Otakar Borůvka

Sur une application géométrique des dispersions centrales des équations différentielles linéaires du deuxième ordre

Ann. Mat. Pura Appl., IV. Ser., Vol. 71, 1966, 165-187

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500112

BORŮVKA, M. O.
1966
Annali di Matematica pura ed applicata
(IV), Vol. LXXI, pp. 165-188

Sur une application géométrique des dispersions centrales des équations différentielles linéaires du deuxième ordre.

Par M. O. BORŮVKA (à Brno).

En souvenir de Guido Castelnuovo, à l'occasion du premier centenaire de sa naissance.

Résumé. - *Sont étudiées les courbes planes caractérisées par la propriété d'être coupées par toute droite d'un faisceau de droites en au moins deux points et de telle façon que les tangentes de la courbe, dans les différents points d'intersection, sont mutuellement parallèles. L'étude est basée sur les notions empruntées de la théorie des équations différentielles linéaires ordinaires du deuxième ordre. Il s'agit des matières dans le domaine réel et de caractère global.*

I. - Introduction.

1. - Le présent Mémoire est consacré à l'étude de certaines questions gravitant autour des notions de phases et de dispersions centrales des équations différentielles linéaires du deuxième ordre. Ces notions, rappelons-le, interviennent dans la théorie des transformations des équations en question en tant que base d'un instrument efficace permettant de traiter de problèmes de caractère global, problèmes qui étaient souvent, nous paraît-il, inattaquables jusque-là. Indiquons, à titre d'exemple, la détermination de toutes les équations différentielles linéaires oscillatoires du deuxième ordre dont les intégrales s'annulent dans les mêmes points ([3], [4]).

Le point de départ et, en même temps, l'objet principal de nos recherches consiste en questions concernant les courbes douées de certaines propriétés centro-affines de caractère global et définies par les équations différentielles en question. C'est précisément l'étude de notions de la théorie des équations différentielles considérées, et, dans la plupart, l'étude des phases et des dispersions centrales, en relation avec les questions géométriques envisagées, qu'on trouve dans ce Mémoire.

II. - Position du problème.

2. - Nous allons commencer par définir une classe des courbes planes, courbes que nous appelons les courbes (F).

Etant donné un faisceau des droites, F, nous appelons *courbe* (F) toute courbe plane qui est liée au faisceau F de la manière suivante:

Chaque droite du faisceau F coupe la courbe en au moins deux points et de telle façon que, les tangentes de la courbe, dans les différents points d'intersection, sont mutuellement parallèles.

Pour la commodité de langage, une courbe (F) est dite *attachée au faisceau F.* Sous le *pôle* d'une courbe (F) nous entendons le centre du faisceau F.

En vue des méthodes appliquées dans la suite, nous ne considérons que les courbes (F) *régulières* c'est-à-dire localement convexes et sans points d'inflexion. Nous supposons de plus que, toute courbe (F) peut être déterminée par des coordonnées paramétriques, U, V, les fonctions U, V appartenant à la classe C_2 dans un intervalle ouvert, J.

Figurent parmi les courbes (F): les éllipses, dont chacune est attachée au faisceau des droites passant par son centre; les spirales logarithmiques, qui possèdent la même propriété par rapport aux pôles correspondants.

3. – Soit $\mathfrak{R}$ une courbe (F) définie par les coordonnées paramétriques, U, V, dans l'intervalle J.

D'abord, il est évident, en vertu de la définition même des courbes (F), que les fonctions U, V sont linéairement indépendantes. Cela entraîne qu'il existe une équation différentielle linéaire du deuxième ordre,

$$(\mathrm{A}) \qquad Y'' + AY' + BY = 0,$$

à coefficients A, B continus et pour laquelle les fonctions U, V forment un système d'intégrales.

De plus, on voit que, les propriétés de définition des courbes (F), indiquées ci-dessus, sont invariantes du point de vue de la géométrie centro-affine, c'est-à-dire invariantes par rapport aux transformations centro-affines et aux changements du paramètre de la courbe. Il en résulte, en particulier, que l'équation différentielle (A) est une équation de définition de la courbe $\mathfrak{R}$, les courbes intégrales de cette équation déterminant la courbe $\mathfrak{R}$ à des déplacements centro-affins près. Quant aux changements du paramètre, on en peut choisir pour réduire l'équation (A) à la forme jacobienne

$$(\mathrm{q}) \qquad y'' = q(t)y,$$

le coefficient q étant continu dans un intervalle ouvert $j = (a, b)$ (borné ou non).

On voit, en définitive, que la courbe $\mathfrak{R}$, rapportée à un paramètre convenable, t, peut être définie, à des déplacements centro-affins près, par une équation jacobienne (q).

Nous appelons, naturellement, l'équation (q) *l'équation de définition* de la courbe $\mathfrak{R}$.

4. – Convenons d'appeler *fonction (F)* toute fonction réelle, q, définie et continue dans un intervalle ouvert, $j = (a, b)$, et qui jouit de la propriété

que l'équation différentielle correspondante, (q), est une équation de définition d'une courbe (F).

Cela étant, on peut énoncer le problème traité dans ce Mémoire de la façon suivante:

Caractériser les fonctions (F) par des notions empruntées de la théorie des équations différentielles (ordinaires) du deuxième ordre. Déterminer toutes les fonctions (F) par des expressions explicites. Etudier les invariants centro-affins des courbes (F) et indiquer les équations finies de ces courbes.

Il s'agit, manifestement, de questions concernant le domaine de la géométrie différentielle centro-affine reéelle et globale.

III. - Préliminaires.

5. - Dans la suite nous aurons à considérer des équations différentielles linéaires ordinaires du deuxième ordre et de la forme jacobienne,

$$y'' = q(t)y, \tag{q}$$

dont les coefficients q sont définis et continus dans des intervalles ouverts, bornés ou non.

C'est pour la commodité du lecteur, que nous allons commencer par indiquer rapidement, en revue, quelques notions fondamentales et leurs propriétés envisagées dans la théorie des équations (q), en tant qu'elles nous seront utiles dans nos raisonnements.

6. - Amplitudes et phases.

Considérons une équation (q) dans un intervalle $j = (a, b)$.

Soit u, v une base de l'équation (q), c'est-à-dire un couple ordonné d'intégrales (linéairement) indépendantes de l'équation (q), et désignons par $w\,(= uv' - u'v)$ le wronskien correspondant.

On appelle la *première* resp. la *deuxième amplitude* de la base u, v la fonction, r resp. s, définie et constamment positive dans l'intervalle j:

$$r = \sqrt{u^2 + v^2}, \qquad s = \sqrt{u'^2 + v'^2}.$$

On appelle *première* resp. *deuxième phase* de la base u, v, toute fonction, α resp. β, qui est continue dans l'intervalle j et vérifie, dans cet intervalle, à l'exception des zéros de la fonction v resp. v', la relation:

$$tg\alpha = \frac{u}{v}, \qquad tg\beta = \frac{u'}{v'}. \tag{1}$$

En considérant les deuxièmes phases de la base u, v, on suppose que les zéros de la fonction v' sont isolés. Cette supposition se trouve réalisée si, par ex., la fonction q est toujours différente de zéro.

Il y a précisément un système dénombrable de premières et de même de deuxièmes phases de la base u, v, et les fonctions de chaque système ne diffèrent l'une de l'autre que par des multiples entiers de π.

