Otakar Borůvka

Neuere Ergebnisse in der Transformationstheorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung

Vortrage der 3. Tagung über Probleme und Methoden der mathematischen Physik, Heft 1, Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt, 1966, 13-27

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500116

Neuere Ergebnisse in der Transformationstheorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung *

Von O. Boruvka

I. Die Transformationstheorie der gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen (Dgln.) 2. Ordnung behandelt im wesentlichen die Auswirkungen von Vorgängen, die mit Transformationen der Veränderlichen zusammenhängen, auf Integrale der genannten Dgln. Diese Theorie wurde von E.E. KUMMER begründet, dessen Leistungen in dieser Richtung durch die Entdeckung der für die Transformationstheorie grundlegenden nichtlinearen Dgl. 3. Ordnung

$$(Qq) \qquad -\{X,t\} + Q(X)X'^2 = q(t)$$

gekennzeichnet sind. Die diesbezügliche in lateinischer Sprache verfaßte Abhandlung von Kummer wurde zunächst im Jahre 1834 in dem Programm des evangelischen Königl. und Stadtgymnasiums in Liegnitz veröffentlicht und später, im Jahre 1887, in dem Journ. f. d. reine und angewandte Mathematik (Vol.100) neu abgedruckt. Die weitere Entwicklung führte zu ausgedehnten und durch die Arbeiten namentlich von E. LAGUERRE, F. BRIOSCHI, G.H. HALPHEN A R. FORSYTH, S. LIE, P.APPELL geführten Forschungen über Transforma ionen von linearen Dgln. n-ter Ordnung im Zusamm nhang mit dem Äquivalenzproblem. D eses letztere besteht bekanntlich in de Auffindung von Bedingungen, unter denen zw i lineare D ln. n-ter Ordnung ineinander transformiert werden können. Im Rahm n der erwähnten Forschungen kommen gelegentlich solche über Transformationen der linearen Dgln. 2. Ordnung im komplexen Gebiet vor. Die linearen Dgln. 2. Ordnung nehmen unter denen n ($\geq$ 2)-ter Ordnung eine ausgezeichnete Stellung ein, nicht nur wegen ihrer niedrigsten Ordnung, sondern hauptsächlich deshalb, weil nur in diesem Falle n = 2 zwei Dgln. immer äquivalent sind.

Im Laufe der letzten fünfzehn Jahre habe ich eine Transformationstheorie der genannten Differentialgleichungen im reellen Gebiet entwickelt. Es geht um eine qualitative Theorie von globalem Charakter. Diese Theorie ist weitgehend auf neuen Begriffsbildungen aufgebaut und besteht im wesentlichen aus zwei Teilen. Den einen bildet die nach ihren Grundbegriffen benannte und oszillatorische Dgln. beherrschende Dispersionstheorie, deren Aufbau von dem Begriff der Zentraldispersionen zu einer konstruktiven Integrationstheorie der Kummerschen Dgl. fortschreitet. Der andere Teil enthält die allgemeine Transformationstheorie, in der unter allgemeinen Bedingungen Eigenschaften von Lösungen der Kummerschen Dgl. im Zusammenhang mit Transformationsprozessen bei linearen Dgln. 2. Ordnung untersucht werd n. Ein Abschnitt dieser Theorie ist Fragen über vollständige Lösungen der Kummerschen Differentialgleichung gewidmet. Die vollständigen Lösungen dieser Dgl. zeichnen sich dadurch aus, daß sie als transformierende Funktionen die Integrale von linearen Dgln. 2. Ordnung in ihrem ganzen Verlauf ineinander überführen. Die zu dem Ausbau dieser Transformationstheorie angewandten Methoden haben bei einigen Begriffen aus der klassischen Theorie der linearen Dgln. 2. Ordnung eine weitgehende Vertiefung bzw. Erweiterung als erforderlich oder vorteilhaft erscheinen lassen. Dies betrifft insbesondere den Phasenbegriff, der sich in der Transformationstheorie in methodischer Hinsicht als einer der wichtigsten Begriffe erwiesen hat. Von besonderem Interesse scheint es mir zu sein, daß der diesbezügliche Stoff neben den Mitteln der klassischen Analysis in manchen Richtungen weitgehend die der modernen Algebra und namentlich der Gruppentheorie in die Überlegungen einzugehen und auf diesem Wege tiefliegende Tatsachen zu erkennen erlaubt.

