Otakar Borůvka

O jistém problému minimálním

Práce Moravské přírodovědecké společnosti, sv. III, spis 3, 1926, 37-58

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500114

PRÁCE
MORAVSKÉ PŘÍRODOVĚDECKÉ SPOLEČNOSTI
SVAZEK III., SPIS 3. 1926 SIGNATURA: F 23
BRNO, ČESKOSLOVENSKO.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM MORAVICAE.
TOMUS III., FASCICULUS 3.; SIGNATURA: F 23; BRNO, ČECHOSLOVAKIA; 1926.

Dr. OTAKAR BORŮVKA:

O jistém problému minimálním.

S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY VYDÁVÁ
MOR. PŘÍRODOVĚDECKÁ SPOLEČNOST
BRNO.

REDIGUJE — RÉDIGÉES PAR
Prof. Dr. K. ŠULC,
BRNO, PRAŽSKÁ 69.
ČSR.

NA SKLADĚ MÁ — EN VENTE CHEZ
A. PÍŠA,
BRNO, ČESKÁ 28.
ČSR.

PRÁCE
MORAVSKÉ PŘÍRODOVĚDECKÉ SPOLEČNOSTI
SVAZEK III., SPIS 3. 1926 SIGNATURA: F 23
BRNO, ČESKOSLOVENSKO.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM MORAVICAE.
TOMUS III., FASCICULUS 3.; SIGNATURA: F 23: BRNO, ČECHOSLOVAKIA; 1926.

Dr. OTAKAR BORŮVKA:

O jistém problému minimálním.

V tomto článku podávám řešení následujícího problému:

Budiž dána matice M čísel $r_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n$; $n \geqq 2$), až na podmínku $r_{\alpha\alpha} = 0$, $r_{\alpha\beta} = r_{\beta\alpha}$, kladných a vzájemně různých.

Jest vybrati z ní skupinu čísel vzájemně a od nuly různých takovou, aby

1⁰ bylo možno, jsou-li p_1, p_2 libovolná od sebe různá přirozená čísla $\leqq n$, vybrati z ní skupinu částečnou tvaru

$$r_{p_1c_2},\ r_{c_2c_3},\ r_{c_3c_4}, \ldots\ldots r_{c_{q-2}c_{q-1}},\ r_{c_{q-1}p_2}$$

2⁰ součet jejích členů byl menší než součet členů kterékoliv jiné skupiny čísel vzájemně a od nuly různých, hovící podmínce 1⁰.*)

Řešení. Budiž f_0 libovolné z čísel α a budiž $[f_0f_1]$ nejmenší z čísel $[f_0\gamma_0]$ $[\gamma_0 \neq f_0]$. Množství čísel $[f_1\gamma_1]$ $(\gamma_1 \neq f_0, f_1)$ jest pak buď prázdné, anebo nikoliv. V případě prvním položme

$$F \equiv [f_0f_1],$$

v případě druhém jest nejmenší z čísel $[f_1\gamma_1]$ buď větší než $[f_0f_1]$, anebo menší. Je-li větší, položme

$$F \equiv [f_0f_1],$$

je-li menší, budiž $[f_1f_2]$ nejmenší z čísel $[f_1\gamma_1]$. Množství čísel $[f_2\gamma_2]$ $(\gamma_2 \neq f_0, f_1, f_2)$ jest pak buď prázdné anebo nikoliv. V případě prvním položme

$$F \equiv [f_0f_1],\ [f_1f_2],$$

v případě druhém jest nejmenší z čísel $[f_2\gamma_2]$ buď větší než $[f_1f_2]$, anebo menší. Je-li větší, položme

*) V dalším značím pro stručnost číslo $r_{\alpha\beta}$ symbolem $[\alpha\beta]$.

$$F \equiv [f_0 f_1],\ [f_1 f_2],$$

je-li menší, budiž $[f_2 f_3]$ nejmenší z čísel $[f_2 \gamma_2]$. Množství čísel $[f_3 \gamma_3]$ $(\gamma_3 \neq f_0, f_1, f_2, f_3)$ jest pak buď prázdné, anebo nikoliv. V případě prvním položme

$$F \equiv [f_0 f_1],\ [f_1 f_2],\ [f_2 f_3],$$

v případě druhém jest nejmenší z čísel $[f_3 \gamma_3]$ buď větší než $[f_2 f_3]$, anebo menší. Je-li větší, položme

$$F \equiv [f_0 f_1],\ [f_1 f_2],\ [f_2 f_3],$$

je-li menší, pokračujme stejným způsobem dále. Obdržíme konečně skupinu čísel

$$F \equiv [f_0 f_1],\ [f_1 f_2],\ [f_2 f_3], \dots\ [f_{g-1} f_g],$$

při čemž v indexech $f_0, f_1, \dots f_g$ vyskytne se buď každé z čísel $1, 2, \dots n$, anebo nikoliv.

V případě prvním položme

$$\mathfrak{F} \equiv F,$$

v případě druhém budiž $f_0^{(1)}$ jedno z čísel $1, 2, \dots n$, nevyskytující se mezi čísly $f_0, f_1, \dots f_g$. Budiž $[f_0^{(1)} f_1^{(1)}]$ nejmenší z čísel $[f_0^{(1)} \gamma_0^{(1)}]$ $(\gamma_0^{(1)} \neq f_0^{(1)})$. Vycházejíce z tohoto čísla sestrojme jako dříve skupinu

$$F_1 = [f_0^{(1)} f_1^{(1)}],\ [f_1^{(1)} f_2^{(1)}], \dots\ [f_{g_1-1}^{(1)} f_{g_1}^{(1)}].$$

Při konstrukci této skupiny můžeme dospěti ku členu s indexem, vyskytujícím se ve členech skupiny F; v tomto případě, je-li $f_{h_1}^{(1)}$ první z takových indexů, klaďme $f_{g_1}^{(1)} \equiv f_{h_1}^{(1)}$.

V indexech $f_0, f_1, \dots f_g;\ f_0^{(1)}, f_1^{(1)} \dots f_{g_1}^{(1)}$ vyskytne se buď každé z čísel $1, 2, \dots n$, anebo nikoliv. V případě prvním položme

$$\mathfrak{F} \equiv F,\ F_1,$$

v případě druhém budiž $f_0^{(2)}$ jedno z čísel $1, 2, \dots n$, nevyskytující se mezi čísly $f_0, f_1, \dots f_g;\ f_0^{(1)}, f_1^{(1)} \dots f_{g_1}^{(1)}$. Budiž $[f_0^{(2)} f_1^{(2)}]$ nejmenší z čísel $[f_0^{(2)} \gamma_0^{(2)}]$ $(\gamma_0^{(2)} \neq f_0^{(2)})$. Vycházejice z tohoto čísla, sestrojme jako dříve skupinu

$$F_2 = [f_0^{(2)} f_1^{(2)}],\ [f_1^{(2)} f_2^{(3)}], \dots\ [f_{g_2-1}^{(2)} f_{g_2}^{(2)}].$$

Při konstrukci této skupiny můžeme dospěti ku členu s indexem, vyskytujícím se ve členech skupin F, F_1; v tomto případě, je-li $f_{h_2}^{(2)}$ první z takových indexů, klaďme $f_{g_2}^{(2)} \equiv f_{h_2}^{(2)}$.

V indexech $f_0, f_1, \dots f_g;\ f_0^{(1)}, f_1^{(1)}, \dots f_{g_1}^{(1)};\ f_0^{(2)}, f_1^{(2)}, \dots f_{g_2}^{(2)}$ vyskytne se buď každé z čísel, $1, 2, \ldots n$, anebo nikoliv. V případě prvním položme

$$\mathfrak{F} \equiv F, F_1, F_2,$$

v případě druhém pokračujme stejným způsobem dále. Obdržíme konečně řadu skupin

$$\mathfrak{F} \equiv F, F_1, F_2, \ldots . F_{i-1},$$

při čemž v indexech členů těchto skupin vyskytne se každé z čísel $1, 2, \ldots n$ alespoň jedenkráte.

Řada skupin $\mathfrak{F}$ obsahuje buď právě jen skupinu F, anebo skupin více. V případě prvním položme

$$G \equiv F,$$

v případě druhém skupina F buď neobsahuje členu, jehož index se vyskytuje v některé ze skupin následujících řady $\mathfrak{F}$, anebo obsahuje alespoň jeden takový člen. Neobsahuje-li takového členu, položme

$$G \equiv F,$$

obsahuje-li, budiž j index určitého členu skupiny F, jenž se současně vyskytuje alespoň v jedné ze zbývajících skupin řady $\mathfrak{F}$; můžeme zřejmě předpokládati, že se vyskytuje alespoň ve skupině F_1.