Soit α resp. β une première resp. deuxième phase de la base u, v.

Ces fonctions jouissent, dans l'intervalle j, des propriétés suivantes:

$$\alpha \in C_3, \ \alpha' \neq 0 \quad \text{pour} \quad t \in j, \quad \beta \in C_1 \tag{2}$$

et satisfont, en particulier, aux relations

$$\alpha' = \frac{-w}{r^2}, \qquad \beta' = \frac{(-w)(-q)}{s^2}. \tag{3}$$

On se rend compte facilement que, les intégrales u, v et leurs dérivées, u', v', s'expriment, dans l'intervalle j, par les formules

$$u = \varepsilon \sqrt{|w|}\, \frac{\sin\alpha}{\sqrt{|\alpha'|}}, \qquad v = \varepsilon \sqrt{|w|}\, \frac{\cos\alpha}{\sqrt{|\alpha'|}},$$

$$\sqrt{|\beta'|}\, u' = \varepsilon' \sqrt{|wq|} \cdot \sin\beta; \quad \sqrt{|\beta'|}\, v' = \varepsilon' \sqrt{|wq|} \cdot \cos\beta,$$

ε, ε' étant ± 1, suivant le choix des phases α, β.

Ces formules entraînent, à leur tour,

$$r \cdot s \cdot \sin(\beta - \alpha) = \varepsilon\varepsilon'(-w).$$

On voit que les phases α, β satisfont, dans l'intervalle j, aux inégalités

$$n\pi < \beta - \alpha < (n+1)\pi, \tag{4}$$

n étant un nombre entier convenable qui est pair ou impair suivant que $\varepsilon\varepsilon'(-w) > 0$ ou < 0.

Finalement, subsiste, dans l'intervalle j, la relation

$$-\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t) = q(t), \tag{5}$$

$\{\alpha, t\}$ étant la dérivée schwarzienne de la fonction α au point t:

$$\{\alpha, t\} = \frac{1}{2}\frac{\alpha'''(t)}{\alpha'(t)} - \frac{3}{4}\frac{\alpha''^2(t)}{\alpha'^2(t)}.$$

Remarquons, que la formule (5) peut être écrite dans la forme plus condensée:

$$(6) \qquad -\{tg\,\alpha,\, t\} = q(t).$$

7. – Nous avons considéré jusqu'ici des amplitudes et des phases déterminées par une base de l'équation (q) et c'est ainsi que nous avons parlé d'amplitudes et de phases d'une *base* de l'équation (q).

Sous amplitude ou phase (soit 1-ère soit 2-ième) de l'*équation* (q), nous entendons une amplitude ou phase d'une base quelconque de l'équation (q). Deux phases α, β, de cette équation, appartenant à la même base, u, v, de (q), sont dites (mutuellement) *associées*.

Subsistent, par conséquent pour deux phases associées quelconques, α, β, inégalités telles que (4).

8. – Nombres conjugués de 1-ère et de 2-ième espèce.

Considérons une équation (q) dans l'intervalle $j = (a, b)$.

Etant donné un nombre $t \in j$, on dit qu'un nombre $z \in j$, $z \neq t$, est *conjugué de* 1-*ère espèce* avec t, si ce nombre z est un zéro d'une (et alors de toute) intégrale y de l'équation (q) s'annulant en t. Plus précisément, z est dit le *n-ième nombre conjugué de* 1-*ère espèce avec t à droite* resp. *à gauche*, s'il est le n-ième zéro de l'intégrale y, supérieur resp. inférieur à t $(n = 1, 2, \ldots)$.

Si z est le n-ième nombre conjugué de 1-ère espèce avec t à droite resp. à gauche alors t est le n-ième nombre conjugué de 1-ère espèce avec z à gauche resp. à droite.

On définie d'une manière analogue des nombres conjugués de 2-ième espèce avec t:

On dit qu'un nombre $z' \in j$, $z' \neq t$, est *conjugué de* 2-*ième espèce* avec t, si ce nombre z' est un zéro de la dérivée y' d'une (et alors de toute) intégrale y de l'équation (q) dont la dérivée s'annule en t. Plus précisément, z' est dit le *n-ième nombre conjugué de* 2-*ième espèce avec t à droite* resp. *à gauche*, s'il est le n-ième zéro de la fonction y', supérieur resp. inférieur à t $(n = 1, 2, \ldots)$.

Si z' est le n-ième nombre conjugué de 2-ième espèce avec t à droite resp. à gauche alors t est le n-ième nombre conjugué de 2-ième espèce avec z' à gauche resp. à droite.

9. – Dispersions centrales de 1-ère et de 2-ième espèce.

Continuons à considérer une équation (q) dans l'intervalle $j = (a, b)$.

Soit $n (= 1, 2, \ldots)$ un nombre arbitraire.

En premier lieu, supposons qu'il y a, dans l'intervalle j, des nombres admettant les n-ièmes nombres conjugués de 1-ère espèce à droite resp. à gauche. Alors, il y a aussi des nombres admettant les n-ièmes nombres conjugués de 1-ère espèce à gauche resp. à droite. L'ensemble formé par les nombres admettant les n-ièmes nombres conjugués de 1-ère espèce à droite resp. à gauche est un intervalle ouvert, $i_n \subset j$, resp. $i_{-n} \subset j$, dont la limite gauche resp. droite coïncide avec a resp. b. Il est facile de voir que, pour $\nu = 1, \ldots, n$ il y a dans l'intervalle j des nombres admettant les ν-ièmes nombres conjugués de 1-ère espèce à droite, et, en même temps, de tels qui admettent les ν-ièmes nombres conjugués de 1-ère espèce à gauche, et qu'on a les relations:

$$i_n \subset i_{n-1} \subset \ldots \subset i_1 \subset j; \qquad i_{-n} \subset i_{-n+1} \subset \ldots \subset i_{-1} \subset j.$$

Cela étant, soit $\nu = \pm 1, \ldots, \pm n$ un nombre quelconque.

Définissons, dans l'intervalle i_ν, la fonction φ_ν de manière que, pour chaque nombre $t \in i^\nu$, la valeur $\varphi_\nu(t)$ est le $|\nu|$-ième nombre conjugué de 1-ère espèce avec t, à droite ou bien à gauche, suivant que $\nu > 0$ ou bien $\nu < 0$. En d'autres termes, si l'on considère une intégrale de l'équation (q), y, s'annulant en t, alors la valeur $\varphi_\nu(t)$ représent le $|\nu$-ième zéro de cette intégrale y, supérieur ou bien inférieur à t.

La fonction φ_ν s'appelle la *dispersion centrale de* 1-*ère espèce d'indice* ν. En particulier, φ_1 est la dispersion (centrale) *fondamentale* de 1-ère espèce de l'équation (q). On écrit, pour simplifier, φ au lieu de φ_1 et on pose à l'occasion, pour $t \in j$: $\varphi_0(t) = t$.

Ces définitions étant rappelées, indiquons quelques propriétés des fonctions en question.

Soit φ_ν une dispersion centrale de 1-ère espèce quelconque ($\nu = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$).

Il est facile de voir que la fonction φ_ν admet la fonction inverse, φ_ν^{-1}, qui se confond avec $\varphi_{-\nu}$. On a par conséquent, dans l'intervalle $i_{-\nu}$, la relation $\varphi_{-\nu}(t) = \varphi_\nu^{-1}(t)$.