II. In der mir bei diesem Vortrag zur Verfügung stehenden Zeit werde ich mir erlauben, über zwei Themen zu sprechen, von denen eines oszillatorische Dgln. betrifft und in die Theorie der Zentraldispersionen gehört, während das andere der allgemeinen Transformationstheorie entnommen ist. Beide Themen sind konkreten Fragen gewidmet und auf numerische bzw. physikalische Anwendung eingestellt.

Ich werde mich mit den sogenannten Sturm-Liouvilleschen oder auch Jacobischen Differentialgleichungen 2. Ordnung, d. h. mit Dgln. von der Form

$$(q) \qquad y'' = q(t)\,y$$

befassen. Ich setze voraus, daß die Koeffizienten q dieser Dgln., die ich gelegentlich auch als Träger der betrachteten Dgln. bezeichne, stetige Funktionen in offenen Intervallen sind. Natürlich können von den Trägern auch weitere Eigenschaft n geford rt werden.

Eine Dgl. (q) heißt oszillatorisch, wenn ihre Integrale oszillieren, d.h. in beiden Richtungen gegen die Enden des Definitionsintervalls von (q) unendlich oft verschwinden. Ein wohlbekannter Prototyp solcher Dgln. stellt die Dgl. $(-k^2)$ mit dem konstanten Träger $-k^2$ ($\neq 0$) in dem Intervall $(-\infty, \infty)$ dar.

III. Differentialgleichung n mit denselben Nullstellen von Integralen.

1. In diesem Abschnitt betrachten wir oszillatorische Dgln. (q) in dem Intervall $j = (-\infty, \infty)$.

Ich will zunächst den Begriff der Fundamentaldispersion 1. Art, kürzer: der Fundamentaldispersion, einer solchen Dgl. (q) erklären. Dies ist einer d r grundlegenden Begriffe in der Transformationstheorie der oszillatorischen Dgln.

Die Fundamentaldispersion einer (oszillatorischen) Dgl. (q) ist eine Funktion φ in d m Intervall j, die so erklärt ist: An jeder Stelle $t \in j$ ist ihr Wert $\varphi(t)$ die erste nach t folgende Nullstelle eines beliebigen Integrals y der Dgl. (q), das an der Stelle t verschwindet. Es ist klar, daß diese Definition von der Wahl des Integrals y nicht abhängt, da alle an der Stelle t verschwindenden Integrale der Dgl. (q) voneinander (linear) abhängen und folglich dieselben Nullstellen besitzen.

Von den Eigenschaften der Fundamentaldispersion will ich hier nur die folgenden erwähnen:

$$\underline{1.}\ \varphi(t) > t; \quad \underline{2.}\ \varphi \in C_3; \quad \underline{3.}\ \varphi' > 0; \quad \underline{4.}\ \lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = -\infty, \quad \lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty. \tag{1}$$

2. Nun komme ich zu dem ersten Thema, über das ich in diesem Vortrag sprechen möchte, nämlich zu Dgln. (q) mit denselben Nullstellen von Integralen.

Es sei (q) eine Dgl. und y eines ihrer Integrale. Wir wissen, daß die Nullstellen jedes Integrals $\bar{y}$ von (q), das mit dem Integral y eine Nullstelle gemeinsam hat, sämtlich mit denen von y zusammenfallen. Dies geht aus der Tatsache hervor, daß je zwei Integrale der Dgl. (q) mit einer gemeinsamen Nullstelle voneinander abhängig sind.

Nun ist es aber von vornherein möglich, daß es auch weitere, und zwar von der Dgl. (q) verschiedene, Differentialgleichungen $(\bar{q})$ gibt, deren Integrale sich ebenso verhalten: Die Nullstellen jedes Integrals $\bar{y}$ von $(\bar{q})$, das mit dem Integral y eine Nullstelle gemeinsam hat, fallen sämtlich mit denen von y zusammen.

Wir sprechen von Differentialgleichungen (q), $(\bar{q})$ mit denselben Nullstellen von Integralen, wenn die Nullstellen von je zwei Integralen y, $\bar{y}$ von (q) bzw. $(\bar{q})$ sämtlich voneinander verschieden sind oder zusammenfallen.

Nun sind die Fragen, mit denen wir uns befassen wollen, die folgenden:

Gibt es zu einer Dgl. (q) weitere Dgln. $(\bar{q})$ mit denselben Nullstellen von Integralen? Wenn ja, welche Mächtigkeit hat die von allen diesen Dgln. gebildete Menge?
Ferner: Welche sind die gegenseitigen Beziehungen zwischen den Trägern q, $\bar{q}$? Und schließlich: Können explizite Ausdrücke für die Träger $\bar{q}$ im Zusammenhang mit q angegeben werden?

