Otakar Borůvka

Sur quelques propriétés de structure du groupe des phases des équations différentielles linéaires du deuxième ordre

Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 15, 1970, 1345-1356

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500136

Hommage au professeur
G. VRANCEANU
à l'occasion de son 70e anniversaire

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DE STRUCTURE DU GROUPE DES PHASES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU DEUXIÈME ORDRE

PAR

O. BORŮVKA

(Brno)

Dans le groupe des phases des équations différentielles linéaires du deuxième ordre, $\mathfrak{G}$, le centre du sous-groupe formé par les phases-éléments du sous-groupe fondamental qui sont croissantes est un groupe monogène. On étudie les propriétés de structure du groupe $\mathfrak{G}$ en relation avec le centre en question.

Dans la théorie des équations différentielles ordinaires linéaires et oscillatoires du deuxième ordre d'importantes notions d'origine analytique interviennent en relation avec des figures de caractère algébrique. La composante algébrique de la théorie en question concerne les propriétés de structure du groupe des phases des équations envisagées. Rappelons qu'on considère les équations en question sous forme jacobienne (q) $y'' = q(t)y$, le porteur $q(t)$ étant continu pour $t \in (-\infty, \infty)$. Le groupe des phases, $\mathfrak{G}$, est formé par les (premières) phases de toutes les équations (q). Parmi les figures de structure de $\mathfrak{G}$ une place privilégiée occupe le sous-groupe de $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{E}$, appelé fondamental, consistant en toutes les phases de l'équation (-1). Son importance s'attache à ceci que, toute classe-élément de la décomposition à droite $\mathfrak{G}/_d\mathfrak{E}$ est formée par les phases précisément d'une équation (q) bien déterminée.

Dans le présent article on étudie des notions qui s'attachent au centre du sous-groupe de $\mathfrak{G}$ formé par les éléments croissants de $\mathfrak{E}$. On démontre que ce centre, $\mathfrak{Z}$, est le groupe monogène engendré par la fonction $c(t) = t + \pi$. On trouve que différents éléments de la théorie, de nature apparemment distincte, représentent en réalité des figures dérivées du centre $\mathfrak{Z}$.

REV. ROUM. MATH. PURES ET APPL., TOME XV, No 9, P. 1345–1356, BUCAREST, 1970

L'article consiste en deux parties dont la première est conçue de manière à fournir la base algébrique pour la théorie analytique qui fait l'objet de la seconde partie.

1. *Généralités.* Soit $\mathfrak{G}$ un groupe (abstrait) quelconque, $x, a, b, \ldots \in \mathfrak{G}$ des éléments, $(\emptyset \neq)$ $X, A, B, \ldots \subset \mathfrak{G}$ des sous-ensembles et $\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots \subset \mathfrak{G}$ des sous-groupes de $\mathfrak{G}$.

La relation

$$x^{-1}ax = b$$

s'exprime en termes que l'élément x transforme a en b; ou bien que l'élément b est transformé de a par x; ou bien, finalement, que l'élément b est conjugué de a par x.

On exprime en termes analogues les relations

$$x^{-1}Ax = B, \qquad x^{-1}\,\mathfrak{A}x = \mathfrak{B}.$$

2. *Transformations des groupes monogènes.* Considérons dans $\mathfrak{G}$ deux sous-groupes monogènes (supposés existants)

$$\mathfrak{Z}_a = \{\ldots, a^{-2}, a^{-1}, 1, a, a^2, \ldots\}, \; \mathfrak{Z}_b = \{\ldots, b^{-2}, b^{-1}, 1, b, b^2, \ldots\};$$
le groupe $\mathfrak{Z}_a$ est par conséquent engendré par a ou bien a^{-1}, tandis que le groupe $\mathfrak{Z}_b$ par b ou bien b^{-1}. Rappelons que les éléments a, a^{-1} sont les deux générateurs du groupe $\mathfrak{Z}_a$ tandis que b, b^{-1} sont ceux de $\mathfrak{Z}_b$.