Řada skupin $\mathfrak{F}$ obsahuje buď právě jen skupiny F, F_1, anebo skupin více. V případě prvním položme

$$G \equiv F, F_1,$$

v případě druhém skupina F, F_1 buď neobsahuje členu, jehož index se vyskytuje v některé ze skupin následujících řady $\mathfrak{F}$, anebo obsahuje alespoň jeden takový člen. Neobsahuje-li takového členu, položme

$$G \equiv F, F_1,$$

obsahuje-li, budiž j_1 index určitého členu skupiny F, F_1, jenž se současně vyskytuje alespoň v jedné ze zbývajících skupin řady $\mathfrak{F}$; můžeme zřejmě předpokládati, že se vyskytuje alespoň ve skupině F_2. Řada skupin $\mathfrak{F}$ obsahuje buď právě jen skupiny F, F_1, F_2, anebo skupin více. V případě prvním položme

$$G \equiv F, F_1, F_2,$$

v případě druhém pokračujme stejným způsobem dále. Obdržíme konečně skupinu

$$G \equiv F, F_1, F_2, \ldots F_{k-1},$$

při čemž tato skupina obsahuje buď všechny skupiny řady $\mathfrak{F}$, anebo nikoliv. V případě prvním položme

$$\mathfrak{G} \equiv G,$$

v případě druhém existuje skupina F_k řady $\mathfrak{F}$, jež neobsahuje členu s indexem, vyskytujícím se ve skupině G.

Řada skupin $\mathfrak{F}$ obsahuje buď právě jen skupiny G, F_k, anebo skupin více. V případě prvním položme

$$G_1 \equiv F_k,$$

v případě druhém skupina F_k buď neobsahuje členu, jehož index se vyskytuje v některé ze skupin zbývajících řady $\mathfrak{F}$, anebo obsahuje alespoň jeden takový člen. Neobsahuje-li takového členu, položme

$$G_1 \equiv F_k,$$

obsahuje-li, budiž $j^{(1)}$ index určitého členu skupiny F_k, jenž se současně vyskytuje alespoň v jedné ze zbývajících skupin řady $\mathfrak{F}$; můžeme zřejmě předpokládati, že se vyskytuje alespoň ve skupině F_{k+1}.

Řada skupin $\mathfrak{F}$ obsahuje buď právě jen skupiny G, F_k, F_{k+1}, anebo skupin více. V případě prvním položme

$$G_1 \equiv F_k, F_{k+1},$$

v případě druhém pokračujme stejným způsobem dále. Obdržíme konečně skupinu

$$G_1 \equiv F_k, F_{k+1}, \ldots F_{k_1-1},$$

při čemž řada skupin G, G_1 obsahuje buď všechny skupiny řady $\mathfrak{F}$, anebo nikoliv. V případě prvním položme

$$\mathfrak{G} \equiv G, G_1,$$

v případě druhém pokračujme stejným způsobem dále. Obdržíme konečně řadu skupin

$$\mathfrak{G} \equiv G, G_1, \ldots G_{l-1},$$

při čemž řada skupin $\mathfrak{G}$ obsahuje všechny skupiny řady $\mathfrak{F}$ a žádná ze skupin řady $\mathfrak{G}$ neobsahuje členu s indexem, vyskytujícím se v členu některé jiné skupiny této řady.

Položme $H_\lambda \equiv G_\lambda$ $(\lambda = 0, 1, \ldots l-1)$

Řada skupin $\mathfrak{G}$ obsahuje buď právě jen skupinu G, anebo skupin více. V případě prvním položme

$$J \equiv \mathfrak{G},$$

v případě druhém budiž: $\varkappa_\lambda$ kterýkoliv z indexů vyskytujících se v členech skupiny H_λ;
α_1, β_1 dvě z čísel λ;
$[k_{\alpha_1\beta_1}\, k_{\beta_1\alpha_1}]$ nejmenší z čísel $[\varkappa_{\alpha_1}\, \varkappa_{\beta_1}]$ při $\alpha_1 \neq \beta_1$, 0 při $\alpha_1 = \beta_1$;

M_1 matice čís. $[k_{\alpha_1\beta_1}\, k_{\beta_1\alpha_1}](\alpha_1, \beta_1 = 0, 1, 2, \ldots l\text{-}1)$*)

$\mathfrak{G}_1 \equiv G^{(1)}, G^{(1)}_1, \ldots G^{(1)}_{l_1-1}$, řada skupin, zkonstruovaná z M_1 dle téhož pravidla jako řada skupin $\mathfrak{G}$ z matice M.

$\mathfrak{H}^{(1)}_{\lambda_1}$ řada těch a jen těch skupin vybraných z řady $H, H_1, \ldots H_{l-1}$, které obsahují alespoň jeden člen s indexem, jenž se současně vyskytuje ve skupině $G^{(1)}_{\lambda_1}$ $(\lambda_1 = 0, 1, \ldots l_1 - 1)$;

$H^{(1)}_{\lambda_1} \equiv \mathfrak{H}^{(1)}_{\lambda_1}, G^{(1)}_{\lambda_1}$.

Řada skupin $\mathfrak{G}_1$ obsahuje pak buď právě jen jednu skupinu $G^{(1)}$, anebo skupin více. V případě prvním položme

$$J \equiv \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1,$$

v případě druhém budiž: $\varkappa_{\lambda_1}$ kterýkoliv z indexů vyskytujících se v členech skupiny $H^{(1)}_{\lambda_1}$;

α_2, β_2 dvě z čísel λ_1;

$[k_{\alpha_2\beta_2}\, k_{\beta_2\alpha_2}]$ nejmenší z čísel $[\varkappa_{\alpha_2}\, \varkappa_{\beta_2}]$ při $\alpha_2 \neq \beta_2$, 0 při $\alpha_2 = \beta_2$;

M_2 matice čís. $[k_{\alpha_2\beta_2}\, k_{\beta_2\alpha_2}](\alpha_2, \beta_2 = 0, 1, 2, \ldots l_1 - 1)$;

$\mathfrak{G}_2 \equiv G^{(2)}, G^{(2)}_1, \ldots G^{(2)}_{l_2-1}$ řada skupin, zkonstruovaná z matice M_2 dle téhož pravidla jako řada skupin $\mathfrak{G}$ z matice M.

$\mathfrak{H}^{(2)}_{\lambda_2}$ řada těch a jen těch skupin vybraných z řady $H^{(1)}, H^{(1)}_1, \ldots H^{(1)}_{l_1-1}$, které obsahují alespoň jeden člen s indexem, jenž se současně vyskytuje ve skup. $G^{(2)}_{\lambda_2}$ $(\lambda_2 = 0, 1, \ldots l_2 - 1)$;

$H^{(2)}_{\lambda_2} \equiv \mathfrak{H}^{(2)}_{\lambda_2}, G^{(2)}_{\lambda_2}$.

Řada skupin $\mathfrak{G}_2$ obsahuje pak buď právě jen jednu skupinu $G^{(2)}$, anebo skupin více. V případě prvním položme

$$J \equiv \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2,$$

v případě druhém budiž: $\varkappa_{\lambda_2}$ kterýkoliv z indexů vyskytujících se v členech skupiny $H^{(2)}_{\lambda_2}$;

*) Matice M_1 jest zřejmě symetrická, neobsahuje žádného z čísel obsažených ve skupině $\mathfrak{G}$ a její řád jest nejvýše roven největšímu cel. číslu obsaženému v $\frac{n}{2}$.

α_3, β_3 dvě z čísel λ_2;

$[k_{\alpha_3\beta_3} k_{\beta_3\alpha_3}]$ nejmenší z čísel $[\varkappa_{\alpha_3} \varkappa_{\beta_3}]$ při $\alpha_3 \neq \beta_3$, 0 při $\alpha_3 = \beta_3$;

M_3 matice čís. $[k_{\alpha_3\beta_3} k_{\beta_3\alpha_3}]$ $(\alpha_3, \beta_3 = 0, 1, 2, \ldots l_2 - 1)$;

$\mathfrak{G}_3 \equiv G^{(3)}, G_1^{(3)}, \ldots G_{l_3 1}^{(3)}$ řada skupin, zkonstruovaná z matice M_3 dle téhož pravidla jako řada skupin $\mathfrak{G}$ z matice M.

$\mathfrak{H}_{\lambda_3}^{(3)}$ řada těch a jen těch skupin vybraných z řady $H^{(2)}, H_1^{(2)}, \ldots H_{l_2-1}^{(2)}$, které obsahují alespoň jeden člen s indexem, jenž se současně vyskytuje ve skup. $G_{\lambda_3}^{(3)}$ $(\lambda_3 = 0, 1, \ldots l_3 - 1)$;

$H_{\lambda_3}^{(3)} \equiv \mathfrak{H}_{\lambda_3}^{(3)}, G_{\lambda_3}^{(3)}$.

