

## Borůvka, Otakar: Scholarly works

---

Otakar Borůvka

O jistém problému minimálním

Práce Moravské přírodovědecké společnosti, sv. III, spis 3, 1926, 37-58

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/500114>

### Terms of use:

© Moravská přírodovědecká společnost, 1926

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

# PRÁCE

MORAVSKÉ PŘÍRODOVĚDECKÉ SPOLEČNOSTI

SVAZEK III., SPIS 3.

1926

SIGNATURA: F 23

BRNO, ČESKOSLOVENSKO.

---

---

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM MORAVICAE.

TOMUS III., FASCICULUS 3.; SIGNATURA: F 23; BRNO, ČECHOSLOVAKIA; 1926.

---

---

Dr. OTAKAR BORŮVKA:

## O jistém problému minimálním.

---

S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY VYDÁVA  
MOR. PŘÍRODOVĚDECKÁ SPOLEČNOST  
BRNO.

---

REDIGUJE — RÉDIGÉES PAR  
Prof. Dr. K. ŠULC,  
BRNO, PRAŽSKÁ 69.  
ČSR.

NA SKLADĚ MÁ — EN VENTE CHEZ  
A. PÍŠA,  
BRNO, ČESKÁ 28.  
ČSR.

Dr. OTAKAR BORŮVKA:

## O jistém problému minimálním.

V tomto článku podávám řešení následujícího problému:

Budiž dána matice  $M$  čísel  $r_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n; n \geq 2$ ), až na podmínku  $r_{\alpha\alpha} = 0, r_{\alpha\beta} = r_{\beta\alpha}$ , kladných a vzájemně různých.

Jest vybrati z ní skupinu čísel vzájemně a od nuly různých takovou, aby

1° bylo možno, jsou-li  $p_1, p_2$  libovolná od sebe různá přirozená čísla  $\leq n$ , vybrati z ní skupinu částečnou tvaru

$$r_{p_1 c_2}, r_{c_2 c_3}, r_{c_3 c_4}, \dots, r_{c_{q-2} c_{q-1}}, r_{c_{q-1} p_2}$$

2° součet jejich členů byl menší než součet členů kterékoliv jiné skupiny čísel vzájemně a od nuly různých, hovící podmínce 1°.\*)

**Řešení.** Budiž  $f_0$  libovolné z čísel  $\alpha$  a budiž  $[f_0 f_1]$  nejmenší z čísel  $[f_0 \gamma_0]$  ( $\gamma_0 \neq f_0$ ). Množství čísel  $[f_1 \gamma_1]$  ( $\gamma_1 \neq f_0, f_1$ ) jest pak buď prázdné, anebo nikoliv. V případě prvním položeme

$$F \equiv [f_0 f_1],$$

v případě druhém jest nejmenší z čísel  $[f_1 \gamma_1]$  buď větší než  $[f_0 f_1]$ , anebo menší. Je-li větší, položeme

$$F \equiv [f_0 f_1],$$

je-li menší, budiž  $[f_1 f_2]$  nejmenší z čísel  $[f_1 \gamma_1]$ . Množství čísel  $[f_2 \gamma_2]$  ( $\gamma_2 \neq f_0, f_1, f_2$ ) jest pak buď prázdné anebo nikoliv. V případě prvním položeme

$$F \equiv [f_0 f_1], [f_1 f_2],$$

v případě druhém jest nejmenší z čísel  $[f_2 \gamma_2]$  buď větší než  $[f_1 f_2]$ , anebo menší. Je-li větší, položeme

\*) V dalším značím pro stručnost číslo  $r_{\alpha\beta}$  symbolem  $[\alpha\beta]$ .

$$F \equiv [f_0 f_1], [f_1 f_2],$$

je-li menší, budiž  $[f_2 f_3]$  nejmenší z čísel  $[f_2 \gamma_2]$ . Množství čísel  $[f_3 \gamma_3]$  ( $\gamma_3 \neq f_0, f_1, f_2, f_3$ ) jest pak buď prázdné, anebo nikoliv. V případě prvním položíme

$$F \equiv [f_0 f_1], [f_1 f_2], [f_2 f_3],$$

v případě druhém jest nejmenší z čísel  $[f_3 \gamma_3]$  buď větší než  $[f_2 f_3]$ , anebo menší. Je-li větší, položíme

$$F \equiv [f_0 f_1], [f_1 f_2], [f_2 f_3],$$

je-li menší, pokračujeme stejným způsobem dále. Obdržíme konečně skupinu čísel

$$F \equiv [f_0 f_1], [f_1 f_2], [f_2 f_3], \dots [f_{g-1} f_g],$$

při čemž v indexech  $f_0, f_1, \dots, f_g$  vyskytne se buď každé z čísel  $1, 2, \dots, n$ , anebo nikoliv.

V případě prvním položíme

$$\mathfrak{F} \equiv F,$$

v případě druhém budiž  $f_0^{(1)}$  jedno z čísel  $1, 2, \dots, n$ , nevyskytující se mezi čísly  $f_0, f_1, \dots, f_g$ . Budiž  $[f_0^{(1)} f_1^{(1)}]$  nejmenší z čísel  $[f_0^{(1)} \gamma_0^{(1)}]$  ( $\gamma_0^{(1)} \neq f_0^{(1)}$ ). Vycházejíce z tohoto čísla sestrojme jako dříve skupinu

$$F_1 = [f_0^{(1)} f_1^{(1)}], [f_1^{(1)} f_2^{(1)}], \dots [f_{g_1-1}^{(1)} f_{g_1}^{(1)}].$$

Při konstrukci této skupiny můžeme dospěti ku členu s indexem, vyskytující se ve členech skupiny  $F$ ; v tomto případě, je-li  $f_{h_1}^{(1)}$  první z takových indexů, kladme  $f_{g_1}^{(1)} \equiv f_{h_1}^{(1)}$ .

V indexech  $f_0, f_1, \dots, f_g; f_0^{(1)}, f_1^{(1)}, \dots, f_{g_1}^{(1)}$  vyskytne se buď každé z čísel  $1, 2, \dots, n$ , anebo nikoliv. V případě prvním položíme

$$\mathfrak{F} \equiv F, F_1,$$

v případě druhém budiž  $f_0^{(2)}$  jedno z čísel  $1, 2, \dots, n$ , nevyskytující se mezi čísly  $f_0, f_1, \dots, f_g; f_0^{(1)}, f_1^{(1)}, \dots, f_{g_1}^{(1)}$ . Budiž  $[f_0^{(2)} f_1^{(2)}]$  nejmenší z čísel  $[f_0^{(2)} \gamma_0^{(2)}]$  ( $\gamma_0^{(2)} \neq f_0^{(2)}$ ). Vycházejíce z tohoto čísla, sestrojme jako dříve skupinu

$$F_2 = [f_0^{(2)} f_1^{(2)}], [f_1^{(2)} f_2^{(2)}], \dots [f_{g_2-1}^{(2)} f_{g_2}^{(2)}].$$

Při konstrukci této skupiny můžeme dospěti ku členu s indexem, vyskytující se ve členech skupin  $F, F_1$ ; v tomto případě, je-li  $f_{h_2}^{(2)}$  první z takových indexů, kladme  $f_{g_2}^{(2)} \equiv f_{h_2}^{(2)}$ .

V indexech  $f_0, f_1, \dots, f_g; f_0^{(1)}, f_1^{(1)}, \dots, f_{g_1}^{(1)}; f_0^{(2)}, f_1^{(2)}, \dots, f_{g_2}^{(2)}$  vyskytne se buď

každé z čísel,  $1, 2, \dots, n$ , anebo nikoliv. V případě prvním položme

$$\mathfrak{F} \equiv F, F_1, F_2,$$

v případě druhém pokračujeme stejným způsobem dále. Obdržíme konečně řadu skupin

$$\mathfrak{F} \equiv F, F_1, F_2, \dots, F_{i-1},$$

při čemž v indexech členů těchto skupin vyskytne se každé z čísel  $1, 2, \dots, n$  alespoň jedenkrát.

Řada skupin  $\mathfrak{F}$  obsahuje buď právě jen skupinu  $F$ , anebo skupin více. V případě prvním položme

$$G \equiv F,$$

v případě druhém skupina  $F$  buď neobsahuje členu, jehož index se vyskytuje v některé ze skupin následujících řady  $\mathfrak{F}$ , anebo obsahuje alespoň jeden takový člen. Neobsahuje-li takového členu, položme

$$G \equiv F,$$

obsahuje-li, budiž  $j$  index určitého členu skupiny  $F$ , jenž se současně vyskytuje alespoň v jedné ze zbývajících skupin řady  $\mathfrak{F}$ ; můžeme zřejmě předpokládati, že se vyskytuje alespoň ve skupině  $F_1$ .