Bevor ich auf die Beantwortung dieser Fragen eingehe, möchte ich bemerken, daß Integrale von zwei Dgln. (q), ($\bar{q}$) genau dann dieselben Nullstellen haben, wenn die Fundamentaldispersion φ, $\bar{\varphi}$ von (q), ($\bar{q}$) zusammenfallen: $\varphi(t) = \bar{\varphi}(t)$ für $t \in j$. Dies kann unschwer aus dem B griff der Fundamentaldi p rsion hergeleitet werden.

s sei nun ($Q\varphi$) d Menge aller Dgln. (q), deren Fundantaldispersion φ ist, und $Q\varphi$ die Menge aller Träger der gln. aus d r Menge ($Q\varphi$).

Ferner sei $c \in (-\infty, \infty)$ eine beliebige Zahl und Bc die Menge ller in c verschwindenden Integrale der einzelnen Dgln. aus er nge ($Q\varphi$). Wir nennen Bc den Integralstreifen (c). lle in Bc lieg nden Integrale d r einzelnen Dgln. $(q) \in (Q\varphi)$ abe also alle Nullstellen gemeinsam. Diese Nullstellen nen n wir die Knoten des Integralstreifens Bc; unter ihnen befindet sich natürlich die Zahl c.

Nun können die oben formulierten und im weiteren zu behandelnden Fragen so ausgedrückt werden:

Es sei φ die Fundamentaldispersion der Dgl. (q).
Welche Mächtigkeit hat die Menge $Q\varphi$?
Welche Eigenschaften haben die in Bc liegenden Integrale?
Wie lauten die gegenseitigen Beziehungen zwischen den Elementen der Menge $Q\varphi$?
Wie lautet der explizite Ausdruck für die Elemente $q \in Q\varphi$?

Dies ist also der Fragenkomplex, mit dessen Beantwortung wir uns befassen wollen.

3. Im Jahre 1961 hat E. BARVÍNEK gezeigt, daß zu jeder im Intervall $(-\infty, \infty)$ definierten Funktion φ mit den obigen Eigenschaften (1) oszillatorische Dgln. (q) konstruiert werden können, deren Fundamentaldispersion genau die Funktion φ ist. Aus den Betrachtungen von E. Barvínek geht hervor, daß es im allgemeinen, je nach der Wahl der Funktion φ, unendlich viele solche Dgln. gibt. Nun habe ich im Jahre 1963 mit Hilfe von allgemeinen Sätzen aus der Gruppentheorie bewiesen, daß

die Mächtigkeit der Menge Q_φ von der Wahl der Funktion φ nicht abhängt und stets derjenigen des Kontinuums, also c, gleich ist. Damit ist die erste der obigen Fragen beantwortet.

Zu diesem Resultat möchte ich die folgende Bemerkung hinzufügen.
In der numerischen Praxis der Dgln. kommt gelegentlich die Berechnung der Nullstellen von Integralen einer konkreten Dgl. (q) vor. Man denke etwa an die Besselschen Funktionen. Eine solche Berechnung hängt natürlich von dem Träger der gegebenen Dgl. ab und kann sich unter Umständen sehr schwierig g s alten. Es liegt nun die Idee nahe, den gegeben n T äger q durch einen, sagen wir: Repräsent nten, d. h. einen Träger $\bar{q}$ mit de selben Fundam n aldispe ion φ zu ersetzen. Sodann aben die Integrale der Dgl. ($\bar{q}$) dies lben Nullst len w e e ntegrale von (q). Man wird na ürlich strebt s n, n seig eten Reprä ta t n $\bar{q}$ zu ählen, und zwar ß i h die Berechnung der Nullstellen der I tegrale vo ($\bar{\ }$) ögli s einfach g staltet. Das obige R ultat gibt uns die Sich r eit daß es stets, und sogar un ndlich vi le (it der äch igk it c) Repräsentanten $\bar{q}$ gibt, durch die d r gegebene Träg r q ersetzt werden kann. Hier entsteht das folgende Problem: Ausarbeitung von Methoden zur Ermittlung rechnerisch vorteilhafter Repräsentanten gegebener Träger. Dieses Problem steht zur Zeit völlig offen.

4. Nun komme ich zur Behandlung der weiteren Frage in dem obigen Fragenkomplex, und zwar zu den Eigenschaften der in einem Integralstreifen Bc liegenden Integrale der Dgln. aus der Menge (Q_φ).