THÉORÈME. *Pour qu'un élément $x \in \mathfrak{G}$ transforme le sous-groupe $\mathfrak{Z}_a$ en $\mathfrak{Z}_b$, il faut et il suffit qu'il transforme l'un des générateurs a, a^{-1} de $\mathfrak{Z}_a$ en un générateur b, b^{-1} de $\mathfrak{Z}_b$.*

Démonstration. a. Admettons qu'on ait

(1) $$x^{-1}\,\mathfrak{Z}_a\,x = \mathfrak{Z}_b.$$

On a alors, μ, ν $(= 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ étant des entiers convenables,

$$x^{-1}\,a\,x = b^{\mu}, \; x^{-1}\,a^{\nu}\,x = b.$$

Il en résulte

$$x^{-1}\,a\,x = x^{-1}\,a^{\mu\nu}\,x,$$

$$\mu\nu = 1,$$

de sorte qu'on a $\mu = \nu = 1$ ou bien $\mu = \nu = -1$.

Dans le premier cas l'élément x transforme a en b et, en même temps, a^{-1} en b^{-1}; dans le second cas l'élément x transforme a en b^{-1} et, en même temps, a^{-1} en b.

b. Admettons que l'élément x transforme le générateur a^{ε} du groupe $\mathfrak{Z}_a$ en générateur b^{η} de $\mathfrak{Z}_b$ $(\varepsilon, \eta = \pm 1)$.

On a alors

$$x^{-1}\ a^{\varepsilon'} x = b^{\eta}$$

et puis

$$x^{-1}\ a^{\varepsilon\mu}\ x = b^{\eta\mu}$$

pour $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Subsiste, par conséquent, la formule (1), ce qui achève la démonstration.

On voit par conséquent que la relation $x^{-1}\ \mathfrak{Z}_a\ x = \mathfrak{Z}_b$ a lieu si et seulement si l'une des formules suivantes se trouve vérifiée :

$$x^{-1}\, ax = b, \quad x^{-1}\, a^{-1}\, x = b, \quad x^{-1}\, ax = b^{-1}, \quad x^{-1}\, a^{-1}\, x = b^{-1}.$$

Il est évident qu'il suffit de considérer les deux premières formules. Dans le premier cas on a $x^{-1}\, a^{\nu}\, x = b^{\nu}$, tandis que dans le second $x^{-1}\, a^{-\nu}\, x = b^{\nu}$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

3. *Transformations d'un groupe monogène en lui-même.* Considérons à présent le cas particulier où le groupe $\mathfrak{Z}_b$ coïncide avec $\mathfrak{Z}_a$: $\mathfrak{Z}_b = \mathfrak{Z}_a$. Pour simplifier l'écriture nous écrivons $\mathfrak{Z}$ au lieu de $\mathfrak{Z}_a$.

On a alors la proposition suivante :

Pour qu'un élément $x \in \mathfrak{G}$ transforme le sous-groupe $\mathfrak{Z}$ en lui-même il faut et il suffit qu'il transforme le générateur a ou bien son inverse a^{-1} en a.

Dans le premier cas on a

$$x^{-1}\, a^{\nu}\, x = a^{\nu} \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Cette formule entraîne que l'élément x soit échangeable avec tout élément $a^{\nu} \in \mathfrak{Z}$ et se trouve par conséquent contenu dans le centralisateur, $\mathfrak{A}$, du sous-groupe $\mathfrak{Z}$.

Dans le second cas on a

$$x^{-1}\ a^{-\nu}\ x = a^{\nu}$$

de sorte que, l'élément x est inversement échangeable avec tout élément $a^{\nu} \in \mathfrak{Z}$: $xa^{\nu} = a^{-\nu}\, x$. Dans ce cas x se trouve contenu dans l'inverteur, I, du sous-groupe $\mathfrak{Z}$. Nous appelons *inverteur* d'un sous-groupe $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ l'ensemble formé par les éléments $x \in \mathfrak{G}$ qui sont inversement échangeables avec tout élément de $\mathfrak{B}$.

