Dsion aus diesem System, so ist dieses letztere von den Funktionen $X\varphi_\nu(t)$, ν 0, + 1, ± 2,..., gebildet.*

Beweis. Es sei X die a. Dsion der Diffgen (q), (Q) mit den Anfangszahlen t_0, T_0 und der Erzeugenden p. Wir betrachten eine kanonische Phasenbasis (α, A) von p in bezug auf die Zahlen t_0, T_0. Es gilt also: $\alpha(t_0) - 0$, $A(T_0) = 0$ und wir haben eine Formel wie (16).

a. Es sei Z eine a. Dsion der Diffgen (q), (Q) mit den Anfangszahlen t_0, Z_0 und der Erzeugenden p. Sodann haben wir $Z_0 = Z(t_0)$ und die 1. Abg p ist normiert in bezug auf die Zahlen t_0, Z_0. Es gilt also: $Z_0 = \Phi_\nu(t_0)$, mit einem geeigneten Index ν.

Nun sehen wir aus der identischen Beziehung $A(T) - A\Phi_{-\nu}\Phi_\nu(T)$, dass die Funktion $A\Phi_\nu(T)$ an der Stelle Z_0 verschwindet. Folglich ist $(\alpha, A\Phi_{-\nu})$ eine kanonische Phasenbasis der 1. Abg p in bezug auf die Zahlen t_0, Z_0, und wir haben nach (16), für $t \in (-\infty, \infty)$:

$$AX(t) = \alpha(t) = A\Phi_{-\nu}Z(t).$$

Aus diesen Beziehungen folgt: $X(t) = \Phi_{-\nu}Z(t)$ und ferner: $Z(t) = \Phi_\nu X(t)$. Diese Formel ergibt im Hinblick auf (26): $Z(t) = X_{\varphi\pm\nu}(t)$.

b. Wir betrachten nun die mit einer beliebigen Zentraldispersion φ_ν der Diffg (q) gebildete Funktion $X\varphi_\nu$.

Da die 1. Abg p in bezug auf die Zahlen t_0, T_0 normiert ist, so gilt dies auch in bezug auf die Zahlen $\varphi_{-\nu}(t_0)$, T_0. Aus der identischen Beziehung $\alpha(t) = \alpha\varphi_\nu\varphi_{-\nu}(t)$ sehen wir, dass die Funktionen $\alpha\varphi_\nu$ für $\varphi_{-\nu}(t_0)$ verschwindet. Folglich ist $(\alpha\varphi_\nu, A)$ eine kanonische Phasenbasis der 1. Abg p in bezug auf die Zahlen $\varphi_{-\nu}(t_0)$, T_0. Es sei Z die a. Dsion der Diffgen (q), (Q) mit den Anfangszahlen $\varphi_{-\nu}(t_0)$, T_0 und der Erzeugenden p. Sodann haben wir nach (16), für $t \in (-\infty, \infty)$:

$$\alpha\varphi_\nu(t) = AZ(t)$$

und ferner

$$AX(t) = \alpha(t) - AZ\varphi_{-\nu}(t).$$

Aus diesen Beziehungen folgt: $Z(t) = X\varphi_\nu(t)$. Damit ist der Beweis beendet.

Zweitens wollen wir zeigen, dass a. Dsionen der Diffgen (q), (Q) vermöge Anfangsbedingungen zweiter Ordnung eindeutig bestimmt werden können. Darüber gilt der folgende Satz:

2. *Es seien t_0; X_0, X'_0 $(\neq 0)$, X''_0 beliebige Zahlen. Es gibt genau eine a. Dsion X der Diffgen* (q), (Q) *mit den Anfangsbedingungen:*

$$X(t_0) = X_0,\ X'(t_0) - X'_0,\ X''(t_0) = X''_0. \tag{28}$$

Diese a. Dsion X ist direkt oder iudirekt, jenachdem ob $X'_0 > 0$ oder $X'_0 < 0$ ist.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, es gäbe eine den obigen Anfangsbedingungen genügende a. Dsion X. Dieselbe ist durch die Anfangszahlen t_0, X_0 und eine in bezug auf diese Zahlen normierte 1. Abg p des Integralraumes r auf den Integralraum R eindeutig bestimmt. Wir wählen eine kanonische Phasenbasis (a, A) von p in bezug auf die Zahlen t_0, Z_0 u. zwar so, dass

$$(29) \qquad a(t_0) = 0, \quad a'(t_0) = 1, \quad a''(t_0) - 0.$$

Sodann erfüllt die a. Dsion X im Intervall $(-\infty, \infty)$ eine Funktionalgleichung wie (16) und die Formeln (25) ergeben die Werte der Funktionen $\dot{A}$, $\ddot{A}$ an der Stelle X_0. Auf diese Weise bekommen wir die Werte:

$$(30) \qquad A(X_0) = 0, \quad \dot{A}(X_0) = 1 : X'_0, \quad \ddot{A}(X_0) = -X'_0 : X'^3_0,$$

vermöge deren die erste Phase A der Diffg (Q) eindeutig bestimmt ist (Nr. 2.2).