Den Ausgangspunkt dazu bilden zwei Formeln, die ich im Hinblick auf ihre bemerkenswerte Struktur anführen möchte.

Es sei $c \in (-\infty, \infty)$ eine beliebige Zahl und $y \in$ Bc ein beliebiges Integral aus dem Integralstreifen Bc.

Ich bezeichne mit c_{-1} und c_1 die links bzw. rechts von c liegende Nullstelle von y. Ferner wähle ich in dem Intervall (c_{-1}, c) eine beliebige Zahl x, also: $x \in (c_{-1}, c)$. Sodann liegt die Zahl $\varphi(x)$ in dem Intervall (c, c_1): $\varphi(x) \in (c, c_1)$.

Nun sind die erwähnten Formeln die folgenden

$$\int_x^{\varphi(x)} \left[\frac{y'^2(c)}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{(\sigma-c)^2}\right] d\sigma = \frac{1}{c-x} + \frac{1}{\varphi(x)-c} ,$$

$$\int_c^{\varphi(c)} \left[\frac{y'^2(c)}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{(\sigma-c)^2} - \frac{1}{(\sigma-\varphi(c))^2}\right] d\sigma = \frac{1+\varphi(c)}{\varphi(c)-c} - \frac{1}{2}\,\frac{\varphi''(c)}{\varphi'(c)} .$$

Das Bemerkenswerte an dieser Formeln ist der Umstand, daß die Werte der links stehenden Integrale von der Wahl des Integrals y in dem Integralstreifen Bc nicht abhängen, sondern, abgesehen von den Zahlen c, x, durch die Fundamentaldispersion φ eindeutig bestimmt sind. Wir drücken dies auch so aus, daß die erwähnten Integrale Invarianten des Integralstreifens Bc darstellen.

Eine weitere Eigenschaft des Integralstreifens Bc besteht darin, daß je zwei Integrale $y, \bar{y} \in$ Bc durch die Knoten c_ν ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$: $c_0 = c$) von Bc in Richtungen $y'(c_\nu)$, $\bar{y}'(c_\nu)$ hindurchgehen, deren Verhältnis stets dasselbe ist, also: $y'(c_\nu) : \bar{y}'(c_\nu) = k (\neq 0)$ für alle natürlichen Zahlen ν.

Aus diesen Resultaten folgt sodann die für je zwei Integrale $y, \bar{y} \in$ Bc und für alle Zahlen $t \in (-\infty, \infty)$ geltende Formel

$$\int_t^{\varphi(t)} \left[\frac{y'^2(c)}{y^2(\sigma)} - \frac{\bar{y}'^2(c)}{\bar{y}^2(\sigma)}\right] d\sigma = 0 .$$

Nun entsteht natürlich die Frage, inwieweit diese Eigenschaften die Integralstreifen charakterisieren.

Es seien (q), $(\bar{q})$ beliebige oszillatorische Dgln. im Intervall $j = (-\infty, \infty)$ und $\varphi, \bar{\varphi}$ ihre Fundamentaldispersionen.

Wir setzen voraus, daß diese Dgln. Integrale $y, \bar{y}$ zulassen, die dieselben Nullstellen haben und durch diese letzteren in Richtungen mit stets demselben Verhältnis $y' : \bar{y}'$

(= $k \neq 0$) hindurchgehen. Ferner setzen wir voraus, daß für alle von den gemeinsamen Nullstellen von y, $\bar{y}$ verschiedenen Zahlen $t < j$ wenigstens eine (und stets dieselbe) der folgenden Beziehungen gilt:

$$\int_t^{\varphi(t)} \left[\frac{k}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{k}\,\frac{1}{\bar{y}^2(\sigma)}\right] d\sigma = 0\,, \qquad \int_t^{\bar{\varphi}(t)} \left[\frac{k}{y^2(\sigma)} - \frac{1}{k}\,\frac{1}{\bar{y}^2(\sigma)}\right] d\sigma = 0\,.$$

Unter diesen Voraussetzungen läßt sich zeigen, daß die Fundamentaldispersionen φ, $\bar{\varphi}$ zusammenfallen und folglich die beiden Integrale y, $\bar{y}$ zu demselben Integralstreifen der Menge $(Q\varphi)$ gehören.

5. Nun werde ich über die weitere von den oben gestellten Fragen, nämlich über gegenseitige Beziehungen zwischen den Trägern q, $\bar{q}$ von zwei Dgln. (q), $(\bar{q})$ mit derselben Fundamentaldispersion sprechen.