Řada skupin $\mathfrak{G}_3$ obsahuje pak buď právě jen jednu skupinu $G^{(3)}$, anebo skupin více. V případě prvním položme

$$J \equiv \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3,$$

v případě druhém pokračujme stejným způsobem dále. Obdržíme konečně skupinu

$$J \equiv \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \ldots \mathfrak{G}_{u-1},$$

jež řeší danou úlohu.

Důkaz. Důkaz bude proveden, dokážeme-li následující věty:

I. Při libovolné volbě počátečních indexů skupin F_α řady $\mathfrak{F}$ vyskytne se číslo $[mn]$ z matice M v některé skupině této řady, když a jen když jest nejmenší buď z čísel $[m\mu]$ $(\mu \neq m)$, anebo z čísel $[n\nu]$ $(\nu \neq n)$.

II. V matici M existuje alespoň jedna skupina čísel vzájemně a od nuly různých, splňující podmínku 1^0 a taková, že součet jejích členů není větší, než součet členů kterékoliv jiné skupiny čísel vzájemně a od nuly různých, splňující podmínku 1^0.

III. Je-li K' jedna ze skupin těchto vlastností, obsahuje řadu skupin $\mathfrak{G}$.

IV. Je-li $u \geq 2$ a $v \leq u-1$ a obsahuje-li skupina K' skupiny $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_{v-1}$ obsahuje skupinu $\mathfrak{G}_v$.

V. Skupina K' neobsahuje členu, jenž není obsažen ve skupině J.

Vskutku, pak dle I. jest skupina J maticí M úplně určena a dle III, IV, V jest totožná s každou skupinou, která má vlastnosti skupiny K'; tedy jest skupina J řešením dané úlohy.

* * *

1. Z konstrukce plyne, že čísla obsažená ve skupině J jsou vzájemně a od nuly různá; jejich počet jest n-1.

2. Budiž L skupina čísel vzájemně a od nuly různých obsažených v matici M. Když a jen když skupina L obsahuje z každého řádku matice M alespoň jedno číslo, pravím, že jest přípustná.

3. Z konstrukce plyne, že skupina J jest přípustná.

4. Při každé volbě počátečních indexů skupin F_α řady $\mathfrak{F}$ stanoví konstrukce skupiny J v každé skupině této řady určitý pořádek členů. Skupinu F_p řady $\mathfrak{F}$ nazývám uspořádanou, když a jen když mají její členy tento pořádek.

5. Při každé volbě počátečních indexů skupin F_α řady $\mathfrak{F}$ stanoví konstrukce skupiny J v řadě $\mathfrak{F}$ určitý pořádek skupin F_α. Řadu skupin $\mathfrak{F}$ nazývám uspořádanou, když a jen když mají skupiny F_α tento pořádek.

6. Budiž

$$F_p \equiv [f_0 f_1], \ldots [f_k\, f_{k+1}], \ldots$$

uspořádaná skupina řady $\mathfrak{F}$ o $g\,(\geqq 2)$ členech. Z konstrukce plyne při pevném k $(1 \leqq k \leqq g-1)$ a $j\ (1 \leqq j \leqq k+1)$

$$[f_j\, f_\lambda] \geqq [f_\lambda\, f_{\lambda+1}] \geqq [f_k\, f_{k+1}] \quad (\lambda = o, \ldots j-1).$$

Věta I. Při libovolné volbě počátečních indexů skupin F_α řady $\mathfrak{F}$ vyskytne se číslo [mn] z matice M v některé skupině této řady, když a jen když jest nejmenší buď z čísel $[m\mu]$ $(\mu \neq m)$ anebo z čísel $[n\nu]$ $(\nu \neq n)$.

1. Budiž [mn] členem skupiny F_p. Stačí uvažovati případ, že uspořádaná skupina F_p jest tvaru

$$[f_0 f_1], \ldots [mn], \ldots$$

Podle konstrukce jest [mn] nejmenší z čísel $[m\gamma]$ $(\gamma \neq f_1, \ldots m)$; tedy dle 6. nejmenší i z čísel $[m\mu]$ $(\mu \neq m)$.

2. Budiž [mn] nejmenší z čísel $[m\mu]$ $(\mu \neq m)$. V uspořádané řadě skupin $\mathfrak{F}$ budiž F_p první skupinou, která obsahuje člen [mp] s indexem m. Stačí uvažovati případ, že skupina F_p obsahuje alespoň dva členy. Jsou možny dva a jen dva vzájemně se vylučující případy:

V uspořádané skupině F_p není m indexem posledním.

V uspořádané skupině F_p jest m indexem posledním.

V případě prvním jest uspořádaná skupina F_p tvaru

$$[f_0 f_1], \ldots [mp], \ldots;$$

tedy dle výsledku právě odvozeného jest [mp] nejmenší z čísel $[m\mu]$ ($\mu \neq m$) a tedy totožno s [mn].

V případě druhém jest uspořádaná skupina F_p tvaru

$$[f_0 f_1], \ldots [pm]$$

a množství čísel $[m\gamma]$ ($\gamma \neq f_0, \ldots m$) jest buď prázdné, anebo nikoliv. Je-li prázdné, jest dle 6. číslo [pm] menší než každé z čísel $[mf_\lambda]$ ($f_\lambda \neq p, m$); tedy jest nejmenší z čísel $[m\mu]$ a tedy totožno s číslem [mn]. Není-li prázdné, jest podle konstrukce číslo [mp] menší než nejmenší z čísel $[m\gamma]$ a dle 6. také menší než nejmenší z čísel $[mf_\lambda]$; tedy jest nejmenší z čísel $[m\mu]$ a tedy totožno s číslem [mn].

7. Skupina J jest maticí M jednoznačně určena.

Tato věta plyne bezprostředně z konstrukce skupiny J a z věty I.

Věta II. V matici M existuje alespoň jedna skupina čísel vzájemně a od nuly různých, splňující podmínku 1^0 a taková, že součet jejích členů není větší, než součet členů kterékoliv jiné skupiny čísel vzájemně a od nuly různých, splňující podmínku 1^0.

Vskutku, jednak existuje zřejmě v matici M alespoň jedna skupina čísel vzájemně a od nuly různých, splňující podmínku 1^0*), jednak jest počet takových skupin konečný.

8. V dalším značím symbolem K′ jednu ze skupin vlastností vytčených větou II.

9. Budiž L skupina čísel vzájemně a od nuly různých, obsažených v matici M. Buďtež p_1, p_2 dva různé indexy členů v této skupině obsažených. Když a jen když existuje alespoň jedna částečná skupina skupiny L, obsahující alespoň jeden člen, tvaru

$$[p_1 q_1], [q_2 q_3], \ldots [q_{\varkappa-1} p_2]$$

pravím, že skupina L jest úplná pro indexy p_1 a p_2.

10. Když a jen když jest skupina L úplná pro indexy p_1 a p_2, jest úplná pro indexy p_2 a p_1.

11. Když a jen když jest skupina L přípustná a úplná pro každé dva indexy, splňuje podmínku 1^0.

*) Jest to na př. skupina od nuly různých čísel, obsažených v matici M v libovolném řádku.

12. Budiž L skupina čísel vzájemně a od nuly různých, obsažených v matici M, úplná pro dva indexy p_1 a p_2. Každou částečnou skupinu skupiny L, obsahující alespoň jeden člen, jež se dá psáti ve tvaru

$$[p_1 q_2], [q_2 q_3], \dots [q_{k-1} p_2]$$

nazývám skupinou pro indexy p_1, p_2. Jsou-li její členy psány právě v tomto pořádku, nazývám ji uspořádanou.

13. Uspořádanou skupinou pro indexy p_1, p_2 značím symbolem L_{p_1, p_2}. Symbolu L_{pq} přikládám význam prázdné skupiny když a jen když $p = q$. Je-li tedy $[mn]$ člen skupiny pro indexy p_1, p_2 jest buď

$$L_{p_1 p_2} \equiv L_{p_1 m}, [mn], L_{n p_2} \quad \text{anebo} \quad L_{p_1 p_2} \equiv L_{p_1 n}, [nm], L_{m p_2}$$

a skupiny $L_{p_1 m}$ a $L_{n p_2}$ po případě $L_{p_1 n}$ a $L_{m p_2}$ neobsahují členu $[mn]$.

14. Budiž L skupina čísel vzájemně a od nuly různých, obsažených v matici M, úplná vždy pro dva indexy $\varrho_\nu, \varrho_{\nu+1}$ $(\nu = 1, 2, \dots n-1; n \geqq 3)$. Budiž $p_1 \equiv \varrho_1$, $p_2 \equiv \varrho_n$ a $p_1 \neq p_2$. Skupina L jest úplná pro indexy p_1, p_2.