La fonction φ_ν se déduit de la dispersion fondamentale φ par des compositions successives appliquées à la fonction φ ou bien φ^{-1} suivant la formule:

$$\varphi_\nu(t) = \varphi^{(\nu)}(t), \tag{7}$$

le symbole dans le second membre désignant la fonction $\overbrace{\varphi\varphi \ldots \varphi}^{\nu}(t)$ ou $\overbrace{\varphi^{-1}\varphi^{-1} \ldots \varphi^{-1}}^{-\nu}(t)$ ou enfin t, d'après le cas $\nu > 0$ ou $\nu < 0$ ou bien $\nu = 0$.

La fonction φ_ν possède dans l'intervalle i_ν les propriétés suivantes:

$$1.\ \varphi_\nu(t) > \varphi_{\nu-1}(t). \qquad 2.\ \varphi_\nu \in C_3, \qquad 3.\ \varphi_\nu'(t) > 0. \tag{8}$$

En second lieu, supposons qu'il y a, dans l'intervalle j, des nombres admettant les n-ièmes nombres conjugués de 2-ième espèce à droite resp. à gauche. Nous nous bornons au cas: $q(t) < 0$ pour $t \in j$.

Dans ce cas on a une situation analogue à celle que nous venons d'examiner. En particulier, on a pour tout nombre $\nu = 1, \ldots, n$, dans l'intervalle j, des nombres admettant les ν-ièmes nombres conjugués de 2-ième espèce à droite et, en même temps, de tels qui admettent les ν-ièmes nombres conjugués de 2-ième espèce à gauche, et subsistent, pour les intervalles i'_ν, $i'_{-\nu}$ correspondants les relations:

$$i'_n \subset i'_{n-1} \subset \ldots \subset i'_1 \subset j; \qquad i'_{-n} \subset i'_{-n+1} \subset \ldots \subset i'_{-1} \subset j.$$

Soit alors $\nu = \pm 1, \ldots, \pm n$ un nombre quelconque.

On définit, dans l'intervalle i'_ν, la fonction ψ_ν de manière que, pour chaque nombre $t \in i'_\nu$, la valeur $\psi_\nu(t)$ est le $|\nu|$-ième nombre conjugué de 2-ième espèce avec t, à droite ou bien à gauche, suivant que $\nu > 0$ ou bien $\nu < 0$.

La fonction ψ_ν s'appelle la *dispersion centrale de* 2-*ième espèce d'indice* ν. En paticulier, ψ_1 est la dispersion (centrale) *fondamentale* de 2-ième espèce de l'équation (q). On écrit, pour simplifier, ψ au lieu de ψ_1 et on pose, à l'occasion, pour $t \in j$: $\psi_0(t) = t$.

Quant aux propriétés de la fonction ψ_ν nous nous bornons d'indiquer que la fonction en question possède dans l'intervalle i'_ν les propriétés suivantes:

$$1.\ \psi_\nu(t) > \psi_{\nu-1}(t), \qquad 2.\ \psi_\nu \in C_1, \qquad 3.\ \psi'_\nu(t) > 0. \tag{9}$$

10. - Relations abeliennes.

Subsiste pour toute 1-ère phase de l'équation (q), α, et pour les fonctions φ_ν, en tant qu'il en existe, dans les intervalles correspondants i_ν, la relation abelienne:

$$\alpha\varphi_\nu(t) = \alpha(t) + \nu\pi \cdot \operatorname{sgn} \alpha'. \tag{10}$$

De même, on a, en supposant que la fonction q est constamment négative,

$$\beta\psi_\nu(t) = \beta(t) + \nu\pi \cdot \operatorname{sgn} \beta', \tag{10'}$$

pour $t \in i'_\gamma$.

IV. - Fonctions polaires.

11. - Notion des fonctions polaires.

Dans la théorie qui nous occupe, les fonctions appelées polaires et associées aux équations (q) jouent un rôle important.

Nous allons introduire la théorie en question par le

Théorème. - *Pour que deux fonctions, α, β, définies dans un intervalle (ouvert), j, et jouissant des propriétés* (2), *soient des phases associées d'une équation* (q) *dans l'intervalle j, il faut et il suffit qu'elles satisfassent à la relation*

$$\beta(t)-\alpha(t)=\operatorname{Arc\,cotg}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha'(t)}\right]', \qquad (t\in j) \tag{11}$$

Arc cotg *étant une branche convenable de la fonction en question.*

Démonstration a. - Soient α, β deux phases associées et appartenant à la base u, v d'une équation (q) définie dans l'intervalle j,

Les fonctions α, β jouissent alors des propriétés (2) et subsistent les formules telles que (1), (4).

Or, on a, évidemment,

$$\operatorname{cotg}(\beta-\alpha)=-\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha}=-\frac{uu'+vv'}{uv'-u'v}=-\frac{1}{w}rr', \tag{12}$$

relations qui donnent, en vertu de (3), la formule (11).

b. - Soient α, β d'arbitraires fonctions définies dans un intervalle j et jouissant des propriétés (2), (11).

Définissons, dans l'intervalle j et d'après la formule (5), la fonction q. Alors, les fonctions

$$u=|\alpha'|^{-\frac{1}{2}}\sin\alpha, \qquad v=|\alpha'|^{-\frac{1}{2}}\cos\alpha \tag{13}$$

forment une base de l'équation (q). La fonction α constitue, évidemment, une 1-ère phase de la base u, v.

Or, les formules (13) entraînent

$$u'=\varepsilon|\alpha'|^{\frac{1}{2}}\left(\cos\alpha+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha'}\right)'\sin\alpha\right), \qquad v'=\varepsilon|\alpha'|^{\frac{1}{2}}\left(-\sin\alpha+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha'}\right)'\cos\alpha\right)$$

et, a fortiori, en vertu de (1),

$$\frac{u'}{v'} = \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}(\beta - \alpha)}{-\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}(\beta - \alpha)} = \operatorname{tg}\beta,$$

ce qui achève la dèmonstration.

Considérons une équation (q) dans l'intervalle j.

Soit u, v une base de l'équation (q) et α, β d'arbitraires phases associées et appartenant à la base en question.

La fonction

$$\vartheta(t) = \beta(t) - \alpha(t), \tag{14}$$

définie dans l'intervalle j, s'appelle *fonction polaire* de la base u, v. Les phases α, β, à leur tour, sont dites la 1-*ère et la* 2-*ième composante de* ϑ.

On voit qu'il y a précisément un système dénombrable de fonctions polaires de la base en question et que les fonctions de ce système diffèrent l'une de l'autre par des multiples entiers de π. Il en résulte, en particulier, que la fonction cotg $\vartheta(t)$, qui se présentera fréquemment dans nos recherches, ne dépend point du choix des phases α, β de la base u, v et se trouve par cette dernière complètement déterminée.

Les formnles (2), (4) montrent que, toute fonction polaire ϑ de la base u, v jouit dans l'intervalle j des propriétés suivantes:

$$\vartheta \in C_1, \; n\pi < \vartheta < (n+1)\pi \qquad (n \text{ entier}). \tag{15}$$

Quant à la détermination univoque de cotg ϑ par la base u, v, subsiste, d'après (11), pour la 1-ère composante de ϑ et, plus généralement, pour toute 1-ère phase, α, de chaque base cu, cv (c = const. $\neq 0$) la formule:

$$\operatorname{cotg}\vartheta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha'}\right)'. \tag{16}$$

Nous disons que la fonction polaire ϑ est *engendrée* par sa première camposante α.