Der Kürze halber wollen wir die Träger q, $\bar{q}$ von zwei Dgln. (q), $(\bar{q})$ mit derselben Fundamentaldispersion φ Träger mit derselben Fundamentaldispersion nennen.

Es gilt der folgende bemerkenswerte

SATZ. Zwei Träger q, $\bar{q}$ mit derselben Fundamentaldispersion φ nehmen in jedem Intervall $[x, \varphi(x))$, wobei x eine beliebige Zahl ist, wenigstens viermal denselben Wert an.

Es gibt also in jedem solchen Intervall wenigstens vier Stellen x_1, x_2, x_3, x_4 so, daß $q(x_i) = \bar{q}(x_i)$ für $i = 1,2,3,4$ ist.

Dieser Satz läßt sich nicht verbessern. In der Tat, man kann an Beispielen zeigen, daß bei geeigneter Fundamentaldispersion φ, zwei Träger mit der Fundamentaldispersion φ in jedem Intervall $[x, \varphi(x))$ denselben Wert genau viermal annehmen.

6. Nun will ich zu der letzten von den oben erwähnten Fragen, und zwar zur Aufstellung eines expliziten Ausdrucks für die in der Menge $Q\varphi$ enthaltenen Funktionen q übergehen. Den Ausgangspunkt dazu bildet die Untersuchung des Verhältnisses

von zwei in dem Integralstreifen Bo der Menge $(Q\varphi)$ liegenden Integralen y, $\bar{y} \in Bo$.

Wir betrachten den Integralstreifen Bo der Menge $(Q\varphi)$ und wählen zwei beliebige Integrale y, $\bar{y} \in Bo$. Die Knoten von Bo seien $\ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0 = c, c_1, c_2, \ldots$.

Wir definieren im Intervall $j = (-\infty, \infty)$ die Funktion p so:

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{\bar{y}(t)}{y(t)} & \text{für } t \neq c_\nu; \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots ; \\[2ex] \dfrac{\bar{y}'(c)}{y'(c)} & \text{für } t = c_\nu . \end{cases}$$

Es kann gezeigt werden, daß die Funktion p folgende Eigenschaften hat:

$\underline{1.}$ $p \neq 0$ für $t \in j$; $\quad$ $\underline{2.}$ $p\,\varphi(t) = p(t)$ für $t \in j$;

$\underline{3.}$ $p \in C_2$; $\quad$ $\underline{4.}$ $p'(c) = 0$; $\quad$ (2)

$\underline{5.}$ $$\int^{\varphi(c)} \left[\frac{1}{p^2(\sigma)} - \frac{1}{p^2(c)} \right] \frac{d\sigma}{y^2(\sigma)} = 0 .$$

Dazu wollen wir bemerken, daß der Wert der unter dem Integralzeichen stehenden Funktion an jeder Stelle c_ν im Hinblick auf die Formel

$$\lim_{\sigma \to c_\nu} \left[\frac{1}{p^2(\sigma)} - \frac{1}{p^2(c)} \right] \frac{1}{y^2(\sigma)} = - \frac{p''(c_\nu)}{p^3(c_\nu)\, y'^2(c_\nu)}$$

durch die rechte Seite dieser letzteren definiert ist. Daraus folgt die Stetigkeit der genannten Funktion im ganzen Intervall j.

Von diesen Überlegungen ausgehend kann nun bewiesen werden der folgende

SATZ. Alle Träger $\bar{q}$ von Dgln. $(\bar{q})$ mit der Fundamentaldispersion φ sind genau durch die folgende Formel gegeben:

$$\bar{q} = q + \frac{p''}{p} + 2\,\frac{y'}{p} \cdot \frac{p'}{y} ; \qquad (3)$$

q bedeutet den Träger einer beliebigen Dgl. (q) mit der Fundamentaldispersion φ, y ein Integral von (q) mit einer Nullstelle c und p eine beliebige Funktion im Intervall $j = (-\infty, \infty)$ mit den obigen Eigenschaften (2).

Zu diesem Resultat möchte ich die folgende Bemerkung hinzufügen.