Řada skupin  $\mathfrak{F}$  obsahuje buď právě jen skupiny  $F, F_1$ , anebo skupin více. V případě prvním položme

$$G \equiv F, F_1,$$

v případě druhém skupina  $F, F_1$  buď neobsahuje členu, jehož index se vyskytuje v některé ze skupin následujících řady  $\mathfrak{F}$ , anebo obsahuje alespoň jeden takový člen. Neobsahuje-li takového členu, položme

$$G \equiv F, F_1,$$

obsahuje-li, budiž  $j_1$  index určitého členu skupiny  $F, F_1$ , jenž se současně vyskytuje alespoň v jedné ze zbývajících skupin řady  $\mathfrak{F}$ ; můžeme zřejmě předpokládati, že se vyskytuje alespoň ve skupině  $F_2$ . Řada skupin  $\mathfrak{F}$  obsahuje buď právě jen skupiny  $F, F_1, F_2$ , anebo skupin více. V případě prvním položme

$$G \equiv F, F_1, F_2,$$

v případě druhém pokračujeme stejným způsobem dále. Obdržíme konečně skupinu

$$G \equiv F, F_1, F_2, \dots, F_{k-1},$$

při čemž tato skupina obsahuje buď všechny skupiny řady  $\mathfrak{F}$ , anebo nikoliv. V případě prvním položme

$$\mathfrak{G} \equiv G,$$

v případě druhém existuje skupina  $F_k$  řady  $\mathfrak{F}$ , jež neobsahuje členu s indexem, vyskytující se ve skupině  $G$ .

Řada skupin  $\mathfrak{F}$  obsahuje buď právě jen skupiny  $G, F_k$ , anebo skupin více. V případě prvním položíme

$$G_1 \equiv F_k,$$

v případě druhém skupina  $F_k$  buď neobsahuje členu, jehož index se vyskytuje v některé ze skupin zbývajících řady  $\mathfrak{F}$ , anebo obsahuje alespoň jeden takový člen. Neobsahuje-li takového členu, položme

$$G_1 \equiv F_k,$$

obsahuje-li, budiž  $j^{(1)}$  index určitého členu skupiny  $F_k$ , jenž se současně vyskytuje alespoň v jedné ze zbývajících skupin řady  $\mathfrak{F}$ ; můžeme zřejmě předpokládati, že se vyskytuje alespoň ve skupině  $F_{k+1}$ .

Řada skupin  $\mathfrak{F}$  obsahuje buď právě jen skupiny  $G, F_k, F_{k+1}$ , anebo skupin více. V případě prvním položíme

$$G_1 \equiv F_k, F_{k+1},$$

v případě druhém pokračujeme stejným způsobem dále. Obdržíme konečně skupinu

$$G_1 \equiv F_k, F_{k+1}, \dots, F_{k_{l-1}},$$

při čemž řada skupin  $G, G_1$  obsahuje buď všechny skupiny řady  $\mathfrak{F}$ , anebo nikoliv. V případě prvním položíme

$$\mathfrak{G} \equiv G, G_1,$$

v případě druhém pokračujeme stejným způsobem dále. Obdržíme konečně řadu skupin

$$\mathfrak{G} \equiv G, G_1, \dots, G_{l-1},$$

při čemž řada skupin  $\mathfrak{G}$  obsahuje všechny skupiny řady  $\mathfrak{F}$  a žádná ze skupin řady  $\mathfrak{G}$  neobsahuje členu s indexem, vyskytující se v členu některé jiné skupiny této řady.

Položíme  $H_\lambda \equiv G_\lambda$  ( $\lambda = 0, 1, \dots, l-1$ )

Řada skupin  $\mathfrak{G}$  obsahuje buď právě jen skupinu  $G$ , anebo skupin více. V případě prvním položíme

$$J \equiv \mathfrak{G},$$

v případě druhém budiž:  $\kappa_\lambda$  kterýkoliv z indexů vyskytujících se v členech skupiny  $H_\lambda$ ;

$\alpha_1, \beta_1$  dvě z čísel  $\lambda$ ;

$[k_{\alpha_1\beta_1} k_{\beta_1\alpha_1}]$  nejmenší z čísel  $[k_{\alpha_1} k_{\beta_1}]$  při  $\alpha_1 \neq \beta_1$ , 0 při  $\alpha_1 = \beta_1$ ;

$M_1$  matice čís.  $[k_{\alpha_1\beta_1} k_{\beta_1\alpha_1}] (\alpha_1, \beta_1 = 0, 1, 2, \dots, l_1 - 1)^*$

$\mathfrak{G}_1 \equiv G^{(1)}, G_1^{(1)}, \dots, G_{l_1-1}^{(1)}$ , řada skupin, zkonstruovaná z  $M_1$  dle téhož pravidla jako řada skupin  $\mathfrak{G}$  z matice  $M$ .

$\mathfrak{H}_{\lambda_1}^{(1)}$  řada těch a jen těch skupin vybraných z řady  $H, H_1, \dots, H_{l_1-1}$ , které obsahují alespoň jeden člen s indexem, jenž se současně vyskytuje ve skupině  $G_{\lambda_1}^{(1)}$  ( $\lambda_1 = 0, 1, \dots, l_1 - 1$ );

$$H_{\lambda_1}^{(1)} \equiv \mathfrak{H}_{\lambda_1}^{(1)}, G_{\lambda_1}^{(1)}.$$

Řada skupin  $\mathfrak{G}_1$  obsahuje pak buď právě jen jednu skupinu  $G^{(1)}$ , anebo skupin více. V případě prvním položíme

$$J \equiv \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1,$$

v případě druhém budiž:  $\alpha_{\lambda_1}$  kterýkoliv z indexů vyskytujících se v členech skupiny  $H_{\lambda_1}^{(1)}$ ;

$\alpha_2, \beta_2$  dvě z čísel  $\lambda_1$ ;

$[k_{\alpha_2\beta_2} k_{\beta_2\alpha_2}]$  nejmenší z čísel  $[\alpha_{\lambda_2} \alpha_{\beta_2}]$  při  $\alpha_2 \neq \beta_2, 0$  při  $\alpha_2 = \beta_2$ ;

$M_2$  matice čís.  $[k_{\alpha_2\beta_2} k_{\beta_2\alpha_2}] (\alpha_2, \beta_2 = 0, 1, 2, \dots, l_2 - 1)$ ;

$\mathfrak{G}_2 \equiv G^{(2)}, G_1^{(2)}, \dots, G_{l_2-1}^{(2)}$  řada skupin, zkonstruovaná z matice  $M_2$  dle téhož pravidla jako řada skupin  $\mathfrak{G}$  z matice  $M$ .

$\mathfrak{H}_{\lambda_2}^{(2)}$  řada těch a jen těch skupin vybraných z řady  $H^{(1)}, H_1^{(1)}, \dots, H_{l_1-1}^{(1)}$ , které obsahují alespoň jeden člen s indexem, jenž se současně vyskytuje ve skup.  $G_{\lambda_2}^{(2)}$  ( $\lambda_2 = 0, 1, \dots, l_2 - 1$ );

$$H_{\lambda_2}^{(2)} \equiv \mathfrak{H}_{\lambda_2}^{(2)}, G_{\lambda_2}^{(2)}.$$

Řada skupin  $\mathfrak{G}_2$  obsahuje pak buď právě jen jednu skupinu  $G^{(2)}$ , anebo skupin více. V případě prvním položíme

$$J \equiv \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2,$$

v případě druhém budiž:  $\alpha_{\lambda_2}$  kterýkoliv z indexů vyskytujících se v členech skupiny  $H_{\lambda_2}^{(2)}$ ;

\*) Matice  $M_1$  jest zřejmě symetrická, neobsahuje žádného z čísel obsažených ve skupině  $\mathfrak{G}$  a její řád jest nejvýše roven největšímu cel. číslu obsaženému v  $\frac{n}{2}$ .

$\alpha_3, \beta_3$  dvě z čísel  $\lambda_2$ ;

$[k_{\alpha_3\beta_3} k_{\beta_3\alpha_3}]$  nejmenší z čísel  $[x_{\alpha_3} x_{\beta_3}]$  při  $\alpha_3 \neq \beta_3$ , 0 při  $\alpha_3 = \beta_3$ ;

$M_3$  matice čís.  $[k_{\alpha_3\beta_3} k_{\beta_3\alpha_3}] (\alpha_3, \beta_3 = 0, 1, 2, \dots, l_2 - 1)$ ;

$\mathcal{G}_3 \equiv G^{(3)}, G_1^{(3)}, \dots, G_{l_3-1}^{(3)}$  řada skupin, zkonstruovaná z matice  $M_3$  dle téhož pravidla jako řada skupin  $\mathcal{G}$  z matice  $M$ .

$\mathcal{H}_{\lambda_3}^{(3)}$  řada těch a jen těch skupin vybraných z řady  $H^{(2)}, H_1^{(2)}, \dots, H_{l_2-1}^{(2)}$ , které obsahují alespoň jeden člen s indexem, jenž se současně vyskytuje ve skup.  $G_{\lambda_3}^{(3)} (\lambda_3 = 0, 1, \dots, l_3 - 1)$ ;

$H_{\lambda_3}^{(3)} \equiv \mathcal{H}_{\lambda_3}^{(3)}, G_{\lambda_3}^{(3)}$ .

Řada skupin  $\mathcal{G}_3$  obsahuje pak buď právě jen jednu skupinu  $G^{(3)}$ , anebo skupin více. V případě prvním položíme

$$J \equiv \mathcal{G}, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3,$$

v případě druhém pokračujeme stejným způsobem dále. Obdržíme konečně skupinu

$$J \equiv \mathcal{G}, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \dots, \mathcal{G}_{u-1},$$

jež řeší danou úlohu.