On a, évidemment,

$$\mathfrak{A} \cap I = \emptyset.$$

Le normalisateur du sous-groupe $\mathfrak{Z}$ dans $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}$, consiste, rappelons-le, en tous les éléments $x \in \mathfrak{G}$, qui transforment le sous-groupe $\mathfrak{Z}$ en lui-même. $\mathfrak{N}$ est le plus grand sous-groupe de $\mathfrak{G}$ dans lequel $\mathfrak{Z}$ résulte invariant.

Les résultats précédents démontrent la formule

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{A} \vee I. \tag{2}$$

On se rend facilement compte que, le centralisateur $\mathfrak{A}$ est un sous-groupe invariant de $\mathfrak{N}$ et d'indice 2. Le groupe-quotient $\mathfrak{N}/\mathfrak{A}$ consiste par conséquent en les deux classes $\mathfrak{A}$, I.

Convenons d'écrire pour $x \in \mathfrak{N}$: $\operatorname{sgn} x' = 1$ $(\operatorname{sgn} x' = -1)$ si $x \in \mathfrak{A}$ $(x \in I)$. On a alors pour des éléments quelconques $x, y \in \mathfrak{N}$ la formule

$$\operatorname{sgn} (xy)' = \operatorname{sgn} x' \,.\, \operatorname{sgn} y'. \tag{3}$$

Avec cette écriture et en vertu de (2) on trouve pour $x \in \mathfrak{N}$ la formule

$$x^{-1} a^{\nu} x = a^{\nu \operatorname{sgn} x'} \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{4}$$

4. *Transformations des sous-groupes de* $\mathfrak{Z}$. Il est bien connu que les sous-groupes de $\mathfrak{Z}$ sont précisément les groupes monogènes engendrés par les différents éléments $(\neq 1)$ de $\mathfrak{C}$. Pour un entier non nul quelconque, n, nous désignons par $\mathfrak{Z}_n$ le sous-groupe de $\mathfrak{Z}$ engendré par l'élément a^n :

$$\mathfrak{Z}_n = \{\ldots, a^{-2n}, a^{-n}, 1, a^n, a^{2n}, \ldots\}.$$

On a, évidemment, $\mathfrak{Z}_{-n} = \mathfrak{Z}_n$ ce qui permet de supposer $n > 0$.

En vertu des considérations précédentes subsiste la proposition suivante :

Pour qu'un élément $x \in \mathfrak{G}$ transforme le sous-groupe $\mathfrak{Z}_m$ en $\mathfrak{Z}_n$ $(m, n > 0)$ il faut et il suffit que l'une des formules se trouve vérifiée

$$x^{-1} a^m x = a^n, \quad x^{-1} a^{-m} x = a^n. \tag{5}$$

Dans le premier cas on a $x^{-1} a^{m\nu} x = a^{n\nu}$ tandis que dans l'autre $x^{-1} a^{-m\nu} x = a^{n\nu}$ $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

En ce qui concerne les transformations du sous-groupe $\mathfrak{Z}_n$ en lui-même on voit qu'un élément $x \in \mathfrak{G}$ réalise cette transformation alors et seulement alors s'il se trouve contenu dans le centralisateur ou bien dans l'inverteur de $\mathfrak{Z}_n$.

Si l'on désigne par $\mathfrak{N}_n$, $\mathfrak{A}_n$, I_n le normalisateur resp. centralisateur, inverteur de $\mathfrak{Z}_n$ dans $\mathfrak{G}$ on a les formules

$$\mathfrak{N}_n = \mathfrak{A}_n \vee I_n, \; \mathfrak{A}_n \cap I_n = \emptyset$$

et de plus

$$\mathfrak{N}_n \supset \mathfrak{N}, \; \mathfrak{A}_n \supset \mathfrak{A}, \; I_n \supset I.$$

Subsiste, naturellement, pour deux éléments quelconques $x, y \in \mathfrak{N}_*$ une formule telle que (3).

II

5. *Introduction.* Dans cette partie nous allons appliquer les considérations précédentes dans la théorie des équations différentielles ordinaires linéaires et oscillatoires du deuxième ordre. Nous supposons les équations en question sous forme jacobienne

$$\text{(q)} \qquad y'' = q(t)\, y,$$

le coefficient q, appelé par occasion *porteur* de l'équation (q), étant une fonction continue dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty) : q(t) \in C_j^0$.