Vskutku, uvažujme skupinu čísel

$$\mathfrak{L} \equiv L_{p_1 \varrho_2}, L_{\varrho_2 \varrho_3}, \dots L_{\varrho_{n-1} p_2},$$

právě v tomto pořádku. V této skupině budiž $[p_1 q_2]$ poslední číslo obsahující index p_1. Pak jest buď $q_2 \equiv p_2$ anebo $q_2 \neq p$. V případě prvním položme

$$L_{p_1 p_2} \equiv [p_1 p_2],$$

v případě druhém následuje ve skupině $\mathfrak{L}$ za členem $[p_1 q_2]$ ještě alespoň jeden člen s indexem q_2. Budiž $[q_2 q_3]$ poslední číslo skupiny $\mathfrak{L}$ obsahující index q_2. Pak jest buď $q_3 \equiv p_2$ anebo $q_3 \neq p_2$. V případě prvním položme

$$L_{p_1 p_2} \equiv [p_1 q_2], [q_2 p_2]$$

v případě druhém následuje ve skupině $\mathfrak{L}$ za členem $[q_2 q_3]$ ještě alespoň jeden člen s indexem q_3. Budiž $[q_3 q_4]$ poslední číslo skupiny $\mathfrak{L}$ obsahující index q_3. Pak jest buď $q_4 \equiv p_2$, anebo $q_4 \neq p_2$. V případě prvním položme

$$L_{p_1 p_2} \equiv [p_1 q_2], [q_2 q_3], [q_3 p_2],$$

v případě druhém pokračujme stejným způsobem dále. Po konečném počtu kroků dospějeme zřejmě k uspořádané skupině pro indexy p_1, p_2, obsažené ve skupině L.

15. Budiž L skupina čísel vzájemně a od nuly různých, obsažených v matici M. Budiž L* částečná skupina skupiny L. Skupinu všech čísel, obsažených ve skupině L, ale nikoliv ve skupině L* a jen těch, značím symbolem L — L*.

Věta III. Skupina K' obsahuje řadu skupin $\mathfrak{G}$.

Věta jest zřejmě správná, je-li řád n matice M roven 2 nebo 3. Budiž tedy $n \geqq 4$. Předpokládáme-li opak, dojdeme ke sporu. Vskutku, budiž $[mn]$ číslo z matice M obsažené v řadě $\mathfrak{G}$ a nevyskytující se ve skupině K'. Podle konstrukce jest skupina čísel $\mathfrak{G}$ totožna se skupinou $\mathfrak{F}$. Tedy dle věty I. jest $[mn]$ buď nejmenší z čísel $[m\mu]$ ($\mu \neq m$), anebo nejmenší z čísel $[n\nu]$ ($\nu \neq n$). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládati, že jest nejmenší z čísel $[m\mu]$. Skupina K' obsahuje nutně člen $[mp]$ s indexem m. Dle předpokladu není $[mp]$ totožno s číslem $[mn]$; tedy jest větší.

Skupina K' jest úplná pro indexy m, n; jsou možny dva a jen dva vzájemně se vylučující případy:

Každá částečná skupina skupiny K' pro indexy m, n obsahuje číslo $[mp]$.

Ve skupině K' existuje alespoň jedna skupina pro indexy m, n, která neobsahuje čísla $[mp]$.

V případě prvním existuje ve skupině K' skupina pro indexy m, n, již lze dle 13 psáti ve tvaru

$$[mp],\ L_{pn}$$

a skupina L_{pn} pro indexy p, n obsahuje nutně alespoň jeden člen. Skupina čísel vzájemně a od nuly různých, obsažených v matici M

$$K'' \equiv K' - [mp],\ [mn]$$

1. jest přípustná.

2. Jest úplná pro libovolné dva indexy p_1, p_2. Vskutku, buď existuje ve skupině K' alespoň jedna skupina pro indexy p_1, p_2, jež neobsahuje členu $[mp]$ a jež jest tedy současně skupinou pro indexy p_1, p_2 ve skupině K'', anebo ve skupině K' každá skupina pro indexy p_1, p_2 člen $[mp]$ obsahuje. V tomto případě existují však ve skupině K'' při vhodném označení obou indexů p_1, p_2 zřejmě skupiny (pokud nejsou prázdné) $L_{p_1 m}$, $[mn]$, L_{np}, L_{pp_2} a tedy dle 14 skupina pro indexy p_1, p_2.

3. Součet členů skupiny K'' jest menší než součet členů skupiny K' — proti předpokladu.

V případě druhém existuje ve skupině K' alespoň jedna skupina pro indexy m, n, již lze psáti ve tvaru

$$[mq],\ L_{qn}.$$

Dle předpokladu jest nutně $q \neq n$, tedy $[mq] > [mn]$. Skupina L_{qn} pro indexy q, n obsahuje nutně alespoň jeden člen. Tedy stačí aplikovati hořejší úvahu na skupinu

$$K'' \equiv K' - [mq],\ [mn].$$

16. Budiž L skupina čísel vzájemně a od nuly různých, obsažených v matici M. Když a jen když jest možno rozděliti tuto skupinu ve dvě ji úplně vyčerpávající skupiny částečné L_1, L_2, obsahující alespoň po jednom členu a takové, že žádná z obou skupin neobsahuje členu s indexem vyskytujícím se ve skupině druhé, není skupina L úplná pro každé dva indexy.

1. Buďtež L_1, L_2 dvě skupiny uvedených vlastností, budiž $[p_1 q'_2]$ člen skupiny L_1, $[q'_{k-1}\, p_2]$ člen skupiny L_2 a předpokládejme, že existuje ve skupině L alespoň jedna skupina pro indexy p_1, p_2

$$L_{p_1 p_2} \equiv [p_1 q_2], [q_2\, q_3], \dots [q_{k-1}\, p_2].$$

Ježto skupina L_2 neobsahuje dle předpokladu členu s indexem p_1, jest člen $[p_1 q_2]$ nutně obsažen ve skupině L_1. Podobně se zjistí, že ve skupině L_1 jest obsažen také každý další člen skupiny $L_{p_1 p_2}$, tedy zvláště člen $[q_{k-1}\, p_2]$. Tedy obsahuje každá z obou skupin L_1, L_2 člen s indexem p_2 — proti předpokladu.

2. Buďtež $[p_1 q_2]$, $[q_{k-1}\, p_2]$ dva členy skupiny L, $p_1 \neq p_2$ a předpokládejme, že skupina L není úplná pro indexy p_1, p_2. Položme $\mathfrak{L}_1 \equiv [p_1 q_2]$. Skupina $L - \mathfrak{L}_1$ buď neobsahuje členu s indexem, vyskytujícím se současně ve skupině $\mathfrak{L}_1$, anebo obsahuje alespoň jeden takový člen. V případě prvním položme

$$L_1 \equiv \mathfrak{L}_1;\; L_2 \equiv L - \mathfrak{L}_1,$$

v případě druhém budiž $\mathfrak{L}_2$ částečná skupina skupiny $L - \mathfrak{L}_1$, obsahující členy s indexy, vyskytujícími se současně ve skupině $\mathfrak{L}_1$. Skupina $L - \mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_2$ buď neobsahuje členu s indexem, vyskytujícím se současně ve skupině $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, anebo obsahuje alespoň jeden takový člen. V případě prvním položme

$$L_1 \equiv \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2;\; L_2 \equiv L - \mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_2,$$

v případě druhém budiž $\mathfrak{L}_3$ částečná skupina skupiny $L - \mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_2$, obsahující členy s indexy, vyskytujícími se současně ve skupině $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$. Skupina $L - \mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_2 - \mathfrak{L}_3$ buď neobsahuje členu s indexem, vyskytujícím se současně ve skupině $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$, anebo obsahuje alespoň jeden takový člen. V případě prvním položme

$$L_1 \equiv \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3;\; L_2 \equiv L - \mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_2 - \mathfrak{L}_3,$$

v případě druhém pokračujme stejným způsobem dále. Dospějeme zřejmě ke dvěma skupinám L_1, L_2, z nichž žádná neobsahuje členu s indexem vyskytujícím se ve skupině druhé. Skupina L_1 obsahuje zřejmě alespoň jeden člen. Skupina L_2 obsahuje rovněž alespoň jeden člen. Vskutku, z konstrukce jest patrno, že skupina L_1 jest úplná pro každé dva indexy;

tedy neobsahuje členu $[q_{k-1}\, p_2]$. Tedy jest člen $[q_{k-1}\, p_2]$ obsažen ve skupině L_2.

17. Budiž L skupina čísel vzájemně a od nuly různých, obsažených v matici M. Buďtež L_1, L_2 částečné skupiny skupiny L, tuto úplně vyčerpávající, obsahující alespoň po jednom členu a takové, že žádná z nich neobsahuje členu s indexem vyskytujícím se ve skupině druhé. Budiž L^* částečná skupina skupiny L, obsahující alespoň jeden člen a úplná pro každé dva indexy. Jedna z obou skupin L_1, L_2 obsahuje celou skupinu L^*.