**Důkaz.** Důkaz bude proveden, dokážeme-li následující věty:

I. Při libovolné volbě počátečních indexů skupin  $F_\alpha$  řady  $\mathcal{F}$  vyskytne se číslo  $[mn]$  z matice  $M$  v některé skupině této řady, když a jen když jest nejmenší buď z čísel  $[m\mu]$  ( $\mu \neq m$ ), anebo z čísel  $[n\nu]$  ( $\nu \neq n$ ).

II. V matici  $M$  existuje alespoň jedna skupina čísel vzájemně a od nuly různých, splňující podmínku  $1^0$  a taková, že součet jejich členů není větší, než součet členů kterékoliv jiné skupiny čísel vzájemně a od nuly různých, splňující podmínku  $1^0$ .

III. Je-li  $K'$  jedna ze skupin těchto vlastností, obsahuje řadu skupin  $\mathcal{G}$ .

IV. Je-li  $u \geq 2$  a  $v \leq u-1$  a obsahuje-li skupina  $K'$  skupiny  $\mathcal{G}, \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{v-1}$  obsahuje skupinu  $\mathcal{G}_v$ .

V. Skupina  $K'$  neobsahuje členu, jenž není obsažen ve skupině  $J$ .



Vskutku, pak dle I. jest skupina  $J$  maticí  $M$  úplně určena a dle III, IV, V jest totožná s každou skupinou, která má vlastnosti skupiny  $K'$ ; tedy jest skupina  $J$  řešením dané úlohy.

\* \* \*

1. Z konstrukce plyne, že čísla obsažená ve skupině  $J$  jsou vzájemně a od nuly různá; jejich počet jest  $n-1$ .

2. Budiž  $L$  skupina čísel vzájemně a od nuly různých obsažených v matici  $M$ . Když a jen když skupina  $L$  obsahuje z každého řádku matice  $M$  alespoň jedno číslo, pravím, že jest přípustná.

3. Z konstrukce plyne, že skupina  $J$  jest přípustná.

4. Při každé volbě počátečních indexů skupin  $F_\alpha$  řady  $\mathfrak{F}$  stanoví konstrukce skupiny  $J$  v každé skupině této řady určitý pořádek členů. Skupinu  $F_p$  řady  $\mathfrak{F}$  nazývám uspořádanou, když a jen když mají její členy tento pořádek.

5. Při každé volbě počátečních indexů skupin  $F_\alpha$  řady  $\mathfrak{F}$  stanoví konstrukce skupiny  $J$  v řadě  $\mathfrak{F}$  určitý pořádek skupin  $F_\alpha$ . Řadu skupin  $\mathfrak{F}$  nazývám uspořádanou, když a jen když mají skupiny  $F_\alpha$  tento pořádek.

6. Budiž

$$F_p \equiv [f_0 f_1], \dots [f_k f_{k+1}], \dots$$

uspořádaná skupina řady  $\mathfrak{F}$  o  $g$  ( $\geq 2$ ) členech. Z konstrukce plyne při pevném  $k$  ( $1 \leq k \leq g-1$ ) a  $j$  ( $1 \leq j \leq k+1$ )

$$[f_j f_\lambda] \geq [f_\lambda f_{\lambda+1}] \geq [f_k f_{k+1}] \quad (\lambda = 0, \dots, j-1).$$

**Věta I.** Při libovolné volbě počátečních indexů skupin  $F_\alpha$  řady  $\mathfrak{F}$  vyskytne se číslo  $[mn]$  z matice  $M$  v některé skupině této řady, když a jen když jest nejmenší buď z čísel  $[m\mu]$  ( $\mu \neq m$ ) anebo z čísel  $[n\nu]$  ( $\nu \neq n$ ).

1. Budiž  $[mn]$  členem skupiny  $F_p$ . Stačí uvažovati případ, že uspořádaná skupina  $F_p$  jest tvaru

$$[f_0 f_1], \dots [mn], \dots$$

Podle konstrukce jest  $[mn]$  nejmenší z čísel  $[m\gamma]$  ( $\gamma \neq f_1, \dots, m$ ); tedy dle 6. nejmenší  $i$  z čísel  $[m\mu]$  ( $\mu \neq m$ ).

2. Budiž  $[mn]$  nejmenší z čísel  $[m\mu]$  ( $\mu \neq m$ ). V uspořádané řadě skupin  $\mathfrak{F}$  budiž  $F_p$  první skupinou, která obsahuje člen  $[mp]$  s indexem  $m$ . Stačí uvažovati případ, že skupina  $F_p$  obsahuje alespoň dva členy. Jsou možny dva a jen dva vzájemně se vylučující případy:

V uspořádané skupině  $F_p$  není  $m$  indexem posledním.

V uspořádané skupině  $F_p$  jest  $m$  indexem posledním.

V případě prvním jest uspořádaná skupina  $F_p$  tvaru

$$[f_0 f_1], \dots [mp], \dots;$$

tedy dle výsledku právě odvozeného jest  $[mp]$  nejmenší z čísel  $[m\mu]$  ( $\mu \neq m$ ) a tedy totožno s  $[mn]$ .

V případě druhém jest uspořádaná skupina  $F_p$  tvaru

$$[f_0 f_1], \dots [pm]$$

a množství čísel  $[m\gamma]$  ( $\gamma \neq f_0, \dots, m$ ) jest buď prázdné, anebo nikoliv. Je-li prázdné, jest dle 6. číslo  $[pm]$  menší než každé z čísel  $[mf_\lambda]$  ( $f_\lambda \neq p, m$ ); tedy jest nejmenší z čísel  $[m\mu]$  a tedy totožno s číslem  $[mn]$ . Není-li prázdné, jest podle konstrukce číslo  $[mp]$  menší než nejmenší z čísel  $[m\gamma]$  a dle 6. také menší než nejmenší z čísel  $[mf_\lambda]$ ; tedy jest nejmenší z čísel  $[m\mu]$  a tedy totožno s číslem  $[mn]$ .

7. Skupina  $J$  jest maticí  $M$  jednoznačně určena.

Tato věta plyne bezprostředně z konstrukce skupiny  $J$  a z věty I.

**Věta II.** V matici  $M$  existuje alespoň jedna skupina čísel vzájemně a od nuly různých, splňující podmínku  $1^0$  a taková, že součet jejích členů není větší, než součet členů kterékoliv jiné skupiny čísel vzájemně a od nuly různých, splňující podmínku  $1^0$ .

Vskutku, jednak existuje zřejmě v matici  $M$  alespoň jedna skupina čísel vzájemně a od nuly různých, splňující podmínku  $1^{0*}$ ), jednak jest počet takových skupin konečný.

8. V dalším značím symbolem  $K'$  jednu ze skupin vlastností vytčených větou II.

9. Budiž  $L$  skupina čísel vzájemně a od nuly různých, obsažených v matici  $M$ . Buďtež  $p_1, p_2$  dva různé indexy členů v této skupině obsažených. Když a jen když existuje alespoň jedna částečná skupina skupiny  $L$ , obsahující alespoň jeden člen, tvaru

$$[p_1 q_1], [q_2 q_3], \dots [q_{i-1} p_2]$$

pravím, že skupina  $L$  jest úplná pro indexy  $p_1$  a  $p_2$ .

10. Když a jen když jest skupina  $L$  úplná pro indexy  $p_1$  a  $p_2$ , jest úplná pro indexy  $p_2$  a  $p_1$ .

11. Když a jen když jest skupina  $L$  přípustná a úplná pro každé dva indexy, splňuje podmínku  $1^0$ .

\*) Jest to na př. skupina od nuly různých čísel, obsažených v matici  $M$  v libovolném řádku.

12. Budiž  $L$  skupina čísel vzájemně a od nuly různých, obsažených v matici  $M$ , úplná pro dva indexy  $p_1$  a  $p_2$ . Každou částečnou skupinu skupiny  $L$ , obsahující alespoň jeden člen, jež se dá psát ve tvaru

$$[p_1 q_2], [q_2 q_3], \dots [q_{k-1} p_2]$$

nazývám skupinou pro indexy  $p_1, p_2$ . Jsou-li její členy psány právě v tomto pořádku, nazývám ji uspořádanou.

13. Uspořádanou skupinou pro indexy  $p_1, p_2$  značím symbolem  $L_{p_1, p_2}$ . Symbolu  $L_{p,q}$  přiřadím význam prázdné skupiny když  $a$  jen když  $p=q$ . Je-li tedy  $[mn]$  člen skupiny pro indexy  $p_1, p_2$  jest buď

$$L_{p_1 p_2} \equiv L_{p_1 m}, [mn], L_{n p_2} \text{ anebo } L_{p_1 p_2} \equiv L_{p_1 n}, [nm], L_{m p_2}$$

a skupiny  $L_{p_1 m}$  a  $L_{n p_2}$  po případě  $L_{p_1 n}$  a  $L_{m p_2}$  neobsahují členu  $[mn]$ .