Remarquons qu'une équation (q) s'appelle oscillatoire si toute intégrale de (q) admet infiniment beaucoup de zéros vers les deux extrémités de l'intervalle j. On sait qu'une équation (q) résulte oscillatoire si et seulement si ses (premières) phases sont inférieurement et supérieurement non bornées. On entend sous une (première) phase de l'équation (q) toute fonction continue $\alpha(t)$, $t \in j$, satisfaisant en dehors des zéros de la fonction $v(t)$ à la relation $\operatorname{tg} \alpha(t) = u(t) : v(t)$, u, v étant une base de l'équation (q), c'est-à-dire un couple ordonné d'intégrales linéairement indépendantes de (q).

Rappelons qu'une phase $\alpha(t)$ de (q) s'appelle *élémentaire* si elle satisfait à la relation $\alpha(t + \pi) = \alpha(t) + \pi \operatorname{sgn} \alpha'$.

On appelle fonction-phase toute fonction $\alpha(t)$ définie dans l'intervalle j et vérifiant dans cet intervalle les conditions suivantes :

$$1.\ \alpha(t) \in C_j^3; \quad 2.\ \alpha'(t) \neq 0; \quad 3.\ \lim_{t \to \varepsilon\infty} \alpha(t) = \varepsilon \infty \operatorname{sgn} \alpha' \ (\varepsilon = \pm 1).$$

On sait que toute phase d'une équation (q) est une fonction-phase et inversement, toute fonction-phase $\alpha(t)$ représente une phase de l'équation (q) dont le porteur est donné par la formule

$$(6) \qquad q(t) = -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t);$$

le symbole $\{\alpha, t\}$ désigne, naturellement, la dérivée schwarzienne de la fonction α au point t

$$\{\alpha, t\} = \frac{1}{2} \frac{\alpha'''(t)}{\alpha'(t)} - \frac{3}{4} \frac{\alpha''^2(t)}{\alpha'^2(t)}.$$

En vertu de cette propriété des fonctions-phases on parle souvent des phases au lieu des fonctions-phases.

Dans la théorie qui nous occupe la notion fondamentale est celle du groupe des phases.

On appelle groupe des phases, $\mathfrak{G}$, le groupe formé par toutes les fonctions-phases et dont la multiplication est donnée par la composition de fonctions. On constate facilement que, la figure en question représente, en effet, un groupe dont l'élément neutre est la fonction-phase t.

Rappelons les faits suivants qui interviennent dans nos considérations ultérieures.

Les fonctions-phases qui sont croissantes forment un sous-groupe de $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_0$, qui résulte invariant dans $\mathfrak{G}$ et dont l'indice est 2. L'autre classe-élément du groupe-quotient $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$, $\mathcal{G}_1$ consiste en fonctions-phases décroissantes.

Les phases de l'équation (-1), c'est-à-dire de l'équation $y'' \quad -y$, forment un sous-groupe de $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{E}$, appelé le sous-groupe fondamental. Son importance s'attache à ceci : Pour toute équation (q), les phases de (q) forment précisément une classe-élément de la décomposition à droite $\mathfrak{G}/_d\mathfrak{E}$ et, inversement, les fonctions-phases contenues dans une telle classe représentent les phases précisément d'une équation (q) qui est déterminée par une formule telle que (6), $\alpha(t)$ étant n'importe quel élément de la classe en question.

Les phases élémentaires des différentes équations (q) constituent un sous-groupe de $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, appelé groupe des phases élémentaires. On a $\mathfrak{H} \supset \mathfrak{E}$.