Wir sehen: Jede a. Dsion X mit den obigen Anfangswerten (28), fällt mit derjenigen die durch die Anfangszahlen t_0, X_0 und die Erzeugende p bestimmt ist, zusammen. Die Erzeugende p ist durch die vermöge der Anfangswerte (29), (30) eindeutig gegebene Phasenbasis (a, A) bestimmt.

Damit ist der Beweis beendet.

Wir sehen: Die a. Dsionen der Diffgen (q), (Q) bilden ein von drei Parametern X_0, X'_0, X''_0 stetig abhängendes System.

15. *Integration der Diffg* (Qq). Die obigen Resultate setzen uns in Stand alle im Intervall $(-\infty, \infty)$ definierten regulären Integrale der nichtlinearen Diffg 3. Ordnung (Q, q) zu bestimmen. Unter einem regulären Integral X der Diffg (Qq) verstehen wir ein solches, dessen Ableitung X' stets von Null verschieden ist.

Wir beweisen den folgenden

Satz. *Alle im Intervall* $(-\infty, \infty)$ *definierten regulären Integrale der Diffg* (Qq) *sind genau die allgemeinen Dispersionen der Diffgen* (q), (Q).

Beweis. a. Es sei X eine a. Dsion der Diffgen (q), (Q). Nach 15. 5, 7 stellt diese Funktion im Intervall $(-\infty, \infty)$ eine reguläre Lösung der Diffg (Qq) dar.

b. Es sei nun X eine im Intervall $(-\infty, \infty)$ definierte Lösung der Diffg (Qq).

Wir wählen eine beliebige Zahl t_0 und die vermöge der Anfangswerte

$$a(t_0) = 0, \quad a'(t_0) = 1, \quad a''(t_0) = 0,$$

$$A(X_0) \quad 0, \quad \dot{A}(X_0) - 1 : X'_0, \quad \ddot{A}(X_0) - -X''_0 : X'^3_0$$

bestimmte erste Phasen α, A der Diffgen (q), (Q). X_0, X'_0, X''_0 sind natürlich die Werte von X, X', X'' an der Stelle t_0.

Sodann haben wir im Intervall $(-\infty, \infty)$:

$$-\{\operatorname{tg} \alpha, t\} = q(t), \quad -\{\operatorname{tg} A, X\} - Q(X),$$

und ferner, da die Funktion X die Diffg (Qq) befriedigt,

$$-\{X, t\} - \{\operatorname{tg} A, X\} . X'^2 - - \{\operatorname{tg} \alpha, t\}.$$

Daraus folgt nach (4)

$$\{\operatorname{tg} A(X), t\} = \{\operatorname{tg} \alpha, t\}$$

und ferner, im Hinblick auf (2):

$$\operatorname{tg} A(X) = \frac{c_{11} \operatorname{tg} \alpha(t) + c_{12}}{c_{21} \operatorname{tg} \alpha(t) + c_{22}},$$

wobei $c_{11}, \ldots, c_{22}$ geeignete Konstante bedeuten.

Nun ergeben die obigen Anfangswerte der Phasen α, A: $c_{12} = 0$, $c_{11} = c_{22}$, $c_{21} = 0$, und ferner:

$$\alpha(t) = A(X).$$

Folglich ist X durch die Anfangszahlen t_0, X_0 und die vermöge der Phasenbasis (α, A) bestimmte 1. Abg p des Integralraumes r von (q) auf den Integralraum R von (Q) definierte a. Dsion der Diffgen (q), (Q). Damit ist der Beweis beendet.

18. *Das Halbgruppoid der a. Dsionen zweier linearen Diffgen 2. Ordnung.* Wir betrachten nun die nichtlinearen Diffgen 3. Ordnung der a. Dsionen:

$$(qq), (qQ), (Qq), (QQ)$$

und bezeichnen mit $G_{11}, G_{12}, G_{21}, G_{22}$ die von den im Intervall $(-\infty, \infty)$ definierten regulären Integralen dieser Diffgen gebildeten Mengen. Es ist also z. B. G_{11} die Menge der a. Dsionen der Diffg (q); G_{12} diejenige der a. Dsion der Diffgen (Q), (q), usw.

Wir wissen: Die identische a. Dsion $X(t) = t$ liegt in den Mengen G_{11}, G_{22}.