14. Budiž  $L$  skupina čísel vzájemně a od nuly různých, obsažených v matici  $M$ , úplná vždy pro dva indexy  $q_\nu, q_{\nu+1}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n-1; n \geq 3$ ). Budiž  $p_1 \equiv q_1, p_2 \equiv q_n$  a  $p_1 \neq p_2$ . Skupina  $L$  jest úplná pro indexy  $p_1, p_2$ . Vskutku, uvažujme skupinu čísel

$$\mathfrak{L} \equiv L_{p_1 q_2}, L_{q_2 q_3}, \dots, L_{q_{n-1} p_2},$$

právě v tomto pořádku. V této skupině budiž  $[p_1 q_2]$  poslední číslo obsahující index  $p_1$ . Pak jest buď  $q_2 \equiv p_2$  anebo  $q_2 \neq p_2$ . V případě prvním položme

$$L_{p_1 p_2} \equiv [p_1 p_2],$$

v případě druhém následuje ve skupině  $\mathfrak{L}$  za členem  $[p_1 q_2]$  ještě alespoň jeden člen s indexem  $q_2$ . Budiž  $[q_2 q_3]$  poslední číslo skupiny  $\mathfrak{L}$  obsahující index  $q_2$ . Pak jest buď  $q_3 \equiv p_2$  anebo  $q_3 \neq p_2$ . V případě prvním položme

$$L_{p_1 p_2} \equiv [p_1 q_2], [q_2 p_2]$$

v případě druhém následuje ve skupině  $\mathfrak{L}$  za členem  $[q_2 q_3]$  ještě alespoň jeden člen s indexem  $q_3$ . Budiž  $[q_3 q_4]$  poslední číslo skupiny  $\mathfrak{L}$  obsahující index  $q_3$ . Pak jest buď  $q_4 \equiv p_2$ , anebo  $q_4 \neq p_2$ . V případě prvním položme

$$L_{p_1 p_2} \equiv [p_1 q_2], [q_2 q_3], [q_3 p_2],$$

v případě druhém pokračujeme stejným způsobem dále. Po konečném počtu kroků dospějeme zřejmě k uspořádané skupině pro indexy  $p_1, p_2$ , obsažené ve skupině  $L$ .

15. Budiž  $L$  skupina čísel vzájemně a od nuly různých, obsažených v matici  $M$ . Budiž  $L^*$  částečná skupina skupiny  $L$ . Skupinu všech čísel, obsažených ve skupině  $L$ , ale nikoliv ve skupině  $L^*$  a jen těch, značím symbolem  $L - L^*$ .

**Věta III.** Skupina  $K'$  obsahuje řadu skupin  $\mathcal{G}$ .

Věta jest zřejmě správná, je-li řád  $n$  matice  $M$  roven 2 nebo 3. Budiž tedy  $n \geq 4$ . Předpokládáme-li opak, dojdeme ke sporu. Vskutku, budiž  $[mn]$  číslo z matice  $M$  obsažené v řadě  $\mathcal{G}$  a nevyskytující se ve skupině  $K'$ . Podle konstrukce jest skupina čísel  $\mathcal{G}$  totožna se skupinou  $\mathcal{F}$ . Tedy dle věty I. jest  $[mn]$  buď nejmenší z čísel  $[m\mu]$  ( $\mu \neq m$ ), anebo nejmenší z čísel  $[n\nu]$  ( $\nu \neq n$ ). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládati, že jest nejmenší z čísel  $[m\mu]$ . Skupina  $K'$  obsahuje nutně člen  $[mp]$  s indexem  $m$ . Dle předpokladu není  $[mp]$  totožno s číslem  $[mn]$ ; tedy jest větší.

Skupina  $K'$  jest úplná pro indexy  $m, n$ ; jsou možny dva a jen dva vzájemně se vylučující případy:

Každá částečná skupina skupiny  $K'$  pro indexy  $m, n$  obsahuje číslo  $[mp]$ .

Ve skupině  $K'$  existuje alespoň jedna skupina pro indexy  $m, n$ , která neobsahuje čísla  $[mp]$ .

V případě prvním existuje ve skupině  $K'$  skupina pro indexy  $m, n$ , již lze dle 13 psát ve tvaru

$$[mp], L_{pn}$$

a skupina  $L_{pn}$  pro indexy  $p, n$  obsahuje nutně alespoň jeden člen. Skupina čísel vzájemně a od nuly různých, obsažených v matici  $M$

$$K'' \equiv K' - [mp], [mn]$$

1. jest přípustná.

2. Jest úplná pro libovolné dva indexy  $p_1, p_2$ . Vskutku, buď existuje ve skupině  $K'$  alespoň jedna skupina pro indexy  $p_1, p_2$ , jež neobsahuje členu  $[mp]$  a jež jest tedy současně skupinou pro indexy  $p_1, p_2$  ve skupině  $K''$ , anebo ve skupině  $K'$  každá skupina pro indexy  $p_1, p_2$  člen  $[mp]$  obsahuje. V tomto případě existují však ve skupině  $K''$  při vhodném označení obou indexů  $p_1, p_2$  zřejmě skupiny (pokud nejsou prázdné)  $L_{p_1 m}, [mn], L_{np}, L_{pp_2}$  a tedy dle 14 skupina pro indexy  $p_1, p_2$ .

3. Součet členů skupiny  $K''$  jest menší než součet členů skupiny  $K'$  — proti předpokladu.

V případě druhém existuje ve skupině  $K'$  alespoň jedna skupina pro indexy  $m, n$ , již lze psát ve tvaru

$$[mq], L_{qn}.$$

Dle předpokladu jest nutně  $q \neq n$ , tedy  $[mq] > [mn]$ . Skupina  $L_{qn}$  pro indexy  $q, n$  obsahuje nutně alespoň jeden člen. Tedy stačí aplikovati hořejší úvahu na skupinu

$$K'' \equiv K' - [mq], [mn].$$

16. Budiž  $L$  skupina čísel vzájemně a od nuly různých, obsažených v matici  $M$ . Když a jen když jest možno rozdělit tuto skupinu ve dvě ji úplně vyčerpávající skupiny částečné  $L_1, L_2$ , obsahující alespoň po jednom členu a takové, že žádná z obou skupin neobsahuje členu s indexem vyskytující se ve skupině druhé, není skupina  $L$  úplná pro každé dva indexy.

1. Budťež  $L_1, L_2$  dvě skupiny uvedených vlastností, budiž  $[p_1 q'_2]$  člen skupiny  $L_1$ ,  $[q'_{k-1} p_2]$  člen skupiny  $L_2$  a předpokládejme, že existuje ve skupině  $L$  alespoň jedna skupina pro indexy  $p_1, p_2$

$$L_{p_1 p_2} \equiv [p_1 q_2], [q_2 q_3], \dots [q_{k-1} p_2].$$

Ježto skupina  $L_2$  neobsahuje dle předpokladu členu s indexem  $p_1$ , jest člen  $[p_1 q_2]$  nutně obsažen ve skupině  $L_1$ . Podobně se zjistí, že ve skupině  $L_1$  jest obsažen také každý další člen skupiny  $L_{p_1 p_2}$ , tedy zvláště člen  $[q_{k-1} p_2]$ . Tedy obsahuje každá z obou skupin  $L_1, L_2$  člen s indexem  $p_2$  — proti předpokladu.

2. Budťež  $[p_1 q_2], [q_{k-1} p_2]$  dva členy skupiny  $L$ ,  $p_1 \neq p_2$  a předpokládejme, že skupina  $L$  není úplná pro indexy  $p_1, p_2$ . Položme  $\mathfrak{L}_1 \equiv [p_1 q_2]$ . Skupina  $L - \mathfrak{L}_1$  buď neobsahuje členu s indexem, vyskytující se současně ve skupině  $\mathfrak{L}_1$ , anebo obsahuje alespoň jeden takový člen. V případě prvním položme

$$L_1 \equiv \mathfrak{L}_1; L_2 \equiv L - \mathfrak{L}_1,$$

v případě druhém budiž  $\mathfrak{L}_2$  částečná skupina skupiny  $L - \mathfrak{L}_1$ , obsahující členy s indexy, vyskytujícími se současně ve skupině  $\mathfrak{L}_1$ . Skupina  $L - \mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_2$  buď neobsahuje členu s indexem, vyskytující se současně ve skupině  $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ , anebo obsahuje alespoň jeden takový člen. V případě prvním položme

$$L_1 \equiv \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2; L_2 \equiv L - \mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_2,$$

v případě druhém budiž  $\mathfrak{L}_3$  částečná skupina skupiny  $L - \mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_2$ , obsahující členy s indexy, vyskytujícími se současně ve skupině  $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ . Skupina  $L - \mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_2 - \mathfrak{L}_3$  buď neobsahuje členu s indexem, vyskytující se současně ve skupině  $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3$ , anebo obsahuje alespoň jeden takový člen. V případě prvním položme

$$L_1 \equiv \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3; L_2 \equiv L - \mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_2 - \mathfrak{L}_3,$$

v případě druhém pokračujme stejným způsobem dále. Dospějeme zřejmě ke dvěma skupinám  $L_1, L_2$ , z nichž žádná neobsahuje členu s indexem vyskytující se ve skupině druhé. Skupina  $L_1$  obsahuje zřejmě alespoň jeden člen. Skupina  $L_2$  obsahuje rovněž alespoň jeden člen. Vskutku, z konstrukce jest patrné, že skupina  $L_1$  jest úplná pro každé dva indexy;

tedy neobsahuje členu  $[q_{k-1} p_2]$ . Tedy jest člen  $[q_{k-1} p_2]$  obsažen ve skupině  $L_2$ .