6. *Détermination du centre $\mathfrak{Z}$ du groupe $\mathfrak{G}_0 \cap \mathfrak{E}$.* Nous allons démontrer le

THÉORÈME. *Le centre $\mathfrak{Z}$ du groupe $\mathfrak{G}_0 \cap \mathfrak{E}$ est le groupe monogène engendré par la fonction-phase $c(t) = t + \pi$*

$$\mathfrak{Z} - \{\ldots, t - 2\pi,\ t - \pi, t, t + \pi,\ t + 2\pi,\ \ldots\}.$$

Démonstration. Considérons deux éléments quelconques $\varepsilon(t)$, $\zeta(t) \in \in \mathfrak{G}_0 \cap \mathfrak{E}$. Comme ces éléments appartiennent au sous-groupe $\mathfrak{E}$, ils constituent, d'après (6) $(q(t) = -1)$, des solutions de l'équation de Kummer

$$(-1, -1) \qquad - \{X, t\} - X'^2(t) = -1$$

et transforment, par conséquent, toute intégrale de l'équation (-1) encore en une intégrale de cette équation ([1], p. 188).

Nous considérons en particulier les intégrales $\sin t$, $\cos t$ et désignons par $i(t)$ le vecteur défini par ces composantes :

$i(t) = \begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$. Comme les fonctions $\varepsilon(t)$, $\zeta(t)$ appartiennent à $\mathfrak{G}_0$, leurs dérivées ε', ζ' sont toujours positives et nous avons les formules

$$(7) \qquad \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'(t)}}\, i\,[\varepsilon(t)] = (e_{jk})\, i(t),\ \frac{1}{\sqrt{\zeta'(t)}}\, i\,[\zeta(t)] = (z_{jk})\, i(t);$$

(e_{jk}), (z_{jk}) représentent des matrices réelles d'ordre 2 à déterminants égaux à 1 : $\det(e_{jk}) = 1$, $\det(z_{jk}) = 1$. Inversement, si l'on choisit arbitrairement des matrices (e_{jk}), (z_{jk}) jouissant des propriétés en question, il leur correspondent des fonctions-phases $\varepsilon(t)$, $\xi(t) \in \mathfrak{G}_0 \cap \mathfrak{E}$ vérifiant les formules (7).

Or, les formules (7) entraînent

$$\frac{1}{\sqrt{[\varepsilon\zeta(t)]}}\, i\,[\varepsilon\zeta(t)] = (e_{jk})\,(z_{jk})\, i(t), \quad \frac{1}{\sqrt{[\zeta\varepsilon(t)]}}\, i\,[\zeta\varepsilon(t)] = (z_{jk})\,(e_{jk})\, i(t). \tag{8}$$

Soit maintenant $\zeta(t) \in \mathfrak{Z}$. L'élément $\zeta(t)$ est par conséquent échangeable avec tout élément $\varepsilon(t) \in \mathfrak{G}_0 \cap \mathfrak{E}$ et l'on a, d'après (8),

$$(e_{jk})\,(z_{jk}) = (z_{jk})\,(e_{jk}).$$

Cette relation s'exprime par quatre relations portant sur les nombres e_{jk}, z_{jk}, relations, qui se réduisent aux trois suivantes :

$$e_{12}\, z_{21} = z_{12}\, e_{21},$$

$$e_{12}\,(z_{11} - z_{22}) = z_{12}\,(e_{11} - e_{22}),$$

$$e_{21}\,(z_{11} - z_{22}) = z_{21}\,(e_{11} - e_{22}).$$

Si nous choisissons $e_{11} = e_{22} = 1$, $e_{12} = 0$, $e_{21} = 1$ et puis $e_{11} = e_{22} = 1$, $e_{12} = 1$, $e_{21} = 0$ nous avons

$$z_{11} = z_{22}\,(\neq 0), \quad z_{12} = z_{21} = 0.$$

Cela entraîne, d'après la seconde formule (7)

$$\operatorname{tg} \zeta(t) = \operatorname{tg} t$$

et puis

$$\zeta(t) = t + \nu\pi, \tag{9}$$

ν étant un entier convenable indépendant, évidemment, de t.

Il reste à montrer que, pour tout entier ν, la phase telle que (9) représente un élément de $\mathfrak{Z}$.