Finalement remarquons, qu'on entend sous une fonction polaire de l'*équation* (q) une fonction polaire de n'importe quelle base de l'équation (q).

12. - Soit ϑ une fonction polaire de la base u, v de l'équation (q). Choisissons un nombre $t_0 \in j$ quelconque. Nous appliquerons, d'habitude, l'indice $_0$ pour désigner les valeurs des fonctions considérées au point t_0, par ex. $\vartheta_0 = \vartheta(t_0)$.)

Soit r l'amplitude et α une 1-ère phase de la base u, v.

Subsistent, dans l'intervalle j, les formules suivantes:

$$r(t) = r_0 \cdot \exp \int_{t_0}^{t} \alpha'(\sigma) \cdot \operatorname{cotg} \vartheta(\sigma) d\sigma,$$

(17)

$$\alpha'(t) = \alpha'_0 \cdot \exp \left(-2 \int_{t_0}^{t} \alpha'(\sigma) \cdot \operatorname{cotg} \vartheta(\sigma) d\sigma\right).$$

En effet, on a d'après (12), (3):

$$rr' = -w \cdot \operatorname{cotg} \vartheta,$$

$$\frac{r'}{r} = \alpha' \cdot \operatorname{cotg} \vartheta,$$

d'où vient la première formule (17). La seconde est alors évidente, en vertu de (3).

13. - Fonctions polaires normées.

Dans la théorie des fonctions polaires le choix de la variable indépendante des fonctions polaires joue un rôle inportant. On peut rapporter une fonction polaire ϑ soit à une de ses composantes α, β soit au paramètre, dit *radonien*, $\xi = \alpha + \beta$. La fonction polaire ϑ, rapportée respectivement à la variable indépendante α, β ou bien ξ, s'appelle *normée de première, deuxième* ou bien *troisième espèce*. Dans la suite nous nous bornerons aux fonctions polaires normées de première espèce et c'est de cette raison que nous parlerons, simplement, de fonctions polaires normées.

Cela étant, considérons une fonction polaire $\vartheta = \beta - \alpha$ de la base u, v.

Soit $t_0 \in j$ un nombre arbitraire et désignons par J l'intervalle formé par les valeurs de la fonction α dans l'intervalle j: $J = \alpha(j)$. On a, par conséquent, $\alpha^0 \in J$.

Comme la fonction α va constamment en croissant ou bien en décroissant, elle admet la fonction inverse, $\alpha^{-1}(\alpha)$, définie, évidemment, dans l'intervalle J. Cette fonction α^{-1}, elle aussi, va constamment en croissant ou bien en décroissant.

Soit H la fonction ϑ rapportée à la variable indépendante α. On a, manifestement, la formule

(18) $$H(\alpha) = \vartheta(t),$$

$t(\in j)$, $\alpha(\in J)$ étant d'arbitraires points homologues, c'est-à-dire liés l'un à l'autre par les formules: $\alpha = \alpha(t)$, $t = \alpha^{-1}(\alpha)$

En appliquant les formules (15), (2) on voit que, la fonction H jouit dans l'intervalle J des propriétés suivantes:

$$H \in C_1, \; n\pi < H < (n+1)\pi \qquad (n \text{ entier}). \tag{19}$$

Dans la suite nous employons l'accent ` pour désigner la dérivée par rapport à α.

Les formules (17) entraînent, évidemment, pour deux valeurs homologues $t \in J$, $\alpha \in j$ quelconques:

$$\begin{aligned} r(t) &= r_0 \cdot \exp \int_{\alpha_0}^{\alpha} \operatorname{cotg} H(\rho) d\rho, \\ \alpha'(t) &= \alpha_0' \cdot \exp(-2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \operatorname{cotg} H(\rho) d\rho. \end{aligned} \tag{20}$$

Il en résulte pour la fonction inverse par rapport à $\alpha(t)$, $t = t(\alpha)$.

$$t^{`}(\alpha) = \frac{1}{\alpha_0'} \cdot \exp \; 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \operatorname{cotg} H(\rho) d\rho, \tag{21}$$

relation qui conduit à l'expression suivante pour la fonction $t(\alpha)$:

$$t(\alpha) = t_0 + \frac{1}{\alpha_0'} \int_{\alpha_0}^{\alpha} (\exp \; 2 \int_{\alpha_0}^{\sigma} \operatorname{cotg} H(\rho) d\rho) d\sigma. \tag{22}$$

En appliquant les formules (5), (20), (21) on trouve par un calcul élémentaire que, le coefficient q de l'équation (q) s'exprime à l'aide de la fonction H par la formule

$$-q(t) = \alpha_0'^2 \frac{1 + H^{`}(\alpha)}{\sin^2 H(\alpha)} \cdot \exp \; (-4 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \operatorname{cotg} H(\rho) d\rho). \tag{23}$$

valable pour d'arbitraires valeurs homologues $t \in j$, $\alpha \in J$.

On voit en particulier qu'il subsiste pour un nombre $t \in j$ quelconque la relation $q(t) < 0$ ou bien $q(t) > 0$ ou bien $q(t) = 0$ suivant que la valeur

$H^{\cdot}(\alpha)$ de la fonction $H^{\cdot}$ pour le nombre homologue $\alpha \in J$ est > -1 ou bien < -1 ou bien $= -1$.

14. - Nous allons maintenant examiner la question, jusqu'à quelle mesure l'équation (q) se trouve déterminée par une fonction polaire normée donnée d'avance.

Subsiste à ce sujet le

Théorème. - *Soit H une fonction definie et jouissant des propriétés* (19) *dans un intervalle ouvert, J, et soient t_0, $\alpha_0 \in J$, $\alpha_0'(\neq 0)$ des nombres arbitraires.*

Alors il existe précisément une équation différentielle (q), *définie dans un intervalle ouvert j, $t_0 \in j$, qui admet une première phase, α, à valeurs initiales*

$$\alpha(t_0) = \alpha_0, \; \alpha'(t_0) = \alpha_0' \tag{24}$$

et qui est telle, qu'une fonction polaire normée de l'équation (q), *engendrée par la phase α, est précisément la fonction H.*

Démonstration. - Admettons d'abord l'existence d'une équation (q) satisfaisant aux conditions du théorème. Alors, la formule (22) montre que la fonction inverse à la phase α, $t(\alpha)$, définie dans l'intervalle J, se trouve bien déterminée par les données du théorème en question. Il en résulte le même pour la fonction α. On voit, par conséquent, en vertu de (23), que l'équation (q) est unique.

Nous voyons qu'il y a au plus une équation (q) satisfaisant aux conditions du théorème.

Cela étant, partons des données du théorème et définissons, dans l'intervalle J et conformément avec la formule (22), la fonction $t = t(\alpha)$. On a, évidemment, $t(\alpha_0) = t_0$. La fonction t appartient, en vertu de (19), à la classe C_3, et on voit, d'après (21), que sa dérivée, $t^{\cdot}$, est constamment positive ou négative.