17. Budiž  $L$  skupina čísel vzájemně a od nuly různých, obsažených v matici  $M$ . Buďtež  $L_1, L_2$  částečné skupiny skupiny  $L$ , tuto úplně vyčerpávající, obsahující alespoň po jednom členu a takové, že žádná z nich neobsahuje členu s indexem vyskytujícíím se ve skupině druhé. Budiž  $L^*$  částečná skupina skupiny  $L$ , obsahující alespoň jeden člen a úplná pro každé dva indexy. Jedna z obou skupin  $L_1, L_2$  obsahuje celou skupinu  $L^*$ .

Tato věta plyne bezprostředně z 16.

18. Každá skupina  $F_i$  ( $i$  pevné,  $\leq i - 1$ ) řady  $\mathfrak{F}$  jest úplná pro každé dva indexy  $p_1, p_2$ .

Zřejmě stačí uvažovati skup.  $F$ . Budiž  $p_1 \equiv f_h, p_2 \equiv f_k$  ( $h, k \leq g; h \neq k$ ). Pak jest buď  $h < k \leq g$  anebo  $k < h < g$ .

V případě prvním jest

$$[p_1 f_{h+1}], [f_{h+1} f_{h+2}], \dots [f_{k-1} p_2]$$

v případě druhém jest

$$[p_1 f_{h-1}], [f_{h-1} f_{h-2}], \dots [f_{k+1} p_2]$$

uspořádanou skupinou pro indexy  $p_1, p_2$ ,

19. Každá skupina  $G_\lambda$  ( $\lambda$  pevné,  $\leq \lambda - 1$ ) řady  $\mathfrak{G}$  jest úplná pro každé dva indexy  $p_1, p_2$ .

Zřejmě stačí uvažovati skupinu  $G$ . Je-li  $G \equiv F$ , jest dle 18 věta dokázána. Budiž tedy  $G \equiv F, F_1, \dots, F_{k-1}$  ( $k \geq 2$ ). Položme

$$F^{(x-1)} \equiv F, F_1, \dots, F_{x-1} \quad (x \leq k).$$

Důkaz úplnou indukcí: Předpokládejme, že úplné pro každé dva indexy  $p_1, p_2$  jsou skupiny  $F, F^{(1)}, \dots, F^{(m-1)}$  ( $m$  pevné,  $\leq k - 1$ ) a ukažme, že pak i skupina  $F^{(m)}$  jest pro každé dva indexy úplná.

Stačí uvažovati případ, že index  $p_1$  vyskytuje se pouze mezi indexy členů skupiny  $F^{(m-1)}$ , index  $p_2$  pouze mezi indexy členů skupiny  $F_m$ . Podle konstrukce skupiny  $G$  jest obsažen ve skupině  $F^{(m-1)}$  člen s indexem  $j_{m-1}$ , vyskytujícíím se současně v indexech členů skupiny  $F_m$ ; tedy jest  $p_1 \neq j_{m-1}, p_2 \neq j_{m-1}$ . Dle předpokladu jest skupina  $F^{(m-1)}$  a tedy i skupina  $F^{(m)}$  úplná pro indexy  $p_1, j_{m-1}$  a dle 18 jest skupina  $F_m$  a tedy i skupina  $F^{(m)}$  úplná pro indexy  $j_{m-1}, p_2$ . Tedy dle 14 jest skupina  $F^{(m)}$  úplná pro indexy  $p_1, p_2$ .

20. Každá skupina  $H_{\lambda_\rho}^{(\rho)}$  ( $\rho$  pevné  $\leq u - 1; \lambda_\rho$  pevné,  $\leq l_\rho - 1$ ) jest úplná pro každé dva indexy  $p_1, p_2$ .

Zřejmě stačí uvažovati skupinu  $H^{(\varrho)}$ . Je-li  $\varrho = 0$  ( $H^{(0)} \equiv H \equiv G$ ) jest dle 19 věta dokázána. Budiž tedy  $\varrho \geq 1$ .

Důkaz úplnou indukcí: Předpokládejme, že úplná pro každé dva indexy  $p_1, p_2$  jest každá skupina z řady  $H_{\lambda}, H_{\lambda_1}^{(1)}, \dots, H_{\lambda_{m-1}}^{(m-1)}$  ( $m$  pevné,  $\leq \varrho$ ;  $\lambda = 0, 1, \dots, l-1$ ;  $\lambda_1 = 0, 1, \dots, l_1-1$ ;  $\lambda_{m-1} = 0, 1, \dots, l_{m-1}-1$ ) a ukažme, že pak i skupina  $H^{(m)}$  jest pro každé dva indexy úplná.

Kdyby skupina  $H^{(m)}$  nebyla úplná pro každé dva indexy, bylo by ji možno dle 16 rozdělití ve dvě ji úplně vyčerpávající skupiny částečné  $L_1, L_2$ , obsahující alespoň po jednom členu a takové, že žádná z nich by neobsahovala členu s indexem, vyskytující se ve skupině druhé. Dle konstrukce jest  $H^{(m)} \equiv \mathfrak{H}^{(m)}, G^{(m)}$ ; tedy by jedna z obou skupin  $L_1, L_2$  obsahovala alespoň jeden člen ze skupiny  $\mathfrak{H}^{(m)}$ , tedy alespoň jeden člen určité skupiny z řady  $H_{\lambda_{m-1}}^{(m-1)}$  a tedy dle 17 celou tuto skupinu; tedy dle konstrukce alespoň jeden člen ze skupiny  $G^{(m)}$  a tedy dle 19 a 17 celou tuto skupinu; tedy dle konstrukce alespoň jeden člen z každé ze zbývajících skupin řady  $\mathfrak{H}^{(m)}$  a tedy dle 17 celou tuto řadu skupin; tedy by byla druhá z obou skupin  $L_1, L_2$  prázdná — což jest spor.

21. Skupina  $J$  splňuje podmínku  $1^0$ .

Tato věta plyne bezprostředně z 3, 20 a 11.

22. Z konstrukce plyne, že řada skupin  $H_{\lambda_{\varrho}}^{(\varrho)}$  ( $\varrho$  pevné  $\leq u-1$ ;  $\lambda_{\varrho} = 0, 1, \dots, l_{\varrho}-1$ ) obsahuje všechna čísla obsažená v řadě  $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \dots, \mathfrak{G}_{\varrho}$  a jen ta.

23. Z konstrukce plyne, že při  $u \geq 2$  žádná skupina z řady skupin  $H_{\lambda_{\varrho}}^{(\varrho)}$  ( $\varrho$  pevné,  $\leq u-2$ ;  $\lambda_{\varrho} = 0, 1, \dots, l_{\varrho}-1$ ) neobsahuje členu s indexem, vyskytující se v jiné skupině téže řady.

24. Budiž  $u \geq 2$ ;  $v \leq u-1$ . Obsahuje-li skupina  $K'$  skupiny  $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \dots, \mathfrak{G}_{v-1}$ , obsahuje dle 22 řadu skupin  $H_{\lambda_{v-1}}^{(v-1)}$ ; tedy jest tvaru  $K' \equiv H^{(v-1)}, H_1^{(v-1)}, \dots, H_{l_{v-1}-1}^{(v-1)}; M^{(v-1)}$

25. Z 23 a 16 ihned vyplývá, že skupina  $M^{(v-1)}$  není prázdná.

26. Ke každé skupině z řady  $H_{\lambda_{v-1}}^{(v-1)}$  existuje ve skupině  $M^{(v-1)}$  alespoň jeden člen, jehož jeden a jen jeden index se vyskytuje mezi indexy členů této skupiny.

Vskutku, jinak by ihned plynulo z 23 a 16, že skupina  $K'$  není úplná pro každé dva indexy.

27. Budiž  $N_{\lambda_{v-1}}^{(v-1)}$  skupina všech členů skupiny  $M^{(v-1)}$ , jejichž jeden a jen jeden index se vyskytuje mezi indexy členů skupiny  $H_{\lambda_{v-1}}^{(v-1)}$  ( $\lambda_{v-1}$  pevné).

Skupinu všech vzájemně různých čísel, obsažených ve skupině  $N^{(v-1)}$ ,  $N_1^{(v-1)}, \dots, N_{|v-1|-1}^{(v-1)}$  a tedy také ve skupině  $M^{(v-1)}$  značím v dalším symbolem  $M_*^{(v-1)}$ .

28. Skupina  $M_*^{(v-1)}$  obsahuje dle 26 alespoň jeden člen.

29. Budiž  $[mn]$  člen skupiny  $M_*^{(v-1)}$ . Buďtež  $k_1, k_2$  libovolné dva indexy vyskytující se v těchže dvou různých skupinách řady  $H_{\lambda, v-1}^{(v-1)}$  jako indexy  $m, n$ . Budiž  $[k_1 k_2] \neq [mn]$ . Číslo  $[k_1 k_2]$  není členem skupiny  $K'$ .

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládati, že indexy  $m, k_1$  vyskytují se mezi indexy členů skupiny  $H^{(v-1)}$ , indexy  $n, k_2$  mezi indexy členů skupiny  $H_1^{(v-1)}$ . Předpokládejme opak, tedy že  $[k_1 k_2]$  jest členem skupiny  $K'$ . Skupina

$$K'' \equiv K' - [k_1 k_2]$$

1. jest přípustná.