Dans ce but choisissons arbitrairement un entier ν et posons $(c^{\nu}(t) =)$ $c_{\nu}(t) = t + \nu\pi$. Soit alors $\varepsilon(t) \in \mathfrak{G}_0 \cap \mathfrak{E}$ une phase quelconque. Cette phase étant élémentaire et croissante nous avons $\varepsilon(t + \pi) = \varepsilon(t) + \pi$ et il en résulte $\varepsilon(t + \nu\pi) = \varepsilon(t) + \nu\pi$, c'est-à-dire $\varepsilon c_{\nu}(t) = c_{\nu}\,\varepsilon(t)$. Nous avons par conséquent $c_{\nu}(t) \in \mathfrak{Z}$ ce qui achève la démonstration.

Dans la suite nous conservons la signification des symboles $c(t)$ $(= t + \pi)$, c_ν $(= c^\nu)$, $\nu (= 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ en posant, en particulier, $c_0 = c^0 = 1$, $c_1 = c$. Nous avons alors

$$\mathfrak{Z} = \{\ldots, c_{-2}, c_{-1}, 1, c_1, c_2, \ldots\}.$$

De même, nous conservons pour le groupe actuel $\mathfrak{Z}$ la signification des symboles $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{A}$, I introduits dans le N° 3 et, plus généralement, celle des symboles $\mathfrak{Z}_n$, $\mathfrak{N}_n$, $\mathfrak{A}_n$, I_n considérés dans le N° 4 ($n \geqslant 1$ entier).

7. *Figures de structure du groupe* $\mathfrak{G}$ *attachées au centre* $\mathfrak{Z}$. Nous allons indiquer, dans ce N°, quelques figures de structure du groupe des phases qui sont étroitement liées au centre $\mathfrak{Z}$.

1. *Le système formé par les phases d'une base u, v d'une équation* (q) *est la classe-élément* $\mathfrak{Z}\alpha$ *de la décomposition à droite* $\mathfrak{G}/_d\mathfrak{Z}$, α *étant une phase arbitraire de u, v. Inversement, toute classe-élément de la décomposition en question,* $\mathfrak{Z}\alpha$, *constitue le système des phases de la base* $u(t) = \sin\alpha(t) : \sqrt{|\alpha'(t)|}$, $v(t) = \cos\alpha(t) : \sqrt{|\alpha'(t)|}$ *de l'équation* (q) *déterminée par la formule telle que* (6).

On démontre cette proposition en se rappelant que, le système formé par les phases d'une base u, v d'une équation (q) consiste en phases $\alpha(t) + \nu\pi$ $(= c_\nu\alpha(t))$, α étant une phase arbitraire de u, v.

2. *Le groupe monogène formé par les dispersions centrales (de première espèce)* $\varphi_\nu(t)$ *d'une équation* (q) *est le groupe conjugué du centre* $\mathfrak{Z}$ *par une phase arbitraire* α *de l'équation en question.*

En effet, $\varphi_\nu(t)$ étant la dispersion centrale d'indice ν d'une équation (q) admettant la phase α, on a la relation abelienne $\alpha\varphi_\nu(t) = \alpha(t) + \nu\pi \operatorname{sgn}\alpha'$ $(= c_{\nu \cdot \operatorname{sgn}\alpha'}\, \alpha(t))$ qui, à son tour, caractérise la fonction φ_ν ([1], p. 119). On a par conséquent $\varphi_\nu(t) = \alpha^{-1}\, c_{\nu \cdot \operatorname{sgn}\alpha'}\, \alpha(t)$, ce qui démontre la proposition.

3. *Le groupe des phases élémentaires est précisément le normalisateur de* $\mathfrak{Z}$.

En effet, $\alpha \in \mathfrak{G}$ étant une phase élémentaire, on a (1) $\alpha(t + \pi) = \alpha(t) + \pi \operatorname{sgn}\alpha'$, c'est-à-dire (2) $\alpha c(t) = c_{\operatorname{sgn}\alpha'}\, \alpha(t)$. On a, par conséquent, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ou bien $\alpha \in I$ suivant que $\operatorname{sgn}\alpha' = 1$ ou bien $= -1$. Inversement, toute phase $\alpha \in \mathfrak{N}$ satisfait à la relation (2), c'est-à-dire à (1), ce qui montre qu'elle résulte élémentaire.