Soit j l'intervalle formé par les valeurs de la fonction t dans l'intervalle J: $j = t(J)$. On a, évidemment, $t_0 \in j$. Soit $\alpha = \alpha(t)$ la fonction inverse par rapport à $t(\alpha)$ et définie, naturellement, dans l'intervalle j. On a $\alpha(t_0) = \alpha_0$. La fonction α appartient, elle aussi, à la classe C_3 et sa dérivée, α', est constamment positive ou négative. On a en particulier $\alpha'(t_0) = \alpha_0'$. La fonction α, à valeurs initiales (24), est par conséquent une 1-ère phase d'une équation différentielle, (q), définie dans l'intervalle j et dont le coefficient est donné par la formule (5). En faisant le calcul on trouve la formule (23), valable pour deux valeurs homologues arbitraires, $t \in j$, $\alpha \in J$.

En se servant de la formule $(20)_2$ on trouve

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha'(t)}\right)' = \operatorname{cotg} H(\alpha). \tag{25}$$

Or, soit $\vartheta(t)$ la fonction polaire de l'équation (q), engendrée par la 1-ère phase α et contenue dans l'intervalle $(n\pi, \overline{n+1}\pi)$. Subsiste alors la formule (11) et on a, en comparant avec (25): $H(\alpha) = \vartheta(t)$. Cela achève la démonstration.

Choisissons, à titre d'example, $H(\alpha) = \frac{\pi}{2}$ (mod π). La formule (23) donne: $q(t) = -\alpha_0'^2$. Il en résulte la proposition:

Les équations (q) à coefficients q constants et négatifs sont caractérisées par la propriété d'admettre des fonctions polaires à valeurs constantes égales à $\frac{\pi}{2}$ (mod π). Etant donnée l'équation

$$y'' = -k^2 y \qquad (t \in i)$$

à coefficient $-k^2$ constant et négatif, il passe par chaque point (t_0, α_0), $t_0 \in j$, précisément deux 1-ères phases de l'équation $(-k^2)$, dans les directions $\alpha_0' = k$ et $\alpha_0' = -k$, qui engendrent les fonctions polaires de valeurs constantes $\frac{\pi}{2}$ (mod π).

15. - DISPERSIONS CENTRALES DE 1-ÈRE ESPÈCE EN RELATION AVEC LES FONCTIONS POLAIRES NORMÉES.

Revenons, à présent, à la situation envisagée au No 13. Nous considérons, par conséquent une équation (q) dans l'intervalle $j = -(a, b)$, et une fonction polaire $\vartheta(t) = H(\alpha)$ de cette équation, engendrée par une 1-ère phase $\alpha(t)$ de (q). Subsistent alors les formules (18) — (23).

Supposons maintenant que l'équation (q) admet, dans un intervalle $i \subset j$, la dispersion centrale fondamentale de 1-ère espèce, $\varphi(t)$. On a alors $\varphi(i) \subset j$. On voit d'après (10) que, $t \in j$, $\alpha \in J$ étant d'arbitraires valeurs homologues, les valeurs $\varphi(t)$, $\alpha + \varepsilon\pi$ ($\varepsilon = \operatorname{sgn} \alpha'$) le sont aussi. Il en résulte que l'intervalle $\alpha\varphi(i)$ ($\subset J$) formé par les valeurs homologues aux différentes valeurs $t \in \varphi(i)$ s'obtient par la translation de $\varepsilon\pi$ à partir de l'intervalle $\alpha(i)$.

Si par exemple, l'équation (q) est oscillatoire (ce qui veut dire que ses intégrales s'annulent infiniment de fois vers les deux limites a, b de l'intervalle j), on a $i = \varphi(i) = j$. Dans ce cas la phase α résulte infériurement et supérieurement non-bornée et on a, par conséquent, $\alpha(i) = \alpha\varphi(i) = \alpha(j) = = J = (-\infty, \infty)$.

Appliquons la formule (22) aux nombres $\varphi(t)$, $\alpha + \varepsilon\pi$, $(t \in j)$.

Nous avons, évidemment

$$(26) \qquad \varphi(t) = t_0 + \frac{1}{\alpha_0'} \int_{\alpha_0}^{\alpha+\varepsilon\pi} (\exp 2 \int_{\alpha_0}^{\sigma} \operatorname{cotg} H(\rho) d\rho) d\sigma.$$

Cette formule peut s'écrire:

$$\varphi(t) = t + \frac{1}{\alpha_0'}\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon\pi} (\exp 2\int_{\alpha_0}^{\sigma} \cot g\, H(\rho)d\rho)d\sigma. \tag{27}$$

On en déduit par différentiation

$$\varphi'(t) = \exp 2\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon\pi} \cot g\, H(\rho)d\rho. \tag{28}$$

Cette formule conduit, à son tour, à la relation suivante:

$$\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} = 2\alpha_0'[\cot g\, H(\alpha+\varepsilon\pi) - \cot g\, H(\alpha)] \cdot \exp (-2\int_{\alpha_0}^{\alpha} \cot g\, H(\rho)d\rho).$$

Théorème. - *Si la dispersion centrale fondamentale de* 1-*ère espèce de l'équation* (q), *est linéaire dans son intervalle de definition, i:*

$$\varphi(t) = ct + k \qquad (c > 0,\ k = \text{const.}),$$

et dans ce cas seulement, toute fonction polaire normée de l'équation (q), *engendrée par une phase* α *de* (q), *résulte périodique de période* π *dans l'intervalle* $I = \alpha(i)$.

16. - Fonctions polaires normées périodiques des équations oscillatoires.

Supposons, à présent, que l'équation (q) est oscillatoire. Nous désignons son intervalle de définition, comme d'habitude, par $j = (a, b)$.

La supposition en question entraîne que, toutes les fonctions polaires normées de l'équation (q) sont définies dans l'intervalle $J = (-\infty, \infty)$. On sait aussi que les dispersions centrales de 1-ère espèce de tous les indices, ν, existent dans l'intervalle j tout entier,

Supposons d'avantage, que les fonctions polaires normées de l'équation (q) soient périodiques de période π.

Alors, d'après le théorème précédent, la dispersion centrale fondamentale φ résulte linéaire:

$$\varphi(t) = ct + k \qquad (c > 0,\ k = \text{const.}) \tag{29}$$

Soit $t_0 \in j$ un nombre arbitraire et H une fonction polaire normée de l'équation (q), engendrée par une phase α à valeurs initiales $\alpha_0 = 0$, $\alpha_0' = 1$, et satisfaisant aux inégalités $0 < H < \pi$.

On a alors d'après (23),

$$-q(t) = \frac{1 + H'(\alpha)}{\sin^2 H(\alpha)} \cdot \exp\left(-4\int_0^{\alpha} \operatorname{cotg} H(\rho)d\rho\right), \tag{30}$$

formule valable pour d'arbitraires valeurs homologues $t \in j$, $\alpha \in J$,

$$t = t_0 + \int_0^{\alpha} \left(\exp 2\int_0^{\sigma} \operatorname{cotg} H(\rho)d\rho\right)d\sigma. \tag{31}$$

Les coefficients c, k de la fonction φ, à leur tour, sont donnés, d'après (29), (28), (22), par les formules

$$c = \exp\, 2\int_0^{\pi} \operatorname{cotg} H(\rho)d\rho,$$

$$k = \left(1 - \exp\, 2\int_0^{\pi} \operatorname{cotg} H(\rho)d\rho\right)t_0 + \int_0^{\pi} \left(\exp 2\int_0^{\sigma} \operatorname{cotg} H(\rho)d\rho\right)d\sigma.$$

Rappelons, que la fonction H est définie dans l'intervalle $J = (-\infty, \infty)$ et jouit des proriétés suivantes:

$$1^\circ\ H \in C_1, \qquad 2^\circ\ 0 < H < \pi, \qquad 3^\circ\ H(\alpha + \pi) = H(\alpha). \tag{32}$$

Subsiste, évidemment, la relation $c > 1$ ou $c < 1$ ou bien $c = 1$ suivant que le nombre $\int_0^{\pi} \operatorname{cotg} H(\rho)d\rho$ est positif ou négatif ou bien nul.