Mehrere von meinen Mitarbeitern haben sich mit der Frage beschäftigt, alle oszillatorischen Dgln. (q) zu bestimmen, deren Integrale ihre Nullstellen π-äquidistant, d.h. in gleichen Abständen π, verteilt haben. Eine solche Dgl. stellt die Dgl. (-1) mit dem Träger $q(t) = -1$ dar. Unlängst hat H.P. NEUMAN für solche Träger [illegible] Formel aufgestellt. S[illegible] in [illegible] folgt aus [illegible] so:

Die in Frage stehenden Dgln. (q) mit π-äquidistant verteilten Nullstellen ihrer Integrale sind durch die lineare Form $\varphi(t) = t + \pi$ der Fundamentaldispersion charakterisiert. Unter diesen Dgln. befindet sich, wie gesagt, die Dgl. (-1), deren durch die Anfangswerte $y(c) = 0$, $y'(c) = 1$ bestimmtes Integral y die Funktion $y(t) = \sin(t-c)$ ist (c beliebig).

Wir setzen in der obigen Formel (3) $p(t) = p(c) \cdot \exp f(t)$ und erhalten das Resultat von H.P. Neumann:

Alle Träger $\bar{q}$ mit π-äquidistanten Nullstellen von Integralen sind genau durch die folgende Formel gegeben:

$$\bar{q}(t) = -1 + f'^2(t) + f''(t) + 2f'(t) \cdot \operatorname{ctg}(t-c) ,$$

wobei f folgende Eigenschaften hat:

$$f(t+\pi) = f(t), \quad f \in C_2, \quad f(c) = 0, \quad f'(c) = 0 .$$

$$\int_0^\pi \frac{\exp(-2f(\sigma)) - 1}{\sin^2(\sigma - c)} \, d\sigma = 0 .$$

Zu diesem Resultat sei noch bemerkt, daß man z.B.
$f(t) = \frac{1}{2} \log(1 - k \cdot \sin 2(t-c) \cdot \sin^2(t-c))$, k = Konst., $|k| < 1$ wählen darf. Es ist aber keinesfalls eine allzu einfache Form des Trägers $\bar{q}$ zu erwarten, da dieser letztere in jedem Inter-

vall $[x, x+\pi)$ wenigstens viermal den Wert -1 annehmen muß.

IV. Die allgemeine Transformationsformel und ihre physikalische Anwendung.

V. Ich komme nun auf das zweite, der allgemeinen Transformationstheorie entnommene Thema zu sprechen.

Ich betrachte zwei lineare Dgln. 2. Ordnung

$$(q) \qquad y'' = q(t)\,y\,, \qquad \ddot{Y} = Q(T)\,Y \qquad (Q)$$

in den beschränkten oder unbeschränkten (offenen) Intervallen $j = (a,b)$, $J = (A,B)$. Wir setzen voraus, daß die Träger dieser Dgln. in ihren Definitionsintervallen j, J stetig sind.

Das Transformationsproblem für die Dgln. (q), (Q) besteht darin, Funktionen $w(t)$, $X(t)$ zu bestimmen, die so beschaffen sind, daß für jedes Integral Y der Dgl. (Q) die Funktion

$$y(t) = w(t)\cdot Y[X(t)] \qquad (4)$$

eine Lösung der Dgl. (q) ist. Die Funktion X nennt man die transformierende Funktion der Dgln. (q), (Q), während w als der Multiplikator der Transformation $[w,X]$ bezeichnet wird.

Nun hat bereits Kummer in seiner eingangs erwähnten Abhandlung gezeigt, daß jede transformierende Funktion X der Dgln. (q), (Q) in ihrem Definitionsintervall $i \subset j$ eine Lösung der obigen nichtlinearen Dgl. 3. Ordnung (Qq) ist und ferner, daß der Multiplikator w vermöge der Funktion X bis auf eine multiplikative Konstante k ($\neq 0$) durch die Formel $w(t) = k : \sqrt{|X'(t)|}$ eindeutig bestimmt ist. Die Transformationsformel (4) hat also die Form

$$y(t) = k\,\frac{Y[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}}\,. \qquad (5)$$

Umgekehrt kann unschwer gezeigt werden, daß jede Lösung X der Dgl. (Qq) eine transformierende Funktion der Dgln. (q), (Q) darstellt.

Für die weitere Entwicklung dieser Theorie sind Fragen über Existenz von Lösungen der Dgl. (Qq) und über die Allgemeinheit dieser letzteren von entscheidender Bedeutung. Es ist mir natürlich nicht möglich, in diesem Vortrag auf Einzelheiten einzugehen. Deshalb will ich die Situation in großen Zügen und nur in dem für das folgende erforderlichen Ausmaß schildern.