8. *Forme canonique des éléments de* $\mathfrak{N}_n$. Nous allons démontrer la proposition suivante :

Pour qu'une fonction-phase $\gamma \in \mathfrak{G}$ *soit contenue dans* $\mathfrak{N}_n$ *il faut et il suffit qu'elle puisse être mise sous la forme*

$$\gamma(t) = t\varepsilon + G_n(t), \tag{10}$$

ε étant ± 1, et $G_n(t)$ une fonction de classe C_j^3, périodique avec $n\pi$ et telle que

$$\operatorname{sgn}[\varepsilon + G_n'(t)] = \varepsilon \qquad (t \in j) \tag{11}$$

On a $\gamma \in \mathfrak{A}_n$ ou $\gamma \in I_n$, suivant que $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$.

Démonstration. Admettons d'abord qu'un élément $\gamma \in \mathfrak{G}$ ait la forme (10). Nous avons alors

$$\gamma(t + n\pi) = (t + n\pi)\,\varepsilon + G_n(t + n\pi) = t\varepsilon + G_n(t + n\pi) + n\pi\varepsilon = \\ = \gamma(t) + n\pi\varepsilon.$$

Il en résulte $\gamma \in \mathfrak{A}_n$ ou bien $\gamma \in I_n$ suivant que $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$.

En second lieu soit $\gamma \in \mathfrak{N}_n$ et, par conséquent,

$$\gamma(t + n\pi) = \gamma(t) + n\pi\varepsilon, \quad \operatorname{sgn}\gamma'(t) = \varepsilon, \tag{12}$$

ε étant 1 ou -1, suivant que $\gamma \in \mathfrak{A}_n$ ou $\gamma \in I_n$.

Choisissons une fonction-phase quelconque $\gamma_0(t) \in \mathfrak{N}_n$ telle que sgn $\gamma_0'(t) = \varepsilon$. On peut prendre, par exemple, $\gamma_0(t) = t\varepsilon$. La fonction $\gamma_0(t)$ vérifiant une relation telle que (12), nous avons

$$\gamma(t + n\pi) - \gamma_0(t + n\pi) = \gamma(t) - \gamma_0(t).$$

La fonction

$$G_n(t) = \gamma(t) - \gamma_0(t)$$

jouit, évidemment, des propriétés ci-dessus : $G_n(t) \in C_j^3$, $G_n(t + n\pi) = G_n(t)$, et l'on a

$$\gamma(t) = \gamma_0(t) + G_n(t) \qquad (t \in j) \tag{13}$$

et encore

$$\operatorname{sgn}[\gamma_0'(t) + G_n'(t)] = \varepsilon. \tag{14}$$

Avec le choix $\gamma_0(t) = t\varepsilon$ les formules (13), (14) deviennent (10), (11), ce qui achève la démonstration.

9. *Transformations du sous-groupe $\mathfrak{Z}_m$ sur $\mathfrak{Z}_n$.* Soient $m, n \geqslant 1$ d'arbitraires entiers.

Nous allons à présent déterminer quelques propriétés caractéristiques de ces fonctions-phases qui transforment le sous-groupe $\mathfrak{Z}_m$ sur $\mathfrak{Z}_n$.

1. *Toutes les fonctions-phases qui transforment le sous-groupe $\mathfrak{Z}_m$ sur $\mathfrak{Z}_n$ sont précisément les phases des équations* (q) *dont la dispersion centrale $\varphi_m(t)$ a la forme*

$$\varphi_m(t) = t + n\pi. \tag{15}$$

Démonstration. Si une fonction-phase $\xi \in \mathfrak{G}$ transforme le sous-groupe $\mathfrak{Z}_m$ sur $\mathfrak{Z}_n$ on a

$$\xi(t + n\pi) = \xi(t) + m\pi \operatorname{sgn} \xi' = \xi\varphi_m(t) \tag{16}$$

et il en résulte (15).

Inversement, s'il subsiste, pour une équation (q) la formule (15) et que ξ représente une phase de cette équation on a encore des relations telles que (16) et par conséquent $\xi^{-1} c_{m \cdot \operatorname{sgn} \xi'} \xi = c_n$ ce qui achève la démonstration.