Tato věta plyne bezprostředně z 16.

18. Každá skupina F_ι (ι pevné, $\leqq i - 1$) řady $\mathfrak{F}$ jest úplná pro každé dva indexy p_1, p_2.

Zřejmě stačí uvažovati skup. F. Budiž $p_1 \equiv f_h$ $p_2 \equiv f_k$ $(h, k \leqq g;\ h \neq k)$. Pak jest buď $h < k \leqq g$ anebo $k < h < g$.

V případě prvním jest

$$[p_1 f_{h+1}],\ [f_{h+1}\, f_{h+2}], \ldots [f_{k-1} p_2]$$

v případě druhém jest

$$[p_1 f_{h-1}],\ [f_{h-1}\, f_{h-2}], \ldots [f_{k+1} p_2]$$

uspořádanou skupinou pro indexy p_1, p_2.

19. Každá skupina G_λ (λ pevné, $\leqq l - 1$) řady $\mathfrak{G}$ jest úplná pro každé dva indexy p_1, p_2.

Zřejmě stačí uvažovati skupinu G. Je-li $G \equiv F$, jest dle 18 věta dokázána. Budiž tedy $G \equiv F, F_1, \ldots F_{k-1}$ $(k \geqq 2)$. Položme

$$F^{(\varkappa-1)} \equiv F, F_1, \ldots F_{\varkappa-1} \quad (\varkappa \leqq k).$$

Důkaz úplnou indukcí: Předpokládejme, že úplné pro každé dva indexy p_1, p_2 jsou skupiny $F, F^{(1)}, \ldots F^{(m-1)}$ (m pevné, $\leqq k - 1$) a ukažme, že pak i skupina $F^{(m)}$ jest pro každé dva indexy úplná.

Stačí uvažovati případ, že index p_1 vyskytuje se pouze mezi indexy členů skupiny $F^{(m-1)}$, index p_2 pouze mezi indexy členů skupiny F_m. Podle konstrukce skupiny G jest obsažen ve skupině $F^{(m-1)}$ člen s indexem j_{m-1} vyskytujícím se současně v indexech členů skupiny F_m; tedy jest $p_1 \neq j_{m-1}$, $p_2 \neq j_{m-1}$. Dle předpokladu jest skupina $F^{(m-1)}$ a tedy i skupina $F^{(m)}$ úplná pro indexy p_1, j_{m-1} a dle 18 jest skupina F_m a tedy i skupina $F^{(m)}$ úplná pro indexy j_{m-1}, p_2. Tedy dle 14 jest skupina $F^{(m)}$ úplná pro indexy p_1, p_2.

20. Každá skupina $H^{(\varrho)}_{\lambda_\varrho}$ (ϱ pevné $\leqq u - 1$; λ_ϱ pevné, $\leqq l_\varrho - 1$) jest úplná pro každé dva indexy p_1, p_2.

Zřejmě stačí uvažovati skupinu $H^{(\varrho)}$. Je-li $\varrho = 0$ $(H^{(0)} \equiv H \equiv G)$ jest dle 19 věta dokázána. Budiž tedy $\varrho \geqq 1$.

Důkaz úplnou indukcí: Předpokládejme, že úplná pro každé dva indexy p_1, p_2 jest každá skupina z řad H_λ, $H^{(1)}_{\lambda_1}, \ldots H^{(m-1)}_{\lambda_{m-1}}$ (m pevné, $\leqq \varrho$; $\lambda = 0, 1, \ldots l-1$; $\lambda_1 = 0, 1, \ldots l_1 - 1$; $\lambda_{m-1} = 0, 1, \ldots l_{m-1} - 1$) a ukažme, že pak i skupina $H^{(m)}$ jest pro každé dva indexy úplná.

Kdyby skupina $H^{(m)}$ nebyla úplná pro každé dva indexy, bylo by ji možno dle 16 rozděliti ve dvě ji úplně vyčerpávající skupiny částečné L_1, L_2, obsahující alespoň po jednom členu a takové, že žádná z nich by neobsahovala členu s indexem, vyskytujícím se ve skupině druhé. Dle konstrukce jest $H^{(m)} \equiv \mathfrak{H}^{(m)}, G^{(m)}$; tedy by jedna z obou skupin L_1, L_2 obsahovala alespoň jeden člen ze skupiny $\mathfrak{H}^{(m)}$, tedy alespoň jeden člen určité skupiny z řady $H^{(m-1)}_{\lambda_{m-1}}$ a tedy dle 17 celou tuto skupinu; tedy dle konstrukce alespoň jeden člen ze skupiny $G^{(m)}$ a tedy dle 19 a 17 celou tuto skupinu; tedy dle konstrukce alespoň jeden člen z každé ze zbývajících skupin řady $\mathfrak{H}^{(m)}$ a tedy dle 17 celou tuto řadu skupin; tedy by byla druhá z obou skupin L_1, L_2 prázdná — což jest spor.

21. Skupina J splňuje podmínku 1^0.

Tato věta plyne bezprostředně z 3, 20 a 11.

22. Z konstrukce plyne, že řada skupin $H^{(\varrho)}_{\lambda_\varrho}$ (ϱ pevné $\leq u - 1$; $\lambda_\varrho = 0, 1, \ldots l_\varrho - 1$) obsahuje všechna čísla obsažená v řadě $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \ldots \mathfrak{G}_\varrho$ a jen ta.

23. Z konstrukce plyne, že při $u \geqq 2$ žádná skupina z řady skupin $H^{(\varrho)}_{\lambda_\varrho}$ (ϱ pevné, $\leq u - 2$; $\lambda_\varrho = 0, 1, \ldots l_\varrho - 1$) neobsahuje členu s indexem, vyskytujícím se v jiné skupině téže řady.

24. Budiž $u \geqq 2$; $v \leqq u - 1$. Obsahuje-li skupina K' skupiny $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \ldots \mathfrak{G}_{v-1}$, obsahuje dle 22 řadu skupin $H^{(v-1)}_{\lambda_{v-1}}$; tedy jest tvaru

$$K' \equiv H^{(v-1)}, H_1^{(v-1)}, \ldots H^{(v-1)}_{l_{v-1}-1}; M^{(v-1)}$$

25. Z 23 a 16 ihned vyplývá, že skupina $M^{(v-1)}$ není prázdná.

26. Ke každé skupině z řady $H^{(v-1)}_{\lambda_{v-1}}$ existuje ve skupině $M^{(v-1)}$ alespoň jeden člen, jehož jeden a jen jeden index se vyskytuje mezi indexy členů této skupiny.

Vskutku, jinak by ihned plynulo z 23 a 16, že skupina K' není úplná pro každé dva indexy.

27. Budiž $N^{(v-1)}_{\lambda_{v-1}}$ skupina všech členů skupiny $M^{(v-1)}$, jejichž jeden a jen jeden index se vyskytuje mezi indexy členů skupiny $H^{(v-1)}_{\lambda_{v-1}}$ (λ_{v-1} pevné).

Skupinu všech vzájemně různých čísel, obsažených ve skupině $N^{(v-1)}$, $N_1^{(v-1)}, \ldots N_{l_{v-1}-1}^{(v-1)}$ a tedy také ve skupině $M^{(v-1)}$ značím v dalším symbolem $M_*^{(v-1)}$.

28. Skupina $M_*^{(v-1)}$ obsahuje dle 26 alespoň jeden člen.

29. Budiž [mn] člen skupiny $M_*^{(v-1)}$. Buďtež k_1, k_2 libovolné dva indexy vyskytující se v těchže dvou různých skupinách řady $H_{\lambda_{v}-1}^{(v-1)}$ jako indexy m, n. Budiž $[k\ k_2] \neq [mn]$. Číslo $[k_1 k_2]$ není členem skupiny K'. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládati, že indexy m, k_1 vyskytují se mezi indexy členů skupiny $H^{(v-1)}$, indexy n, k_2 mezi indexy členů skupiny $H_1^{(v-1)}$. Předpokládejme opak, tedy že $[k_1\ k_2]$, jest členem skupiny K'. Skupina

$$K'' \equiv K' - [k_1\ k_2]$$

1. jest přípustná.

2. Jest úplná pro libovolné dva indexy $p_1 p_2$. Vskutku, ve skupině K' existuje skupina pro indexy p_1, p_2 Tato buď neobsahuje členu $[k_1\ k_2]$ a jest tedy obsažena ve skupině K'', anebo člen $[k_1\ k_2]$ obsahuje. V tomto případě však dle 20 existují ve skupině K'' skupiny (pokud nejsou prázdné) L_{k_1m}, L_{nk_2} a tedy dle 13 při vhodném označení indexů p_1, p_2 skupiny (pokud nejsou prázdné) $L_{p_1k_1}$, L_{k_1m}, [mn], L_{nk_2}, $L_{k_2p_2}$; tedy dle 14 skupina pro indexy p_1, p_2.