2. Jest úplná pro libovolné dva indexy  $p_1, p_2$ . Vskutku, ve skupině  $K'$  existuje skupina pro indexy  $p_1, p_2$ . Tato buď neobsahuje členu  $[k_1 k_2]$  a jest tedy obsažena ve skupině  $K''$ , anebo člen  $[k_1 k_2]$  obsahuje. V tomto případě však dle 20 existují ve skupině  $K''$  skupiny (pokud nejsou prázdné)  $L_{k_1 m}, L_{n k_2}$  a tedy dle 13 při vhodném označení indexů  $p_1, p_2$  skupiny (pokud nejsou prázdné)  $L_{p_1 k_1}, L_{k_1 m}, [mn], L_{n k_2}, L_{k_2 p_2}$ ; tedy dle 14 skupina pro indexy  $p_1, p_2$ .

3. Součet členů skupiny  $K''$  jest menší než součet členů skupiny  $K'$  — proti předpokladu.

30. Skupina  $M_*^{(v-1)}$  jest obsažena v matici  $M_v$ .

Vskutku, předpokládáme-li opak, dojdeme ke sporu. Budiž  $[mn]$  člen skupiny  $M_*^{(v-1)}$ ; bez újmy na obecnosti můžeme předpokládati, že index  $m$  vyskytuje se mezi indexy členů skupiny  $H^{(v-1)}$ , index  $n$  mezi indexy členů skupiny  $H_1^{(v-1)}$ . Budiž nyní pro jednoduchost  $[k_1 k_2]$  nejmenší z čísel  $[x_1 x_2]$  ( $x_1, (x_2)$  kterýkoliv z indexů, vyskytujících se ve členech skupiny  $H^{(v-1)}$  ( $H_1^{(v-1)}$ )) a předpokládejme, že číslo  $[mn]$  není obsaženo v matici  $M_v$ ; tedy  $[mn] > [k_1 k_2]$ .

Skupina čísel vzájemně (dle 29) a od nuly různých, obsažených v matici  $M$

$$K'' \equiv K' - [mn], [k_1 k_2]$$

1. jest přípustná.

2. Jest úplná pro libovolné dva indexy  $p_1, p_2$ . Vskutku, buď existuje ve skupině  $K'$  alespoň jedna skupina pro indexy  $p_1, p_2$ , jež neobsahuje členu  $[mn]$  a jež jest tedy současně skupinou pro indexy  $p_1, p_2$  ve



skupině  $K''$ , anebo ve skupině  $K'$  každá skupina pro indexy  $p_1, p_2$  člen  $[mn]$  obsahuje. V tomto případě existují však dle 20 ve skupině  $K''$  skupiny (pokud nejsou prázdné)  $L_{mk_1}, L_{k_2n}$  a tedy dle 13 při vhodném označení indexů  $p_1, p_2$  skupiny (pokud nejsou prázdné)  $L_{p_1m}, L_{mk_1}, [k_1 k_2] L_{k_2n}, L_{np_2}$ ; tedy dle 14 skupina pro indexy  $p_1, p_2$ .

3. Součet členů skupiny  $K''$  jest menší než součet členů skupiny  $K'$  — proti předpokladu.

**Věta IV.** Budiž  $u \geq 2, v \leq u-1$ . Obsahuje-li skupina  $K'$  skupiny  $\mathcal{G}, \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{v-1}$ , obsahuje skupinu  $\mathcal{G}_v$ .

Vskutku, obsahuje-li skupina  $K'$  skupiny  $\mathcal{G}, \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{v-1}$ , obsahuje dle 24, 27, 28, 30 skupinu čísel  $M_*^{(v-1)}$ , nikoliv prázdnou, obsaženou v matici  $M_v$ .

Skupina  $M_*^{(v-1)}$  čísel vzájemně a od nuly různých, obsažených v matici  $M_v$

1. jest pro matici  $M_v$  dle 26 přípustná.

2. Jest úplná pro každé dva indexy. Vskutku, jinak by bylo možno dle 16 ji rozdělití ve dvě ji úplně vyčerpávající skupiny částečné, obsahující alespoň po jednom členu a takové, že žádná z nich by neobsahovala členu s indexem, vyskytujícím se ve skupině druhé. Z 23 a 16 by pak ihned plynulo, že skupina  $K'$  není úplná pro každé dva indexy — proti předpokladu.

3. Součet členů skupiny  $M_*^{(v-1)}$  zřejmě není větší než součet členů kterékoliv skupiny jiné, obsažené v matici  $M_v$  a splňující předcházející dvě podmínky.

Skupina  $M_*^{(v-1)}$  jest tedy skupinou čísel z matice  $M_v$ , mající tytéž vlastnosti jako skupina čísel  $K'$  z matice  $M$ . Tedy dle věty III. obsahuje skupinu  $\mathcal{G}_v$ .

31. Skupina  $K'$  obsahuje skupinu  $J$ .

Tato věta plyne bezprostředně z vět III a IV.

**Věta V.** Skupina  $K'$  neobsahuje členu, jenž není obsažen ve skupině  $J$ .

Vskutku, skupina  $J$  splňuje dle 21 podmínku  $1^0$ . Součet jejích členů nemůže tedy být menší než součet členů skupiny  $K'$ .

32. Skupina  $J$  řeší danou úlohu.

Tato věta plyne bezprostředně ze 7, 31 a věty V.

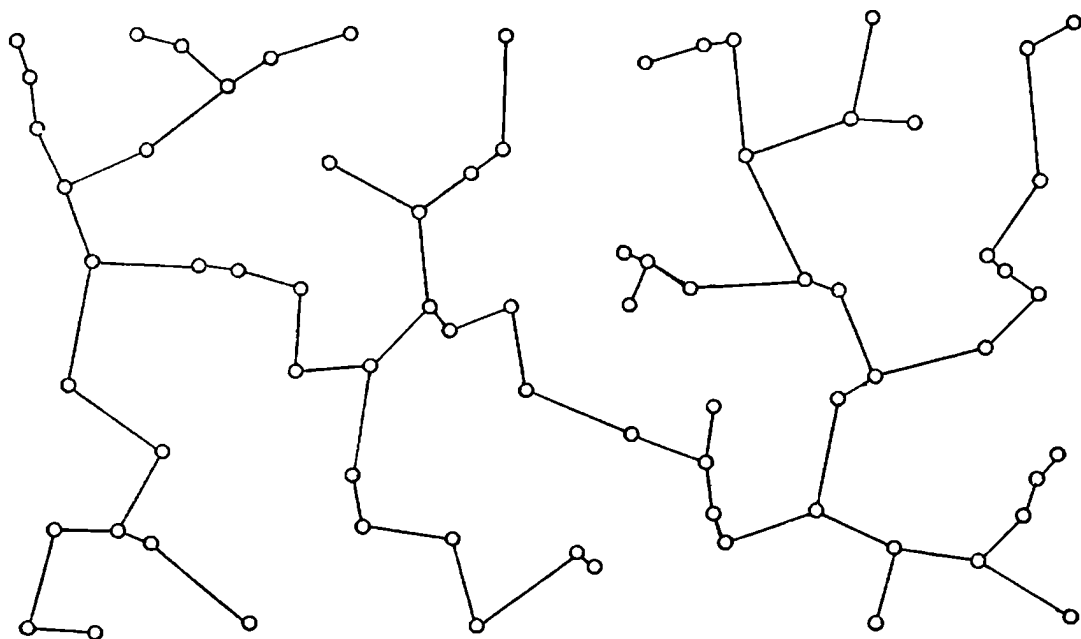
**Poznámka.** Hoví-li čísla  $[\alpha\beta]$  v matici  $M$  zvláštním podmínkám, můžeme je interpretovati jako vzájemné vzdálenosti mezi  $n$  body; v odvozeném výsledku jest pak řešena následující úloha:

V rovině (obecně v  $r$ -rozměrném prostoru) jest dáno  $n$  [ $\geq 2$ ] bodů, jejichž vzdálenosti jsou vesměs různé. Jest je spojití sítí tak, aby

1° každé dva body byly spojeny buď přímo anebo prostřednictvím jiných,

2° celková délka sítě byla co nejmenší.

V následujícím obrazci jest podáno řešení této úlohy ve zvláštním případě.\*)



\*) Jak na základě odvozeného výsledku lze je prakticky nalézt, jest vloženo v mém článku „Příspěvek k řešení otázky ekonomické stavby elektrovodných sítí“ v Elektrotechnickém obzoru roč. 15., 1926.

## Über ein Minimalproblem.

In dieser Arbeit löse ich folgendes Problem:

Es möge eine Matrix der bis auf die Bedingungen  $r_{\alpha\alpha} = 0$ ,  $r_{\alpha\beta} = r_{\beta\alpha}$  positiven und von einander verschiedenen Zahlen  $r_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$ ;  $n \geq 2$ ) gegeben sein.