Considérons la dispersion φ_ν à l'indice $\nu (= 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ arbitraire et appliquons les formules (7), (29).

Nous obtenons:

$$\varphi_\nu(t) = c^\nu t + k\frac{c^\nu - 1}{c - 1} \quad \text{ou bien} \quad \varphi_\nu(t) = t + \nu k,$$

suivant le cas $c \neq 1$ ou bien $c = 1$.

Cela étant, les inégalités $a < \varphi_\nu(t) < b$ conduisent, pour $\nu \to \pm\infty$, au résultant suivant:

$$\text{Dans le cas} \qquad c > 1 \quad \text{on a:} \quad b = \infty,\ a = -k:(c-1);$$

$$c < 1 \quad : \quad b = k:(1-c),\ a = -\infty;$$

$$c = 1 \quad : \quad a = -\infty,\ b = \infty;\ k > 0.$$

Nous voilà arrivés à la conclusion que, *l'intervalle de définition de l'équation* (q), j, *a la forme* (a, ∞) *ou* $(-\infty, b)$ *ou bien* $(-\infty, \infty)$ *suivant que* c *est supérieur ou inférieur ou bien égal à* 1. Ici, naturellement, les a, b désignent des nombres finis.

17. - Equations oscillatoires aux intégrales avec zéros en distances égales.

Insistons pour un moment sur le cas, où l'équation (q) définie et oscillatoire dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$ admet la dispersion fondamentale φ de la forme

$$\varphi(t) = t + k \quad (\text{const.} = k > 0).$$

L'équation (q) jouit alors de la propriété que, deux zéros consécutifs de ses intégrales ont toujours la même distance mutuelle qui est égale à k.

On retombe de cette façon à une classe des équations (q) qui a été récemment l'objet d'études de plusieurs auteurs [1]).

Les résultats précédents conduisent à la conclusion suivante:

Toutes les équations (q), *définies et oscillatoires dans l'intervalle* $j = (-\infty, \infty)$ *et dont les intégrales jouissent de la propriété d'avoir deux zéros consécutifs quelconques placés à la même distance égale à* k (> 0) *sont données par les formules* (30), (31). *La fonction* H *correspondante est définie dans l'intervalle* $(-\infty, \infty)$ *et satisfait outre* (32), *aux relations suivantes:*

$$\int_0^\pi \operatorname{cotg} H(\rho)d\rho = 0, \qquad \int_0^\pi (\exp 2\int_0^\sigma \operatorname{cotg} H(\rho)d\sigma = k.$$

Remarquons qu'on peut prendre, manifestement, $t_0 = 0$.

([1]) On consultera à ce sujet les indications données dans l'article [3].

V. - Etude des courbes (F).

18. - Préliminaires.

Nous allons commencer l'étude en question par considérer une équation (q) quelconque, définie dans un intervalle $j = (a, b)$.

Soit $\mathfrak{R}$ une courbe intégrale de l'équation (q), courbe donnée par les coordonnées paramétriques $u(t)$, $v(t)$, rapportées à un système de coordonnées ayant pour l'origine le point O. Les fonctions u, v constituent par conséquent une base de l'équation (q) et le wronskien $w = uv' - u'v$ est différent de zéro.

D'abord il est facile à montrer que la courbe $\mathfrak{R}$ est régulière (localement convexe et sans points d'inflexion) alors et alors seulement, si la fonction q est toujours différente de zéro: $q(t) \neq 0$ pour $t \in j$. En effet, pour que la courbe $\mathfrak{R}$ jouisse de la propriété en question il faut et il suffit qu'on ait pour toute valeur $t \in j$: $u'(t)v''(t) - u''(t)v'(t) \neq 0$ (v. [1], p. 9 , l'inégalité qui s'exprime, évidemment, par $q(t)$ 0.

En second lieu, désignons par $P(t)$, $t \in j$, le point de la courbe $\mathfrak{R}$ déterminé par la valeur t du paramètre et de même par $\tau(t)$ la tangente de la courbe $\mathfrak{R}$ au point $P(t)$.

Nous allons démontrer la proposition suivante:

Deux points $P(t_1)$, $P(t_2)$ de la courbe $\mathfrak{R}$, déterminés par de différentes valeurs t_1, t_2 du paramètre, sont situés sur la même droite passant par le point O *alors et alors seulement, si les valeurs t_1, t_2 sont mutuellement conjuguées de* 1*-ère espèce.*

Deux tangentes $\tau(t_1)$, $\tau(t_2)$ de la courbe $\mathfrak{R}$, déterminées par de différentes valeurs t_1, t_2 du paramètre, sont parallèles l'une à l'autre alors et alors seulement, si les valeurs t_1, t_2 sont mutuellement conjuguées de 2*-ième espèce.*

En effet, deux points $P(t_1)$, $P(t_2)$ de la courbe $\mathfrak{R}$, $t_1 \neq t_2$, sont situés sur la même droite passant par O alors et alors seulement, si $u(t_1)v(t_2) - u(t_2)v(t_1) = 0$, et cette relation, à son tour, exprime une condition nécéssaire et suffisante pour que les valeurs t_1, t_2 soient mutuellement conjuguées de 1-ère espèce (v.[2], p. 204).

De même, deux tangentês $\tau(t_1)$, $\tau(t_2)$ de la courbe $\mathfrak{R}$, $t_1 \neq t_2$, sont parallèles l'une à l'autre alors et alors seulement, si $u'(t_1)v'(t_2) - u'(t_2)v'(t_1) = 0$, et cette relation, à son tour, exprime une condition nécéssaire et suffisante pour que les valeurs t_1, t_2 soient mutuellement conjuguées de 2-ième espèce (v. [2], p. 204).

La proposition se trouve démontrée.

On en tire la

Conclusion. - *Pour que les tangentes* $\tau(t_1)$, $\tau(t_2)$ *de la courbe* $\mathfrak{R}$, $t_1 \neq t_2$, *en deux points d'intersection* $P(t_1)$, $P(t_2)$ *de la courbe* $\mathfrak{R}$ *avec une droite passant par* O *résultent parallèles l'une à l'autre, il faut et il suffit que les valeurs* t_1, t_2 *soient mutuellement conjuguées de* 1*-ère et de* 2*-ième espèce en même temps.*

19. - Caractérisation des fonctions (F).

Soit, à présent, $\mathfrak{R}$ une courbe (F) à coordonnées paramétriques $u(t)$, $v(t)$ rapportées à un système de coordonnées d'origine O.

Soit (q) l'équation de définition de la courbe $\mathfrak{R}$, $t \in j$. La fonction q est par conséquent une fonction (F).

D'abord, la courbe $\mathfrak{R}$ étant réguliére, on a $q(t) \neq 0$ pour $t \in j$.