3. Součet členů skupiny K'' jest menší než součet členů skupiny K' — proti předpokladu.

30. Skupina $M_*^{(v-1)}$ jest obsažena v matici M_v.

Vskutku, předpokládáme-li opak, dojdeme ke sporu. Budiž [mn] člen skupiny $M_*^{(v-1)}$; bez újmy na obecnosti můžeme předpokládati, že index m vyskytuje se mezi indexy členů skupiny $H^{(v-1)}$, index n mezi indexy členů skupiny $H_1^{(v-1)}$. Budiž nyní pro jednoduchost $[k_1\ k_2]$ nejmenší z čísel $[\varkappa_1\ \varkappa_2]$ $(\varkappa_1$, $(\varkappa_2)$ kterýkoliv z indexů, vyskytujících se ve členech skupiny $H^{(v-1)}$ $(H_1^{(v-1)}))$ a předpokládejme, že číslo [mn] není obsaženo v matici M_v; tedy $[mn] > [k_1 k_2]$.

Skupina čísel vzájemně (dle 29) a od nuly různých, obsažených v matici M

$$K'' \equiv K' - [mn],\ [k_1\ k_2]$$

1. jest přípustná.

2. Jest úplná pro libovolné dva indexy p_1, p_2. Vskutku, buď existuje ve skupině K' alespoň jedna skupina pro indexy p_1, p_2, jež neobsahuje členu [mn] a jež jest tedy současně skupinou pro indexy p_1, p_2 ve

skupině K″, anebo ve skupině K′ každá skupina pro indexy p_1, p_2 člen [mn] obsahuje. V tomto případě existují však dle 20 ve skupině K″ skupiny (pokud nejsou prázdné) L_{mk_1}, L_{k_2n} a tedy dle 13 při vhodném označení indexů p_1, p_2 skupiny (pokud nejsou prázdné) L_{p_1m}, L_{mk_1} $[k_1 k_2]$ L_{k_2n}, L_{np_2}; tedy dle 14 skupina pro indexy p_1, p_2.

3. Součet členů skupiny K″ jest menší než součet členů skupiny K′ — proti předpokladu.

Věta IV. Budiž $u \geqq 2$, $v \leqq u-1$. Obsahuje-li skupina K′ skupiny $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \ldots \mathfrak{G}_{v-1}$, obsahuje skupinu $\mathfrak{G}_v$.

Vskutku, obsahuje-li skupina K′ skupiny $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1, \ldots \mathfrak{G}_{v-1}$, obsahuje dle 24, 27, 28, 30 skupinu čísel $M_*^{(v-1)}$, nikoliv prázdnou, obsaženou v matici M_v.

Skupina $M_*^{(v-1)}$ čísel vzájemně a od nuly různých, obsažených v matici M_v

1. jest pro matici M_v dle 26 přípustná.

2. Jest úplná pro každé dva indexy. Vskutku, jinak by bylo možno dle 16 ji rozděliti ve dvě ji úplně vyčerpávající skupiny částečné, obsahující alespoň po jednom členu a takové, že žádná z nich by neobsahovala členu s indexem, vyskytujícím se ve skupině druhé. Z 23 a 16 by pak ihned plynulo, že skupina K′ není úplná pro každé dva indexy — proti předpokladu.

3. Součet členů skupiny $M_*^{(v-1)}$ zřejmě není větší než součet členů kterékoliv skupiny jiné, obsažené v matici M_v a splňující předcházející dvě podmínky.

Skupina $M_*^{(v-1)}$ jest tedy skupinou čísel z matice M_v, mající tytéž vlastnosti jako skupina čísel K′ z matice M. Tedy dle věty III. obsahuje skupinu $\mathfrak{G}_v$.

31. Skupina K′ obsahuje skupinu J.

Tato věta plyne bezprostředně z vět III a IV.

Věta V. Skupina K′ neobsahuje členu, jenž není obsažen ve skupině J.

Vskutku, skupina J splňuje dle 21 podmínku 1°. Součet jejích členů nemůže tedy býti menší než součet členů skupiny K′.

32. Skupina J řeší danou úlohu.

Tato věta plyne bezprostředně ze 7, 31 a věty V.

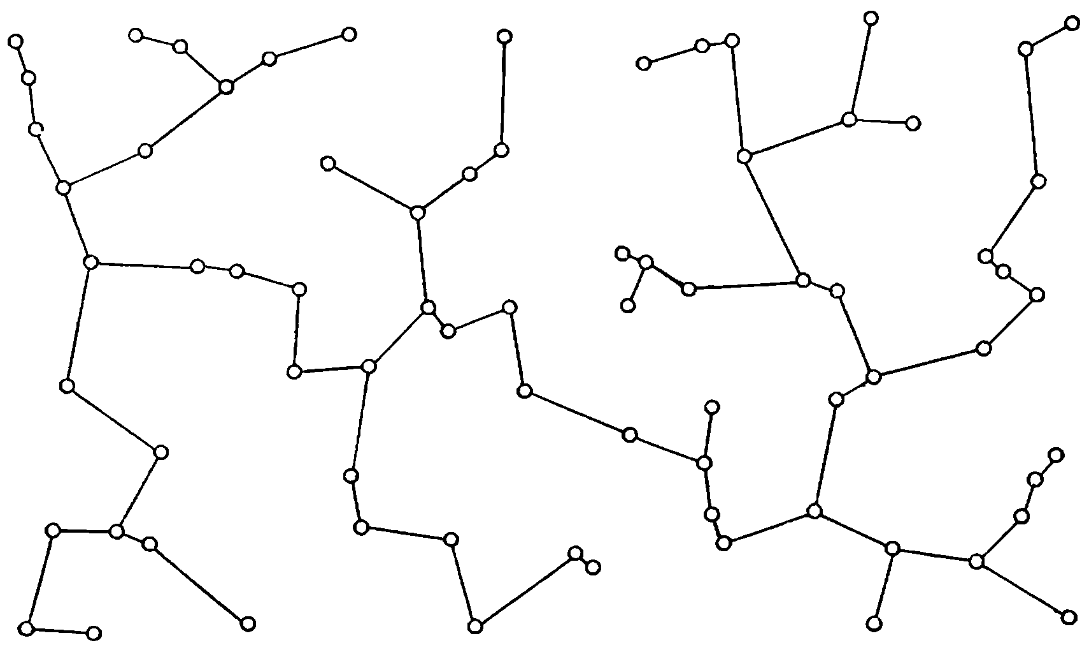
Poznámka. Hoví-li čísla $[\alpha\beta]$ v matici M zvláštním podmínkám, můžeme je interpretovati jako vzájemné vzdálenosti mezi n body; v odvozeném výsledku jest pak řešena následující úloha:

V rovině (obecně v r—rozměrném prostoru) jest dáno n [≥ 2] bodů, jejichž vzdálenosti jsou vesměs různé. Jest je spojiti sítí tak, aby

1° každé dva body byly spojeny buď přímo anebo prostřednictvím jiných,

2° celková délka sítě byla co nejmenší.

V následujícím obrazci jest podáno řešení této úlohy ve zvláštním případě.*)



*) Jak na základě odvozeného výsledku lze je prakticky nalézti, jest vyloženo v mém článku „Příspěvek k řešení otázky ekonomické stavby elektrovodných sítí“ v Elektrotechnickém obzoru roč. 15., 1926.

Über ein Minimalproblem.

In dieser Arbeit löse ich folgendes Problem:

Es möge eine Matrix der bis auf die Bedingungen $r_{\alpha\alpha} = 0$, $r_{\alpha\beta} = r_{\beta\alpha}$ positiven und von einander verschiedenen Zahlen $r_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n$; $n \geqq 2$) gegeben sein.