Aus dieser ist eine Gruppe von einander und von Null verschiedener Zahlen auszuwählen, so dass

1° in ihr zu zwei willkürlich gewählten natürlichen Zahlen  $p_1, p_2$  ( $\leq n$ ) eine Teilgruppe von der Gestalt

$$r_{p_1 c_2}, r_{c_2 c_3}, r_{c_3 c_4}, \dots, r_{c_{q-2} c_{q-1}}, r_{c_q 1} p_2$$

existiere,

2° die Summe ihrer Glieder kleiner sei als die Summe der Glieder irgendeiner anderen, der Bedingung 1° genügenden Gruppe von einander und von Null verschiedenen Zahlen.\*)

**Lösung.** Es sei  $f_0$  eine der Zahlen  $\alpha$  und  $[f_0 f_1]$  die kleinste der Zahlen  $[f_0 \gamma_0]$  ( $\gamma_0 \neq f_0$ ). Dann ist die Menge der Zahlen  $[f_1 \gamma_1]$  ( $\gamma_1 \neq f_0, f_1$ ) entweder leer, oder sie ist es nicht. Im ersten Falle setzen wir

$$F \equiv [f_0 f_1],$$

im zweiten ist die kleinste der Zahlen  $[f_1 \gamma_1]$  entweder grösser als  $[f_0 f_1]$ , oder kleiner. Ist sie grösser, so setzen wir

$$F = [f_0 f_1],$$

ist sie kleiner, betrachten wir die kleinste der Zahlen  $[f_1 \gamma_1]$ ; diese sei  $[f_1 f_2]$ . Dann ist die Menge der Zahlen  $[f_2 \gamma_2]$  ( $\gamma_2 \neq f_0, f_1, f_2$ ) entweder leer, oder sie ist es nicht. Im ersten Falle setzen wir

$$F \equiv [f_0 f_1], [f_1 f_2],$$

im zweiten ist die kleinste der Zahlen  $[f_2 \gamma_2]$  entweder grösser als  $[f_1 f_2]$ , oder kleiner. Ist sie grösser, so setzen wir

$$F \equiv [f_0 f_1], [f_1 f_2]$$

\*) Der Einfachheit halber bezeichne ich die Zahl  $r_{\alpha\beta}$  mit  $[\alpha\beta]$ .

ist sie kleiner, betrachten wir die kleinste der Zahlen  $[f_2\gamma_2]$ ; diese sei  $[f_3\gamma_3]$ . Dann ist die Menge der Zahlen  $[f_3\gamma_3]$  ( $\gamma_3 \neq f_0, f_1, f_2, f_3$ ) entweder leer, oder sie ist es nicht. Im ersten Falle setzen wir

$$F \equiv [f_0f_1], [f_1f_2], [f_2f_3],$$

im zweiten ist die kleinste der Zahlen  $[f_3\gamma_3]$  entweder grösser als  $[f_2f_3]$ , oder kleiner. Ist sie grösser, so setzen wir

$$F \equiv [f_0f_1], [f_1f_2], [f_2f_3],$$

ist sie kleiner, so setzen wir das Verfahren in derselben Weise fort. Wir gelangen endlich zu einer Gruppe

$$F \equiv [f_0f_1], [f_1f_2], [f_2f_3], \dots [f_{g-1}f_g].$$

Unter den Indices  $f_0, f_1, \dots, f_g$  kommt dann entweder eine jede der Zahlen  $1, 2, \dots, n$  wenigstens einmal vor, oder nicht. Im ersten Falle setzen wir

$$\mathfrak{F} \equiv F,$$

im zweiten sei  $f_0^{(1)}$  eine der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ , die unter den Zahlen  $f_0, f_1, \dots, f_g$  nicht vorkommt. Es sei  $[f_0^{(1)}f_1^{(1)}]$  die kleinste der Zahlen  $[f_0^{(1)}\gamma_0^{(1)}]$  ( $\gamma_0^{(1)} \neq f_0^{(1)}$ ). Von dieser Zahl ausgehend konstruieren wir in derselben Weise wie früher die Gruppe

$$F_1 \equiv [f_0^{(1)}f_1^{(1)}], [f_1^{(1)}f_2^{(1)}], \dots [f_{g_1-1}^{(1)}f_{g_1}^{(1)}].$$

Sollten wir bei der Konstruktion dieser Gruppe zu einer Zahl gelangen, deren Index bereits unter den Indices der Zahlen der Gruppe  $F$  vorkommt, so setzen wir, wenn  $f_{h_1}^{(1)}$  den ersten solcher Indices bezeichnet,  $f_{g_1}^{(1)} \equiv f_{h_1}^{(1)}$ .

Unter den Indices  $f_0, f_1, \dots, f_g; f_0^{(1)}, f_1^{(1)}, \dots, f_{g_1}^{(1)}$ , kommt dann entweder eine jede der Zahlen  $1, 2, \dots, n$  wenigstens einmal vor, oder nicht. Im ersten Falle setzen wir

$$\mathfrak{F} \equiv F, F_1,$$

im zweiten sei  $f_0^{(2)}$  eine der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ , die unter den Zahlen  $f_0, f_1, \dots, f_g; f_0^{(1)}, f_1^{(1)}, \dots, f_{g_1}^{(1)}$  nicht vorkommt. Es sei  $[f_0^{(2)}f_1^{(2)}]$  die kleinste der Zahlen  $[f_0^{(2)}\gamma_0^{(2)}]$  ( $\gamma_0^{(2)} \neq f_0^{(2)}$ ). Von dieser Zahl ausgehend konstruieren wir in derselben Weise wie früher die Gruppe

$$F_2 \equiv [f_0^{(2)}f_1^{(2)}], [f_1^{(2)}f_2^{(2)}], \dots [f_{g_2-1}^{(2)}f_{g_2}^{(2)}].$$

Sollten wir bei der Konstruktion dieser Gruppe zu einer Zahl gelangen, deren Index bereits unter den Indices der Zahlen der Gruppen

$F, F_1$  vorkommt, so setzen wir, wenn  $f_{i_2}^{(2)}$  den ersten solcher Indices bezeichnet  $f_{g_2}^{(2)} \equiv f_{h_2}^{(2)}$ .

Unter den Indices  $f_0, f_1, \dots, f_g; f_0^{(1)}, f_1^{(1)}, \dots, f_{g_1}^{(1)}; f_0^{(2)}, f_1^{(2)}, \dots, f_{g_2}^{(2)}$  kommt dann entweder eine jede der Zahlen  $1, 2, \dots, n$  wenigstens einmal vor, oder nicht. Im ersten Falle setzen wir

$$\mathfrak{F} \equiv F, F_1, F_2,$$

im zweiten Falle setzen wir das Verfahren in derselben Weise fort. Wir gelangen endlich zu einer Reihe von Gruppen

$$\mathfrak{F} \equiv F, F_1, F_2, \dots, F_{i-1},$$

die als eine Gruppe von Zahlen betrachtet, Zahlen mit allen Indices enthält.

Die Reihe von Gruppen  $\mathfrak{F}$  enthält entweder gerade nur die Gruppe  $F$  oder mehrere Gruppen. Im ersten Falle setzen wir

$$G \equiv F,$$

im zweiten enthält die Gruppe  $F$  entweder keine Zahl, deren Index in einer der übrigen Gruppen der Reihe  $\mathfrak{F}$  vorkommt, oder sie enthält eine solche. Enthält sie keine solche Zahl, so setzen wir

$$G \equiv F,$$

enthält sie eine solche, so können wir allgemein annehmen, sie enthalte eine Zahl, deren Index unter den Indices der Zahlen der Gruppe  $F_1$  vorkommt.

Die Reihe von Gruppen  $\mathfrak{F}$  enthält dann entweder gerade nur die Gruppen  $F, F_1$ , oder mehrere Gruppen. Im ersten Falle setzen wir

$$G \equiv F, F_1,$$

im zweiten enthält die Gruppe  $F, F_1$  entweder keine Zahl, deren Index in einer der übrigen Gruppen der Reihe  $\mathfrak{F}$  vorkommt, oder sie enthält eine solche. Enthält sie keine solche Zahl, so setzen wir

$$G \equiv F, F_1,$$

enthält sie eine solche, so können wir allgemein annehmen, sie enthalte eine Zahl, deren Index unter den Indices der Zahlen der Gruppe  $F_2$  vorkommt.

Die Reihe von Gruppen  $\mathfrak{F}$  enthält dann entweder gerade nur die Gruppen  $F, F_1, F_2$ , oder mehrere Gruppen. Im ersten Falle setzen wir

$$G \equiv F, F_1, F_2,$$

im zweiten Falle setzen wir das Verfahren in derselben Weise fort. Wir gelangen endlich zu einer Gruppe von Zahlen

$$G \equiv F, F_1, F_2, \dots F_{k-1}.$$

Diese enthält entweder alle Gruppen der Reihe  $\mathfrak{F}$  oder nicht. Im ersten Falle setzen wir

$$\mathfrak{G} \equiv G,$$

im zweiten existiert in der Reihe  $\mathfrak{F}$  eine Gruppe  $F_k$  in der keine Zahl mit einem unter den Indices der Zahlen der Gruppe  $G$  vorkommenden Index enthalten ist.

Die Reihe von Gruppen  $\mathfrak{F}$  enthält dann entweder gerade nur die Gruppen  $G, F_k$ , oder mehrere Gruppen. Im ersten Falle setzen wir

$$G_1 \equiv F_k,$$

im zweiten enthält die Gruppe  $F_k$  entweder keine Zahl, deren Index in einer der übrigen Gruppen der Reihe  $\mathfrak{F}$  vorkommt, oder sie enthält eine solche. Enthält sie keine solche Zahl, so setzen wir

$$G_1 \equiv F_k,$$

enthält sie eine solche, so können wir allgemein annehmen, sie enthalte eine Zahl, deren Index unter den Indices der Zahlen der Gruppe  $F_{k+1}$  vorkommt.