En second lieu, considérons un nombre arbitraire, $t_1 \in j$, et soit $P(t_1)$ le point correspondant de la courbe $\mathfrak{R}$. D'après la définition même des courbes (F) la droite $OP(t_1)$ coupe la courbe $\mathfrak{R}$ en au moins un point $P(t_2)$ qui est différent de $P(t_1$. On a par conséquent $t_2 \neq t_1$ et on voit que le mombre t_2 est conjugué de 1-ère espèce avec t_1. Par conséquent, l'équation (q) jouit de la propriété d'admettre pour toute valeur $t_1 \in j$ des valeurs conjuguées de 1-ère espèce. Cela entraîne que toute intégrale de l'équation (q) a au moins deux zéros.

Nous voilà arrivés à la conclusion que l'équation (q) est de type au moins 3, ce qui veut dire qu'elle admet d'intégrales s'annulant dans l'intervalle j au moins trois fois (le nombre de zéros pouvant être infini). Il en résulte, d'une part, que la fonction q est constamment négative et, d'autre part, que l'équation (q) admet les dispersions centrales fondamentales de 1-ère et de 2-ième espèce φ, ψ, fonctions existant dans certains intervalles $i \subset j$, $i' \subset j$.

Soit $t \in i$ un nombre quelconque. Comme le nombre $\varphi(t)$ est conjugué de 1-ère espèce avec t, les points $P(t)$, $P[\varphi(t)]$ se trouvent situé sur la même droite passant par O. La courbe $\mathfrak{R}$ étant une courbe (F), les tangentes $\tau(t)$, $\tau[\varphi(t)]$ sont mutuellement parallèles et cela entraîne que le nombre $\varphi(t)$ est conjugué de 2-ième espèce avec t. On a par conséquent: $\varphi(t) = \psi_\nu(t)$ avec un indice convenable $\nu\,(=1, 2, ...)$. Or, cette relation entraîne l'existence d'une intégrale de l'équation (q), y, dont la dérivée, y', s'annule pour les valeurs t, $\varphi(t)$ et, en outre, pour certaines valeurs $x_1, \ldots, x_{\nu-1}$ situées entre t et $\varphi(t)$. D'autre part, comme la fonction q est constamment négative, il y a dans chaque intervalle $(t, x_1), \ldots, (x_{\nu-1}, \varphi(t))$ précisément un zéro de l'intégrale y. Il y a par conséquent ν zéros de y situés entre t et $\varphi(t)$. On en conclut $\nu = 1$ et, a fortiori, $\varphi(t) = \psi(t)$. Nous voyons que l'équation (q) jouit de la propriété d'avoir les deux dispersions fondamentales φ et ψ confondues: $\varphi(t) = \psi(t)$ pour $t \in i$ $(= i')$.

En définitive, la fonction q est constamment négative et telle que l'équation (q) résulte de type au moins 3 et à dispersions centrales fondamentales φ, ψ confondues.

On se rend compte facilement que la réciproque est vraie: Toute équation (q) jouissant de ces propriétés définit une courbe (F).

En modifiant légèrement le langage on peut résumer ces résultats dans le

THÉORÈME. – *Toutes les fonctions* (F) *sont précisément les fonctions continues, constamment négatives de type au moins* 3 *et à dispersions centrales fondamentales* φ, ψ *confondues.*

20. – DÉTERMINATION DES FONCTIONS (F) PAR DES EXPRESSIONS EXPLICITES.

Nous allons démontrer le

THÉORÈME. – *Pour qu'une fonction continue,* q, *qui est constamment négative et admet les dispersions centrales fondamentales* φ *et* ψ, *ait ces fonctions confondues, il faut et il suffit que les fonctions polaires normées de l'équation* (q) *soient périodiques de période* π.

Démonstration. – Soit q une fonction continue dans un intervalle (ouvert), j, constamment négative, et admettant, dans un intervalle $i \subset j$, les dispersions centrales fondamentales φ et ψ. Les formules (3) montrent que, dans ces conditions, deux phases associées quelconques de l'équation (q), α, β, vont toutes les deux constamment en croissant ou bien en décroissant. Subsistent, en outre, les relations abeliennes (10), (10) dans lesquelles $\varepsilon = \operatorname{sgn} \alpha' = \operatorname{sgn} \beta'$.

Soit $\vartheta(t)$ une fonction polaire de (q) à composantes $\alpha(t)$, $\beta(t)$, et $H(\alpha)$, $\alpha \in J$, sa forme normée, et désignons $\alpha(i) = I (\subset J)$.

a. – Soit $\varphi = \psi$ pour $t \in i$.

Subsistent, évidemment, dans l'intervalle i, les relations suivantes:

$$H(\alpha(t) + \varepsilon\pi) = H(\alpha\varphi(t)) = \vartheta\varphi(t) = \beta\varphi(t) - \alpha\varphi(t) =$$

$$= \beta(t) + \varepsilon\pi - \overline{\alpha(t) + \varepsilon\pi} = \vartheta(t) = H\alpha(t).$$

b. – Soit $H(\alpha + \varepsilon\pi) = H(\alpha)$ pour $\alpha \in I$.

On a alors

$$\beta\varphi(t) = \alpha\varphi(t) + H\alpha\varphi(t) = \alpha(t) + \varepsilon\pi + H(\alpha(t) + \varepsilon\pi) =$$

$$= \alpha(t) + \varepsilon\pi + H\alpha(t) = \beta(t) + \varepsilon\pi = \beta\psi(t),$$

d'où vient: $\psi(t) = \varphi(t)$ et cela achève la démonstration.

Théorème. - *Pour qu'une fonction continue, q, soit une fonction (F), il faut et il suffit qu'elle soit constamment négative, de type au moins* 3 *et à fonctions polaires normées périodiques de période* π.

Toutes les fonctions (F), q, sont données par la formule telle que (30), *dans laquelle H est une fonction quelconque, définie dans un intervalle J de longueur* $> 2\pi$ *et jouissant des propriétés suivantes:*

$$1^\circ \quad H \in C_1, \qquad 2^\circ \quad 0 < H < \pi, \qquad 3^\circ \quad H(\alpha+\pi) = H(\alpha) \quad \text{pour} \quad \alpha, \alpha+\pi \in J,$$

(33)

$$4^\circ \quad H^{\cdot}(\alpha) > -1 \quad \text{pour} \quad \alpha \in J.$$

La formule en question est valable pour d'arbitraires valeurs homologues $t \in j$, $\alpha \in J$, *définies par la formule* (31).

21. - L'arc centro-affin des courbes (F).

Les courbes (F) jouissent d'une propriété remarquable que nous allons établir.

Soit $\mathfrak{R}$ une courbe (F) définie par les coordonnées paramétriques $u(t)$, $v(t)$, $t \in j$. Nous reprenons les notations précédentes.