Aus dieser ist eine Gruppe von einander und von Null verschiedener Zahlen auszuwählen, so dass

1° in ihr zu zwei willkürlich gewählten natürlichen Zahlen p_1, p_2 ($\leqq n$) eine Teilgruppe von der Gestalt

$$r_{p_1 c_2},\ r_{c_2 c_3},\ r_{c_3 c_4},\ \ldots\ r_{c_{q-2} c_{q-1}},\ r_{c_{q-1} p_2}$$

existiere,

2° die Summe ihrer Glieder kleiner sei als die Summe der Glieder irgendeiner anderen, der Bedingung 1° genügenden Gruppe von einander und von Null verschiedenen Zahlen.*)

Lösung. Es sei f_0 eine der Zahlen α und $[f_0 f_1]$ die kleinste der Zahlen $[f_0 \gamma_0]$ $[\gamma_0 \neq f_0]$. Dann ist die Menge der Zahlen $[f_1 \gamma_1]$ $(\gamma_1 \neq f_0, f_1)$ entweder leer, oder sie ist es nicht. Im ersten Falle setzen wir

$$F \equiv [f_0 f_1],$$

im zweiten ist die kleinste der Zahlen $[f_1 \gamma_1]$ entweder grösser als $[f_0 f_1]$, oder kleiner. Ist sie grösser, so setzen wir

$$F = [f_0 f_1],$$

ist sie kleiner, betrachten wir die kleinste der Zahlen $[f_1 \gamma_1]$; diese sei $[f_1 f_2]$. Dann ist die Menge der Zahlen $[f_2 \gamma_2]$ $(\gamma_2 \neq f_0, f_1, f_2)$ entweder leer, oder sie ist es nicht. Im ersten Falle setzen wir

$$F \equiv [f_0 f_1],\ [f_1 f_2],$$

im zweiten ist die kleinste der Zahlen $[f_2 \gamma_2]$ entweder grösser als $[f_1 f_2]$, oder kleiner. Ist sie grösser, so setzen wir

$$F \equiv [f_0 f_1],\ [f_1 f_2]$$

*) Der Einfachheit halber bezeichne ich die Zahl $r_{\alpha\beta}$ mit $[\alpha\beta]$.

ist sie kleiner, betrachten wir die kleinste der Zahlen $[f_2\gamma_2]$; diese sei $[f_3\gamma_3]$. Dann ist die Menge der Zahlen $[f_3\gamma_3]$ ($\gamma_3 \neq f_0, f_1, f_2, f_3$) entweder leer, oder sie ist es nicht. Im ersten Falle setzen wir

$$F \equiv [f_0 f_1],\ [f_1 f_2],\ [f_2 f_2],$$

im zweiten ist die kleinste der Zahlen $[f_3\gamma_3]$ entweder grösser als $[f_2 f_3]$, oder kleiner. Ist sie grösser, so setzen wir

$$F \equiv [f_0 f_1],\ [f_1 f_2],\ [f_2 f_3],$$

ist sie kleiner, so setzen wir das Verfahren in derselben Weise fort. Wir gelangen endlich zu einer Gruppe

$$F \equiv [f_0 f_1],\ [f_1 f_2],\ [f_2 f_3],\ \ldots\ [f_{g-1} f_g].$$

Unter den Indices $f_0, f_1, \ldots f_g$ kommt dann entweder eine jede der Zahlen 1, 2, ... n wenigstens einmal vor, oder nicht. Im ersten Falle setzen wir

$$\mathfrak{F} \equiv F,$$

im zweiten sei $f_0^{(1)}$ eine der Zahlen 1, 2, ...n, die unter den Zahlen $f_0, f_1, \ldots f_g$ nicht vorkommt. Es sei $[f_0^{(1)} f_1^{(1)}]$ die kleinste der Zahlen $[f_0^{(1)}\gamma_0^{(1)}]$ ($\gamma_0^{(1)} \neq f_0^{(1)}$). Von dieser Zahl ausgehend konstruiren wir in derselben Weise wie früher die Gruppe

$$F_1 \equiv [f_0^{(1)} f_1^{(1)}],\ [f_1^{(1)} f_2^{(1)}],\ \ldots\ [f_{g_1-1}^{(1)} f_{g_1}^{(1)}].$$

Sollten wir bei der Konstruktion dieser Gruppe zu einer Zahl gelangen, deren Index bereits unter den Indices der Zahlen der Gruppe F vorkommt, so setzen wir, wenn $f_{h_1}^{(1)}$ den ersten solcher Indices bezeichnet, $f_{g_1}^{(1)} \equiv f_{h_1}^{(1)}$.

Unter den Indices $f_0, f_1, \ldots f_g$; $f_0^{(1)}, f_1^{(1)}, \ldots f_{g_1}^{(1)}$, kommt dann entweder eine jede der Zahlen 1, 2, ... n wenigstens einmal vor, oder nicht. Im ersten Falle setzen wir

$$\mathfrak{F} \equiv F,\ F_1,$$

im zweiten sei $f_0^{(2)}$ eine der Zahlen 1, 2, ... n, die unter den Zahlen $f_0, f_1, \ldots f_g$; $f_0^{(1)}, f_1^{(1)}, \ldots f_{g_1}^{(1)}$ nicht vorkommt. Es sei $[f_0^{(2)} f_1^{(2)}]$ die kleinste der Zahlen $[f_0^{(2)}\gamma_0^{(2)}]$ $[\gamma_0^{(2)} \neq f_0^{(2)}]$. Von dieser Zahl ausgehend konstruiren wir in derselben Weise wie früher die Gruppe

$$F_2 \equiv [f_0^{(2)} f_1^{(2)}],\ [f_1^{(2)} f_2^{(2)}],\ \ldots\ [f_{g_2-1}^{(2)} f_{g_2}^{(2)}].$$

Sollten wir bei der Konstruktion dieser Gruppe zu einer Zahl gelangen, deren Index bereits unter den Indices der Zahlen der Gruppen

F, F_1 vorkommt, so setzen wir, wenn $f^{(2)}_{i_2}$ den ersten solcher Indices bezeichnet $f^{(2)}_{g_2} \equiv f^{(2)}_{h_2}$.

Unter den Indices $f_0, f_1, \ldots f_g$; $f^{(1)}_0, f^{(1)}_1, \ldots f^{1}_{g_1}$; $f^{(2)}_0, f^{(2)}_1, \ldots f^{(2)}_{g_2}$ kommt dann entweder eine jede der Zahlen $1, 2, \ldots n$ wenigstens einmal vor, oder nicht. Im ersten Falle setzen wir

$$\mathfrak{F} \equiv F, F_1, F_2,$$

im zweiten Falle setzen wir das Verfahren in derselben Weise fort. Wir gelangen endlich zu einer Reihe von Gruppen

$$\mathfrak{F} \equiv F, F_1, F_2, \ldots F_{i-1},$$

die als eine Gruppe von Zahlen betrachtet, Zahlen mit allen Indices enthält.

Die Reihe von Gruppen $\mathfrak{F}$ enthält entweder gerade nur die Gruppe F oder mehrere Gruppen. Im ersten Falle setzen wir

$$G \equiv F,$$

im zweiten enthält die Gruppe F entweder keine Zahl, deren Index in einer der übrigen Gruppen der Reihe $\mathfrak{F}$ vorkommt, oder sie enthält eine solche. Enthält sie keine solche Zahl, so setzen wir

$$G \equiv F,$$

enthält sie eine solche, so können wir allgemein annehmen, sie enthalte eine Zahl, deren Index unter den Indices der Zahlen der Gruppe F_1 vorkommt.

Die Reihe von Gruppen $\mathfrak{F}$ enthält dann entweder gerade nur die Gruppen F, F_1, oder mehrere Gruppen. Im ersten Falle setzen wir

$$G \equiv F, F_1,$$

im zweiten enthält die Gruppe F, F_1 entweder keine Zahl, deren Index in einer der übrigen Gruppen der Reihe $\mathfrak{F}$ vorkommt, oder sie enthält eine solche. Enthält sie keine solche Zahl, so setzen wir

$$G \equiv F, F_1,$$

enthält sie eine solche, so können wir allgemein annehmen, sie enthalte eine Zahl, deren Index unter den Indices der Zahlen der Gruppe F_2 vorkommt.

Die Reihe von Gruppen $\mathfrak{F}$ enthält dann entweder gerade nur die Gruppen F, F_1, F_2, oder mehrere Gruppen. Im ersten Falle setzen wir

$$G \equiv F, F_1, F_2,$$

im zweiten Falle setzen wir das Verfahren in derselben Weise fort. Wir gelangen endlich zu einer Gruppe von Zahlen

$$G \equiv F, F_1, F_2, \ldots F_{k-1}.$$

Diese enthält entweder alle Gruppen der Reihe $\mathfrak{F}$ oder nicht. Im ersten Falle setzen wir

$$\mathfrak{G} \equiv G,$$

im zweiten existiert in der Reihe $\mathfrak{F}$ eine Gruppe F_k in der keine Zahl mit einem unter den Indices der Zahlen der Gruppe G vorkommenden Index enthalten ist.

Die Reihe von Gruppen $\mathfrak{F}$ enthält dann entweder gerade nur die Gruppen G, F_k, oder mehrere Gruppen. Im ersten Falle setzen wir

$$G_1 \equiv F_k,$$

im zweiten enthält die Gruppe F_k entweder keine Zahl, deren Index in einer der übrigen Gruppen der Reihe $\mathfrak{F}$ vorkommt, oder sie enthält eine solche. Enthält sie keine solche Zahl, so setzen wir

$$G_1 \equiv F_k,$$

enthält sie eine solche, so können wir allgemein annehmen, sie enthalte eine Zahl, deren Index unter den Indices der Zahlen der Gruppe F_{k+1} vorkommt.