Ferner: Die zu jeder beliebigen a. Dsion $x_{\alpha\beta} \in G_{\alpha\beta}$ inverse Funktion $x_{\alpha\beta}^{-1}$ liegt in der Menge $G_{\beta\alpha}$: $x_{\alpha\beta}^{-1} \in G_{\beta\alpha}$ $(\alpha, \beta - 1{,}2)$.

Es seien $x_{\alpha\beta} \in G_{\alpha\beta}$, $y_{\beta\gamma} \in G_{\beta\gamma}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1{,}2)$ beliebige a. Dsionen der entsprechenden Diffgen (q) bezw. (Q). Es ist leicht einzusehen, dass die vermöge von Zusammensetzung dieser a. Dsionen definierte Funktion $x_{\alpha\beta}\, y_{\beta\gamma}$ (Achtung auf die Anordnung) eine in der Menge $G_{\alpha\gamma}$ enhaltene

a. Dsion ergibt: $x_{\alpha\beta} y_{\beta\gamma} \in G_{\alpha\gamma}$, und dass umgekehrt, jedes Element $z_{\alpha\gamma} \in G_{\alpha\gamma}$ das Resultat der Zusammensetzung von geeigneten a. Dsionen $x_{\alpha\beta} \in G_{\alpha\beta}$, $y_{\beta\gamma} \in G_{\beta\gamma}$ darstellt: $x_{\alpha\beta}\, y_{\beta\gamma} = z_{\alpha\gamma}$. Diesen Sachverhalt wollen wir durch die Formel

$$G_{\alpha\beta}\, G_{\beta\gamma} = G_{\alpha\gamma} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1{,}2)$$

oder durch die leicht zu verstehende „Multiplikationstafel" ausdrücken:

	G_{11}	G_{12}	G_{21}	G_{22}
G_{11}	G_{11}	G_{12}	—	—
G_{12}	—	—	G_{11}	G_{12}
G_{21}	G_{21}	G_{22}	—	—
G_{22}	—	—	G_{21}	G_{22}

Wir wollen nun in der Vereinigungsmenge $\Gamma = G_{11} \cup G_{12} \cup G_{21} \cup G_{22}$ eine binäre Multiplikation (Verknüpfungsregel) einführen u. zwar vermöge von Zusammensetzung von Funktionen. Sodann haben, wie aus der obigen Tafel ersichtlich ist, gewisse zweigliedrige Folgen von Elementen $a, b \in \Gamma$ das Produkt $ab = c \in \Gamma$, während andere zweigliedrige Folgen kein in der Menge Γ enthaltenes Produkt zu besitzen brauchen. Die Menge Γ (zusammen mit dieser Multiplikation) bildet ein algebraisches Gebilde, das sogenannte *Halbgruppoid der a. Dsionen der Diffgen* (q), (Q).

Aus den obigen Überlegungen sehen wir:

Die Mengen G_{11}, G_{22} sind Gruppen mit dem gemeinsamen Einselement $(1 =)\ X(t) = t$. Die Mengen G_{12}, G_{21} bestehen aus paarweise inversen Elementen.

Aus $G_{11}\, G_{12} = G_{12}$, $G_{12}\, G_{22} = G_{12}$ sehen wir: Die Gruppe G_{11} ist ein linksseitiger und die Gruppe G_{22} ein rechtsseitiger Operatorenbereich der Menge G_{12}.

Aus $G_{22}\, G_{21} = G_{21}$, $G_{21}\, G_{11} = G_{21}$ folgt: Die Gruppe G_{22} ist ein linksseitiger und die Gruppe G_{11} ein rechtsseitiger Operatorenbereich der Menge G_{21}.

Somit kommen wir zu der folgenden Struktur des Halbgruppoids Γ der a. Dsionen der Diffgen (q), (Q):

Das Halbgruppoid Γ besteht aus zwei Gruppen G_{11}, G_{22} mit gemeinsamen Einselement 1, und aus zwei weiteren miteinander äquivalenten Mengen G_{12}, G_{21}. Diese Mengen besitzen die beiden Produkte $G_{12}\, G_{21}$ und $G_{21}\, G_{12}$, die mit den Gruppen G_{11} und G_{22} zusammenfallen, und bestehen aus paarweise zugeordneten Elementen, deren Produkte stets das Einelement 1 der Gruppen G_{11}, G_{22} sind. Die Gruppe G_{11} ist ein linksseitiger und die Gruppe G_{22} ein rechtsseitiger Operatorenbereich der Menge G_{12}; ähnlich stellt die Gruppe G_{11} einen rechtsseitigen und die Gruppe G_{22} einen linksseitigen Operatorenbereich der Menge G_{21} dar.