Zu der Dgl. (Qq) sei zunächst bemerkt, daß das Symbol $\{X,t\}$ bekanntlich die Schwarzsche Ableitung der Funktion X an der Stelle t bedeutet:

$$\{X,t\} = \frac{1}{2}\,\frac{X'''(t)}{X'(t)} - \frac{3}{4}\,\frac{X''^2(t)}{X'^2(t)}$$

und ferner, daß im weiteren unter Lösungen X der Dgl. (Qq) stets nur Funktionen mit nicht verschiedenen ersten Ableitungen X' verstanden werden.

Es seien y, Y beliebige Integrale der Dgln. (q), (Q). Ferner seien $t_0 \in j$, $X_0 \in J$ beliebige Stellen, an denen die Werte $Y(t_0)$, $Y(X_0)$ von Null verschieden sind und dasselbe Vorzeichen besitzen. Sodann gibt es genau eine wachsende und genau eine abnehmende breiteste Lösung X der Dgl. (Qq), vermöge deren ein Teil des Integrals Y in einen solchen des Integrals y im Sinne der mit k = 1 gebildeten Formel (5) transformiert wird. Das Adjektiv "breiteste" drückt aus, daß die durch die Lösung X bestimmte Kurve $[t, X(t)]$ von Rand zu Rand des rechteckigen Bereiches $j \times J$ verläuft.

Wir betrachten nun eine solche breiteste Lösung X der Dgl. (Qq). Da die Ableitung X' stets von Null verschieden ist, so gibt es die zu X(t) inverse Funktion x(T). Wir nennen zwei vermöge von $T = X(t)$, $t = x(T)$ zusammenhängende Stellen $t \in j$, $T \in J$ homolog. Offenbar besteht an je zwei homologen Stellen $t \in j$, $T \in J$ die Beziehung: $X'(t) \cdot \dot{x}(T) = 1$.

Nun gilt, wie wir wissen, die mit k = 1 gebildete Formel (5). Aus ihr folgt unmittelbar für je zwei ho ologe Stelle $t \in j$, $T \in J$ die Beziehung:

$$\sqrt[4]{|X'(t)|}\cdot y(t) = \sqrt[4]{|\dot{x}(T)|}\cdot Y(T) \quad . \qquad (6)$$

Mit der Angabe dieser Formel wollen wir unsere Betrachtungen über die Transformationstheorie abschließen und zu einer physikalischen Anwendung der Formel (6) übergehen.

8. Wir betrachten zwei physikalische Räume I und II. In diesen Räumen seien die Zeiten während gewisser (offener) Zeitintervalle i bzw. I an Uhren [I] bzw. [II] gemessen. Wir nehm n an, die Uhren [I], [II] seien in ihrem Gang vermö e ẋ ei in d n Intervallen i, I definierten und gegenseitig i ers n Funkti n $X(t)$, $t \in i$, d $x(T)$, $T \in I$ aufeinander abgestimmt: In j d m an d r Uhr [I] g ssen n Auge blick $t \in i$ z igt die Uhr [II] die Z it $T = X(t)$ $(\in I)$ an; oder mit ren Worten: In j dem an der Uhr [II] gem ssenen Augenbli $T \in I$ zeigt die Uhr [I] die Zeit $t = x(T)$ $(\in i)$ an. Wir n n n X bzw. x die Zeitf ktionen für den Raum [II] bzw. [I]. Im Hi lick auf die f lgende Anwe dung setzen wir voraus, ß d e e Zeitfunktionen der Klasse C_3 ange ören und ihre Abl itungen X', $\dot{x}$ st ts > 0 sind. Sod n ist es sinnvoll, von d r Zeitgesch indigkeit $X'(t)$ und Zeitbeschleunigung $X''(t)$ im Raume II im Augenblick t $(\in i)$ zu sprechen und desgl ichen von der Zeitgeschwindigkeit $\dot{x}(t)$ und Zeit eschleunigung $\ddot{x}(T)$ im R e I im Augen lick T $(\in I)$. Zwei (h molo e) Augenblicke $t \in i$ un $T = X(t) \in I$, oder mit anderen Worten: $T \in I$ und $t = x(T) \in i$, wollen wir als gleichzeitig bezeichnen.

Nun seien in den Räumen I, II orientierte Geraden G_I, G_{II}, auf denen sich zwei Punkte P_I, P_{II} bewegen, gegeben. Auf jeder von diesen Geraden sei ein fester Punkt O_I bzw. O_{II}, der Nullpunkt, festgelegt. Von ihm aus werden die jeweiligen Abstände der Punkte P_I, P_{II} gemessen, und zwar positiv in positiver und negativ in negativer Richtung der entsprechenden Geraden.