Die Reihe von Gruppen $\mathfrak{F}$ enthält dann entweder gerade nur die Gruppen G, F_k, F_{k+1}, oder mehrere Gruppen. Im ersten Falle setzen wir

$$G_1 = F_k, F_{k+1},$$

im zweiten Falle setzen wir das Verfahren in derselben Weise fort. Wir gelangen endlich zu einer Gruppe von Zahlen

$$G_1 \equiv F_k, F_{k+1}, \ldots F_{k_1-1}.$$

Die Gruppe G, G_1 enthält dann entweder alle Gruppen der Reihe $\mathfrak{F}$ oder nicht. Im ersten Falle setzen wir

$$\mathfrak{G} \equiv G, G_1,$$

im zweiten Falle setzen wir das Verfahren in derselben Weise fort. Wir gelangen endlich zu einer Reihe von Gruppen

$$\mathfrak{G} \equiv G, G_1, \ldots G_{l-1}.$$

Diese enthält alle Gruppen der Reihe $\mathfrak{F}$ und die Indices der Zahlen von zwei verschiedenen Gruppen dieser Reihe sind verschieden.

Es sei $H_\lambda \equiv G_\lambda$ $(\lambda = 0, 1, \ldots l-1)$.

Die Reihe von Gruppen $\mathfrak{G}$ enthält entweder gerade nur die Gruppe G, oder mehrere Gruppen. Im ersten Falle setzen wir

$$J \equiv \mathfrak{G},$$

im zweiten sei: $\varkappa_\lambda$ einer der Indices der Zahlen der Gruppe H_λ;

α_1, β_1 zwei der Zahlen λ;

$[k_{\alpha_1\beta_1} k_{\beta_1\alpha_1}]$ die kleinste der Zahlen $[\varkappa_{\alpha_1}\varkappa_{\beta_1}]$ für $\alpha_1 \neq \beta_1$, 0 für $\alpha_1 = \beta_1$;

M_1 Matrix der Zahlen $[k_{\alpha_1\beta_1} k_{\beta_1\alpha_1}]$ $(\alpha_1, \beta_1 - 0, 1, \ldots l-1)$.

$\mathfrak{G}_1 \equiv G^{(1)}, G^{(1)}_1, \ldots G^{(1)}_{l_1-1}$ die durch dasselbe Verfahren wie die Reihe $\mathfrak{G}$ aus der Matrix M, hergestellte Reihe von Gruppen aus der Matrix M_1;

$\mathfrak{H}^{(1)}_{\lambda_1}$ die Reihe derjenigen der Gruppen $H, H_1, \ldots H_{l-1}$, die wenigstens eine Zahl mit einem in den Indices der Zahlen der Gruppe $G^{(1)}_{\lambda_1}$ $(\lambda_1 = 0, 1, \ldots l_1 - 1)$ vorkommenden Index enthalten;

$H^{(1)}_{\lambda_1} \equiv \mathfrak{H}^{(1)}_{\lambda_1}, G^{(1)}_{\lambda_1}$.

Die Reihe von Gruppen $\mathfrak{G}_1$ enthält dann entweder gerade nur die Gruppe $G^{(1)}$, oder mehrere Gruppen. Im ersten Falle setzen wir

$$J = \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1,$$

im zweiten sei $\varkappa_{\lambda_1}$ einer der Indices der Zahlen der Gruppe $H^{(1)}_{\lambda_1}$;

α_2, β_2 zwei der Zahlen λ_1;

$[k_{\alpha_2\beta_2} k_{\beta_2\alpha_2}]$ die kleinste der Zahlen $[\varkappa_{\alpha_2}\varkappa_{\beta_2})$ für $\alpha_2 \neq \beta_2$, 0 für $\alpha_2 = \beta_2$;

M_2 Matrix der Zahlen $[k_{\alpha_2\beta_2} k_{\beta_2\alpha_2}]$ $(\alpha, \beta_2 - 0, 1 \ldots l_1 - 1)$;

$\mathfrak{G}_2 \equiv G^{(2)}, G^{(2)}_1, \ldots G^{(2)}_{2-1}$ die durch dasselbe Verfahren wie die Reihe $\mathfrak{G}$ aus der Matrix M, hergestellte Reihe von Gruppen aus der Matrix M_2;

$\mathfrak{H}^{(2)}_{\lambda_2}$ die Reihe derjenigen der Gruppen $H^{(1)}, H^{(1)}_1, \ldots H^{(1)}_{1\ 1}$, die wenigstens eine Zahl mit einem in den Indices der Zahlen der Gruppe $G^{(2)}_{\lambda_2}$ $(\lambda_2 = 0, 1, \ldots l_2 - 1)$ vorkommenden Index enthalten;

$H^{(2)}_{\lambda_2} \equiv \mathfrak{H}^{(2)}_{\lambda_2}, G^{(2)}_{\lambda_2}$.

Die Reihe von Gruppen $\mathfrak{G}_2$ enthält dann entweder gerade nur die Gruppe $G^{(2)}$, oder mehrere Gruppen. Im ersten Falle setzen wir

$$J \equiv \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$$

im zweiten sei: $\varkappa_{\lambda_2}$ einer der Indices der Zahlen der Gruppe $H^{(2)}_{\lambda_2}$;
α_3, β_3 zwei der Zahlen λ_2;
$[k\alpha_3\beta_3 \, k\beta_3\alpha_3]$ die kleinste der Zahlen $[\varkappa\alpha_3 \varkappa\beta_3]$ für $\alpha_3 \neq \beta_3$, 0 für $\alpha_3 \neq \beta_3$;
M_3 Matrix der Zahlen $[k_{\alpha_3\beta_3} \, k_{\beta_3\alpha_3}]$ $(\alpha_3, \beta_3 = 0, 1, \ldots l_2 - 1)$;
$\mathfrak{G}_3 \equiv G^{(3)}, G^{(3)}_1, \ldots G^{(3)}_{l_3-1}$ die durch dasselbe Verfahren wie die Reihe $\mathfrak{G}$ aus der Matrix M, hergestellte Reihe von Gruppen aus der Matrix M_3;
$\mathfrak{H}^{(3)}_{\lambda_3}$ die Reihe derjenigen der Gruppen $H^{(2)}, H^{(2)}_1, \ldots H^{(2)}_{l_2-1}$, die wenigstens eine Zahl mit einem in den Indices der Zahlen der Gruppe $G^{(3)}_{\lambda_3}$ $(\lambda_3 = 0, 1, \ldots l_{3-1})$ vorkommenden Index enthalten;
$H^{(3)}_{\lambda_3} = \mathfrak{H}^{(3)}_{\lambda_3}, G^{(3)}_{\lambda_3}$.

Die Reihe von Gruppen $\mathfrak{G}_3$ enthält dann entweder gerade nur die Gruppe $G^{3)}$, oder mehrere Gruppen. Im ersten Falle setzen wir

$$J \equiv \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3,$$

im zweiten Falle setzen wir das Verfahren in derselben Weise fort. Wir gelangen endlich zu einer Gruppe von Zahlen

$$J \equiv \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \ldots \mathfrak{G}_{u-1}$$

die das vorgelegte Problem löst.

*

Der Beweis wird durch folgende Sätze erbracht:

I. Eine Zahl [mn] aus der Matrix M erscheint bei beliebiger Wahl der Anfangsindices der Gruppen $F\alpha$ der Reihe $\mathfrak{F}$ in einer dieser Gruppen dann und nur dann, wenn sie entweder die kleinste der Zahlen $[m\mu]$ $(\mu \neq m)$ oder der Zahlen $[n\nu]$ $(\nu \neq n)$ ist.

II. Es ist möglich aus der Matrix M wenigstens eine der Bedingung 1^0 genügende Gruppe von einander und von Null verschiedener Zahlen auszuwählen, so dass die Summe ihrer Glieder nicht grösser ist, als die Summe der Glieder irgendeiner anderen, der Bedingung 1^0 genügenden Gruppe von einander und von Null verschiedener Zahlen.

III. Ist K' eine solche Gruppe von Zahlen, so enthält sie die Gruppe $\mathfrak{G}$.

IV. Ist $u \geqq 2$ und $v \leqq u-1$ und enthält die Gruppe K' die Gruppen $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \ldots \mathfrak{G}_{v-1}$, so enthält sie auch die Gruppe $\mathfrak{G}_v$.

V. Die Gruppe K' enthält keine Zahl, die in der Gruppe J nicht enthalten ist.

Brno, Jänner 1926.