Wir wollen unsere Überlegungen mit der folgenden Bemerkung abschliessen: Die Gruppen G_{11}, G_{22} haben stets die aus dem Einselement I bestehende Gruppe $\{I\}$ gemeinsam. In besonderen Fällen kann jedoch ihr Durchschnitt eine breitere Gruppe sein. Dies tritt z. B. ein, wenn die beiden Diffgen (q), (Q) dieselbe Fundamentaldispersion φ haben. In diesem Fall enthält der Durchschnitt $G_{11} \cap G_{22}$ die aus allen Zentraldispersionen φ_v der beiden Diffgen (q), (Q) bestehende unendliche zyklische Gruppe.

LITERATUR

1. Borůvka O. — *Transformation of Ordinary Second-Order Differential Equations.* Differential Equations and Their Applications. Proceedings of the Conference held in Prague in September 1962. Prague (1963), 27—38.
2. Borůvka O. — *Sur les transformations linéaires complètes du second ordre.* Ann. di Mat. p. ed app. 49 (1960), 229—252.

ASUPRA DISPERSIUNILOR GENERALE ALE ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE LINIARE DE ORDINUL AL DOILEA

Rezumat

Teoria transformărilor ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordinul al doilea în domeniul real se ocupă în esenţă de relaţiile care există între soluţiile ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordinnl al doilea (q) şi (Q) şi acelea ale ecuaţiilor diferenţiale de ordinul al treilea neliniare (Qq) şi (qQ). Simbolurile $\{X, t\}$, $\{x, T\}$ reprezintă derivatele lui Schwarz.

Nucleul teoriei îl constituie faptul cunoscut de la E. E. Kummer (1834) că soluţii X, x ale ecuaţiilor diferenţiale (Qq), (qQ) transformă unele în altele integrale Y, y ale ecuaţiilor diferenţiale (Q), (q) şi anume în sensul formulelor (T). O secţiune importantă a teoriei transformărilor se referă la ecuaţii diferenţiale oscilatorii (q), (Q) cu domeniul de definiţie $(-\infty, +\infty)$. „Oscilator" înseamnă că integralele ecuaţiilor (q) şi (Q) se anulează de o infinitate de ori în ambele sensuri. În acest caz se definesc în intervalul $(-\infty, +\infty)$ prin intermediul unor transformări liniare care duc spaţiile integrale r, R ale ecuaţiilor diferenţiale (q), (Q), unul în altul şi prin intermediul unei corespondenţe convenabile a zerourilor unor integrale corespunzătoare $y \in r$, $Y \in R$, anumite funcţii, aşanumitele dispersiuni generale ale ecuaţiilor diferenţiale (q), (Q). Acestea sînt tocmai soluţiile ecuaţiilor diferenţiale (Qq), (qQ), definite în intervalul $(-\infty, +\infty)$. Între aceste soluţii şi acelea ale ecuaţiilor diferenţiale (qq), (QQ) există anumite relaţii remarcabile care, prin introducerea unui operator algebric convenabil, pot fi interpretate ca proprietăţi structurale ale unui sistem algebric.

Lucrarea de faţă conţine un studiu al acestor fapte.

ОБ ОЬЩИХ ДИСПЕРСИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Краткое содержание

Теория преобразованиий линейных дифференциальных уравнений второго порядка в действительной области занимается в сущности отношениями существующими Между решениями линейных дифференциальных уравнений второго порядка (q) и (Q) и решениями нелиненйных дифференциальных уравнений третьего порядка (Q q) и (q Q). Символы (X, t), (x, T) обозначают производные Шварца.

Ядро теории составляет тот факт известный еще Куммеру, что решения (X, x) дифференциальных уравнений (Q q), (q Q) преобразуют одни в другие интегралы (Y, y) дифференциальных уравнений (Q), (q) в смысле формул (T).

Значительная часть теории преобразований относится к колебательным дифференциальным уравнениям (q Q) с областью определения $(-\infty, \infty)$. „Колебательный", значит что интегралы уравнений (q Q) имеют в обоих направлениях, бесконечное число нулей. В этом случае определяются в интеграле $(-\infty, \infty)$, при помощи линейных преобразований которые преобразуют интегралы (r, R) дифференциальных уравнений (q, Q) один в другой, некоторые функции, так называемые общие дисперсии дифференциальных уравнений (q). Эги, функции, как разрешения дифференциальных уравнении (Q, q), (q ,Q) определенные в интервале $(-\infty, \infty)$. Между этими решениями и решениями дифференциальных уравнений (q q), (Q Q) существуют некоторые отношения которые при введении алгебраического оператора, могут быть интерпретированы как структурные свойства одной алгебрской системы.

Эта работа содержит исследование этих фактов.