Die Reihe von Gruppen  $\mathfrak{F}$  enthält dann entweder gerade nur die Gruppen  $G, F_k, F_{k+1}$ , oder mehrere Gruppen. Im ersten Falle setzen wir

$$G_1 = F_k, F_{k+1},$$

im zweiten Falle setzen wir das Verfahren in derselben Weise fort. Wir gelangen endlich zu einer Gruppe von Zahlen

$$G_1 \equiv F_k, F_{k+1}, \dots F_{k_1-1}.$$

Die Gruppe  $G, G_1$  enthält dann entweder alle Gruppen der Reihe  $\mathfrak{F}$  oder nicht. Im ersten Falle setzen wir

$$\mathfrak{G} \equiv G, G_1,$$

im zweiten Falle setzen wir das Verfahren in derselben Weise fort. Wir gelangen endlich zu einer Reihe von Gruppen

$$\mathfrak{G} \equiv G, G_1, \dots G_{l-1}.$$

Diese enthält alle Gruppen der Reihe  $\mathfrak{F}$  und die Indices der Zahlen von zwei verschiedenen Gruppen dieser Reihe sind verschieden.

Es sei  $H_\lambda \equiv G_\lambda$  ( $\lambda = 0, 1, \dots l-1$ ).

Die Reihe von Gruppen  $\mathfrak{G}$  enthält entweder gerade nur die Gruppe  $G$ , oder mehrere Gruppen. Im ersten Falle setzen wir

$$J \equiv \mathfrak{G},$$

im zweiten sei:  $\alpha_\lambda$  einer der Indices der Zahlen der Gruppe  $H_\lambda$ ;  
 $\alpha_1, \beta_1$  zwei der Zahlen  $\lambda$ ;  
 $[k_{\alpha_1\beta_1} k_{\beta_1\alpha_1}]$  die kleinste der Zahlen  $[x_{\alpha_1} x_{\beta_1}]$  für  $\alpha_1 \neq \beta_1$ , 0 für  $\alpha_1 = \beta_1$ ;  
 $M_1$  Matrix der Zahlen  $[k_{\alpha_1\beta_1} k_{\beta_1\alpha_1}]$  ( $\alpha_1, \beta_1 = 0, 1, \dots, l_1 - 1$ ).  
 $\mathfrak{G}_1 \equiv G^{(1)}, G_1^{(1)}, \dots, G_{l_1-1}^{(1)}$  die durch dasselbe Verfahren wie die Reihe  $\mathfrak{G}$  aus der Matrix  $M$ , hergestellte Reihe von Gruppen aus der Matrix  $M_1$ ;  
 $\mathfrak{H}_{\lambda_1}^{(1)}$  die Reihe derjenigen der Gruppen  $H, H_1, \dots, H_{l_1-1}$ , die wenigstens eine Zahl mit einem in den Indices der Zahlen der Gruppe  $G_{\lambda_1}^{(1)}$  ( $\lambda_1 = 0, 1, \dots, l_1 - 1$ ) vorkommenden Index enthalten;  
 $H_{\lambda_1}^{(1)} \equiv \mathfrak{H}_{\lambda_1}^{(1)}, G_{\lambda_1}^{(1)}$ .

Die Reihe von Gruppen  $\mathfrak{G}_1$  enthält dann entweder gerade nur die Gruppe  $G^{(1)}$ , oder mehrere Gruppen. Im ersten Falle setzen wir

$$J = \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1,$$

im zweiten sei  $\alpha_{\lambda_1}$  einer der Indices der Zahlen der Gruppe  $H_{\lambda_1}^{(1)}$ ;  
 $\alpha_2, \beta_2$  zwei der Zahlen  $\lambda_1$ ;  
 $[k_{\alpha_2\beta_2} k_{\beta_2\alpha_2}]$  die kleinste der Zahlen  $[x_{\alpha_2} x_{\beta_2}]$  für  $\alpha_2 \neq \beta_2$ , 0 für  $\alpha_2 = \beta_2$ ;  
 $M_2$  Matrix der Zahlen  $[k_{\alpha_2\beta_2} k_{\beta_2\alpha_2}]$  ( $\alpha_2, \beta_2 = 0, 1, \dots, l_1 - 1$ );  
 $\mathfrak{G}_2 \equiv G^{(2)}, G_1^{(2)}, \dots, G_{l_1-1}^{(2)}$  die durch dasselbe Verfahren wie die Reihe  $\mathfrak{G}$  aus der Matrix  $M$ , hergestellte Reihe von Gruppen aus der Matrix  $M_2$ ;  
 $\mathfrak{H}_{\lambda_2}^{(2)}$  die Reihe derjenigen der Gruppen  $H^{(1)}, H_1^{(1)}, \dots, H_{l_1-1}^{(1)}$ , die wenigstens eine Zahl mit einem in den Indices der Zahlen der Gruppe  $G_{\lambda_2}^{(2)}$  ( $\lambda_2 = 0, 1, \dots, l_1 - 1$ ) vorkommenden Index enthalten;  
 $H_{\lambda_2}^{(2)} \equiv \mathfrak{H}_{\lambda_2}^{(2)}, G_{\lambda_2}^{(2)}$ .

Die Reihe von Gruppen  $\mathfrak{G}_2$  enthält dann entweder gerade nur die Gruppe  $G^{(2)}$ , oder mehrere Gruppen. Im ersten Falle setzen wir

$$J \equiv \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$$

- im zweiten sei:  $\alpha_{\lambda_2}$  einer der Indices der Zahlen der Gruppe  $H_{\lambda_2}^{(2)}$ ;  
 $\alpha_3, \beta_3$  zwei der Zahlen  $\lambda_2$ ;  
 $[k_{\alpha_3\beta_3} k_{\beta_3\alpha_3}]$  die kleinste der Zahlen  $[x_{\alpha_3} x_{\beta_3}]$  für  $\alpha_3 \neq \beta_3$ ,  
 0 für  $\alpha_3 = \beta_3$ ;  
 $M_3$  Matrix der Zahlen  $[k_{\alpha_3\beta_3} k_{\beta_3\alpha_3}]$  ( $\alpha_3, \beta_3 = 0, 1, \dots, l_2 - 1$ );  
 $\mathfrak{G}_3 \equiv G^{(3)}, G_1^{(3)}, \dots, G_{l_3-1}^{(3)}$  die durch dasselbe Verfahren wie die Reihe  $\mathfrak{G}$  aus der Matrix  $M$ , hergestellte Reihe von Gruppen aus der Matrix  $M_3$ ;  
 $\mathfrak{H}_{\lambda_3}^{(3)}$  die Reihe derjenigen der Gruppen  $H^{(2)}, H_1^{(2)}, \dots, H_{l_2-1}^{(2)}$ , die wenigstens eine Zahl mit einem in den Indices der Zahlen der Gruppe  $G_{\lambda_3}^{(3)}$  ( $\lambda_3 = 0, 1, \dots, l_3 - 1$ ) vorkommenden Index enthalten;  
 $H_{\lambda_3}^{(3)} = \mathfrak{H}_{\lambda_3}^{(3)}, G_{\lambda_3}^{(3)}$ .

Die Reihe von Gruppen  $\mathfrak{G}_3$  enthält dann entweder gerade nur die Gruppe  $G^{(3)}$ , oder mehrere Gruppen. Im ersten Falle setzen wir

$$J \equiv \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3,$$

im zweiten Falle setzen wir das Verfahren in derselben Weise fort. Wir gelangen endlich zu einer Gruppe von Zahlen

$$J \equiv \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \dots, \mathfrak{G}_{u-1}$$

die das vorgelegte Problem löst.

\*

Der Beweis wird durch folgende Sätze erbracht:

- I. Eine Zahl  $[mn]$  aus der Matrix  $M$  erscheint bei beliebiger Wahl der Anfangsindices der Gruppen  $F_\alpha$  der Reihe  $\mathfrak{F}$  in einer dieser Gruppen dann und nur dann, wenn sie entweder die kleinste der Zahlen  $[m, \mu]$  ( $\mu \neq m$ ) oder der Zahlen  $[n, \nu]$  ( $\nu \neq n$ ) ist.
- II. Es ist möglich aus der Matrix  $M$  wenigstens eine der Bedingung 1<sup>o</sup> genügende Gruppe von einander und von Null verschiedener Zahlen auszuwählen, so dass die Summe ihrer Glieder nicht grösser ist, als die Summe der Glieder irgendeiner anderen, der Bedingung 1<sup>o</sup> genügenden Gruppe von einander und von Null verschiedener Zahlen.
- III. Ist  $K'$  eine solche Gruppe von Zahlen, so enthält sie die Gruppe  $\mathfrak{G}$ .
- IV. Ist  $u \geq 2$  und  $v \leq u - 1$  und enthält die Gruppe  $K'$  die Gruppen  $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \dots, \mathfrak{G}_{v-1}$ , so enthält sie auch die Gruppe  $\mathfrak{G}_v$ .
- V. Die Gruppe  $K'$  enthält keine Zahl, die in der Gruppe  $J$  nicht enthalten ist.

Brno, Jänner 1926.