Remarquons d'abord que, la longueur centro-affine, $s(t_1 \mid t_2)$, d'un arc $P(t_1)P(t_2)$ quelconque de la courbe $\mathfrak{R}$ $(t_1, t_2 \in j)$ est donnée par la formule

$$s(t_1 \mid t_2) = \left| \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left| \frac{u'(\sigma)v''(\sigma) - u''(\sigma)v'(\sigma)}{u(\sigma)v'(\sigma) - u'(\sigma)v(\sigma)} \right|}\, d\sigma \right| ,$$

ou bien, évidemment, par

$$s(t_1 \mid t_2) = \left| \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{-q(\sigma)}\, d\sigma \right| .$$

Cela étant, envisageons les formules (30), (28). On en tire, pour $t \in i$,

$$-q(\varphi(t))\varphi'^2(t) = -q(t),$$

relation qui entraîne, évidemment,

$$s(\varphi(t_1) \mid \varphi(t_2)) = s(t_1 \mid t_2).$$

Or, les valeurs t_1, $\varphi(t_1)$ étant conjuguées de 1-ère espèce l'une avec l'autre, les points $P(t_1)$, $P\varphi(t_1)$ sont situés sur la même droite $OP(t_1)$ et, une situation analogue a lieu pour les points $P(t_2)$, $P(\varphi(t_2))$ qui se trouvent sur la droite $OP(t_2)$.

On voit par conséquent que, *les arcs* $P(t_1)P(t_2)$ *et* $P(\varphi(t_1))P(\varphi(t_2))$ *de la courbe* $\mathfrak{K}$, *découpés par deux droites quelconques* $OP(t_1)$, $OP(t_2)$ *du faisceau* (F), *ont la même longueur centro-affine.*

22. - Equations finies des courbes (F) dans le cas oscillatoire.

Les équations oscillatoires (q) à dispersions centrales fondamentales, φ, ψ, confondues ont été étudiées pour la première fois par M. M. Laitoch ([5]). Le résultat principal à ce sujet trouvé par M. Laitoch consiste en ceci que les équations en question sont caractérisées par la linéarité de la fonction φ. Un cas particulier intéressant de ces équations, en relation avec les courbes appelées courbes de J. Radon, a été étudié par M. J. Chrastina ([6]).

Nous allons terminer nos considérations au sujet des courbes (F) par déduire les équations finies de ces courbes en coordonnées polaires. Pour fixer les idées nous nous bornerons précisément au cas caractérisé par les équations (q) *oscillatoires.*

Soit alors $\mathfrak{K}$ une courbe (F) définie par une équation (q) oscillatoire et soient $u(t)$, $v(t)$ ses coordonnées paramétriques. L'équation (q) est alors définie dans un intervalle j non-borné, soit $(-\infty, b)$ soit (a, ∞) soit enfin $(-\infty, \infty)$. Nous reprenons d'ailleurs les notations précédentes.

D'après (20) nous avons la formule

$$r(t) = r_0 \cdot \exp \int_0^{\alpha} \operatorname{cotg} H(\rho)d\rho, \tag{34}$$

la fonction H étant définie dans l'intervalle $J = (-\infty, \infty)$ et jouissant dans cet intervalle des propriétés (33).

La formule en question entraîne

$$r\varphi(t) = r_0 \cdot \exp \int_0^{\alpha+\pi} \operatorname{cotg} H(\sigma)d\rho,$$

et, a fortiori,

$$r(\varphi(t)) = \sqrt{c} \cdot r(t),$$

$c (> 0)$ étant le coefficient de t dans la fonction linéaire $\varphi(t) = ct + k$.

Or, il est évident, que la fonction

$$g(t) = c^{\frac{1}{2\pi}\alpha(t)}$$

se change par la substitution $t \to \varphi(t)$ de la même manière que la fonction $r(t)$. On en conclut que la fonction

$$f(t) = r(t) : g(t)$$

reste, par rapport à la dite substitution, invariante:

$$f\varphi(t) = f(t).$$

En terme de la fonction f la formule (34) s'exprime dans la forme

$$r(t) = C^{\alpha(t)} \cdot f(t) \qquad (C = c^{\frac{1}{2\pi}}) \tag{35}$$

Soit $F(\alpha)$ (>0) la fonction définie dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$ par la formule

$$f(t) = F(\alpha),$$

$t \in j$ et $\alpha \in (-\infty, \infty)$ étant des valeurs homologues arbitraires.

En comparant les formules (34), (35) on trouve

$$F(\alpha) = r_0 \cdot C^{-\alpha} \cdot \exp \int_0^\alpha \operatorname{cotg} H(\rho) d\rho. \tag{36}$$

Cette formule montre, en particulier, que la fonction F appartient à la classe C_2 et résulte périodique de période π. De plus, la formule (36) entraîne

$$\begin{aligned} H &= \operatorname{arc\,cotg} \left(\frac{F'}{F} + \log C\right), \\ H' &= -\frac{FF'' - F'^2}{F^2 + (F' + F \cdot \log C)^2}, \end{aligned} \tag{37}$$

arc cotg étant cette branche de la fonction en question qui est contenue entre 0 et π.

En résumé, la fonction F jouit dans son intervalle de définition $(-\infty, \infty)$ des propriétés suivantes:

$$(38)\qquad \begin{gathered} 1^\circ\ \ F > 0, \qquad 2^\circ\ \ F \in C_2, \qquad 3^\circ\ \ F(\alpha+\pi) = F(\alpha), \\ 4^\circ\ \ \frac{F^{\cdot\cdot}}{F} < \frac{F^{\cdot 2}}{F^2} + \left(\frac{F^{\cdot}}{F} + \log C\right)^2 + 1. \end{gathered}$$

Nous voilà arrivés à la conclusion que l'équation finie de la courbe $\mathfrak{R}$, en coordonnées polaires, est donnée par la formule

$$(39)\qquad r = C^{\alpha} \cdot F(\alpha),$$

$C(>0)$ étant une constante et F une fonction dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$ jouissant des propriétés (38).

Inversement, on se rend compte facilement que, si l'on prend une constante arbitraire, $C(>0)$, et une fonction $F(\alpha)$ dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$, jouissant des propriétés (38), alors la fonction $H(\alpha)$ définie par la formule (37) représente une fonction polaire normée satisfaisant aux conditions (33). L'équation (q) est alors oscillatoire et définit une courbe (F).

Nous avons ainsi démontré le

THÉORÈME. - *Toutes les courbes* (F), *définies par les équations* (q) *oscillatoires, sont données, en coordonnées polaires, précisément par la formule* (39), *dans laquelle* $C(>0)$ *désigne une constante et* F *une fonction définie dans l'intervalle* $(-\infty, \infty)$ *et jouissant des propriétés* (38).

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, II. Berlin, 1923.

[2] O. BORŮVKA, *Sur les intégrales oscillatoires des équations différentielles linéaires du deuxième ordre*, «Czech. Mat. Journ.». 3 (78), 1953, 199-225. (En russe. Résumé français).

[3] O. BORŮVKA, *Sur l'ensemble des équations différentielles linéaires ordinaires du deuxième ordre qui ont la même dispersion fondamentale*, «Bul. Inst. Polit. Iasi», IX (XIII), 1963, 11-20.

[4] O. BORŮVKA, *Sur quelques applications des dispersions centrales dans la théorie des équations différentielles linéaires du deuxième ordre*, «Arch. Math.» (Brno), I, 1965, 1-20.

[5] M. LAITOCH, *Coincidence of Central Dispersions of the First and Second Kind Corresponding to the Differential Equation* $y'' = Q(x)y$, «Czech. Math. Journ.», 6 (81), 1956. 365-380. (En russe. Résumé anglais).

[6] J. CHRASTINA, *On Coincidence of the Basic Central Dispersions of 3rd and 4th Orders of the Differential Equation* $\ddot{y}(t) + Q(t)y(t) = 0$, «Čas. Pěst. Mat.», 87, 1962, 188-197. (En tchèque. Résumé russe et anglais).