Wir nehmen nun an, die Bewegung der Punkte P_I, P_{II} seien durch beliebige Dgln. (q) und (Q) geregelt, und zwar so:

Es seien für beliebige Augenblicke $t_o \in j$, $T_o \in J$, vermöge gewisser Abstände y_o, Y_o von den Nullpunkten O_I, O_{II}, die Lagen der Punkte P_I, P_{II} auf den Geraden G_I, G_{II} und ferner ihre Geschwindigkeiten y_o', $\dot{Y}_o$ gewählt. Sodann erfolgen die Bewegungen der Punkte P_I, P_{II} nach den durch die Anfangswerte $y(t_o) = y_o$, $y'(t_o) = y_o'$ und $Y(T_o) = Y_o$, $\dot{Y}(T_o) = \dot{Y}_o$ bestimmten Integralen $y(t)$, $Y(T)$ der Dgln. (q), (Q). Die Lage des Punktes P_I in jedem Augenblick $t \in j$ ist also durch seinen Abstand $y(t)$ vom Nullpunkt O_I gegeben, und zwar ist $y(t) > 0$ oder $y(t) < 0$ oder $y(t) = 0$, je nachdem, ob sich der Punkt P_I in positiver oder negativer Richtung vom Nullpunkt O_I befindet oder durch diesen letzteren hindurchgeht. Ähnliches gilt natürlich vom Punkt P_{II}. Wenn z.B. die Dgln. (q), (Q) oszillatorisch sind, so schwingen die Punkte P_I, P_{II} stets um die Nullpunkte O_I, O_{II} herum.

Wir nehmen z.B. $y(t_o) > 0$, $Y(T_o) > 0$ an. Wir wissen, daß es genau eine (z.B.) wachsende breiteste Lösung X der Dgl. (Qq) gibt, die an der Stelle t_o den Wert T_o annimmt, vermöge deren ein Teil des Integrals Y in einen solchen des Integrals y im Sinne der mit $k = 1$ gebildeten Formel (5) transformiert wird. Mit I bzw. i wollen wir die Definitionsintervalle der in Frage stehenden Teile der Integrale Y bzw. y bezeichnen. Sodann gilt für die Funktion X und die zu ihr inverse Funktion x an je zwei homologen Stellen $t \in i$, $T \in I$ die Beziehung (6).

Wir wählen nun die Funktion X bzw. x während des Zeitintervalls i bzw. I zur Zeitfunktion für den Raum II bzw. I. Außerdem wählen wir die Längeneinheit im Raume I in jedem Augenblick t ($\in$ i) der vierten Wurzel der entsprechenden Zeitgeschwindigkeit im Raume II gleich, also $\sqrt[4]{X'(t)}$, und analog diejenige im Raume II gleich $\sqrt[4]{\dot{x}(T)}$.

Sodann sind nach der Formel (6) die gleichzeitigen Abstände der Punkte P_I, P_{II} von den Nullpunkten O_I, O_{II} stets dieselben, oder mit anderen Worten: Die Bewegungen der Punkte P_I, P_{II} sind während der Zeitintervalle i, I di s lben.

Wir fassen dieses Resultat kurz zusammen:

In physikalischen Räumen sind bei geeigneten Zeit- und Längenmessungen alle geradlinigen durch beliebige Dgln. 2. Ordnung geregelten Bewegungen einander gleich.

Wendet man diese Theorie insbesondere auf geradlinige harmonische, d.h. durch die mit beliebigen Konstanten $\omega > 0$, $\Omega > 0$ gebildeten Dgln.

$$(q) \qquad y'' = -\omega^2 y\,, \qquad \ddot{Y} = -\Omega^2 Y \qquad (Q)$$

geregelte Bewegungen an, so kommt man zu diesem Ergebnis:

Geradlinige harmonische Bewegungen zweier Punkte in physikalischen Räumen sind bei geeignetem gleichförmigem Zeitverlauf und passend gewählten konstanten Längeneinheiten in beiden Räumen dieselben.

Zum Abschluß dieses Vortrages erlaube ich mir anzuführen, daß der hier behandelte Stoff meinem Buche "Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung", das im Laufe des nächsten Jahres 1967 bei dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften zu Berlin erscheinen soll, entnommen ist. Dieses Buch enthält eine systematische Bearbeitung meiner eingangs erwähnten Transformationstheorie der linearen Dgln. 2. Ordnung.

Verfasser: Prof. Dr. Ottokar Boruvka, Brno (CSSR),
Janáckovo nám. 2a