Le résultat que nous venons d'obtenir peut être étendu de façon à caractériser les équations (q) admettant les intégrales périodiques.

2. *Toutes les fonctions-phases qui transforment le sous-groupe $\mathfrak{Z}_m$ sur $\mathfrak{Z}_n$ constituent les phases des équations* (q) *dont les intégrales sont périodiques avec $n\pi$ ou $2n\pi$ suivant que m est pair ou impair.*

Si les intégrales d'une équation (q) *sont périodiques avec $n\pi$, la dispersion centrale φ_m de* (q), *d'indice pair convenable, m, résulte de la forme* (15).

Démonstration. Soit (q) une équation d'espèce considérée et u, v d'arbitraires intégrales de (q), linéairement indépendantes.

a. Si une fonction-phase $\xi \in \mathfrak{G}$ transforme le sous-groupe $\mathfrak{Z}_m$ sur $\mathfrak{Z}_n$, subsiste une formule telle que (15) et l'on a ([1], p. 114)

$$u(t + n\pi) = u\,\varphi_m(t) = (-1)^m \sqrt{\varphi_m'(t)} \cdot u(t) = (-1)^m u(t).$$

On observe que l'intégrale u résulte périodique avec $n\pi$ ou $2n\pi$ suivant que m est pair ou impair.

b. Si les intégrales u, v sont périodiques avec $n\pi$ et si ξ est une phase de la base u, v on a

$$u(t + n\pi) = u(t), \; v(t + n\pi) = v(t)$$

et puis : $\operatorname{tg} \xi(t + n\pi) = \operatorname{tg} \xi(t)$. Il en résulte

$$\xi(t + n\pi) = \xi(t) + m\pi \cdot \operatorname{sgn} \xi' = \xi\varphi_m(t), \; \varphi_m(t) = t + n\pi,$$

m étant un entier convenable nécessairement pair (d'après a).

Les résultats précédents permettent de déterminer de façon explicite toutes les fonctions-phases transformant le sous-groupe $\mathfrak{Z}_m$ sur $\mathfrak{Z}_n$.

3. *Pour qu'une fonction-phase $\xi \in \mathfrak{G}$ transforme le sous-groupe $\mathfrak{Z}_m$ sur $\mathfrak{Z}_n$, il faut et il suffit qu'elle puisse être mise sous la forme*

$$\xi(t) = \frac{m}{n}\, \gamma(t), \tag{17}$$

$\gamma(t)$ étant un élément du normalisateur $\mathfrak{N}_n$: $\gamma(t) \in \mathfrak{N}_n$.

Démonstration. Soit $\xi \in \mathfrak{G}$ une fonction-phase.

a. Admettons que ξ ait la forme (17).

On a alors

$$\xi\, c_n = \xi(t + n\pi) = \frac{m}{n}\, \gamma(t + n\pi) = \frac{m}{n}\, [\gamma(t) + n\pi \operatorname{sgn} \gamma'] =$$

$$= \frac{m}{n}\, \gamma(t) + m\pi \operatorname{sgn} \gamma' = \xi(t) + m\pi \operatorname{sgn} \xi' = c_{m\,.\,\mathrm{sgn}\,\xi'}\, \xi.$$

et par conséquent : $\xi^{-1}\, c_{m\,.\,\mathrm{sgn}\,\xi'}\, \xi = c_n$.

b. Si ξ transforme le sous-groupe $\mathfrak{Z}_m$ sur $\mathfrak{Z}_n$ on a

$$\xi(t + n\pi) = \xi(t) + m\pi \operatorname{sgn} \xi'.$$

$$\frac{n}{m}\, \xi(t + n\pi) = \frac{n}{m}\, \xi(t) + n\pi \operatorname{sgn}\left(\frac{n}{m}\, \xi\right)'$$

et puis, si l'on pose $(n : m)\, \xi(t) = \gamma(t)$, $\gamma(t + n\pi) = \gamma(t) + n\pi \operatorname{sgn} \gamma'$.

Ce dernier résultat entraîne, en vertu de la proposition du N° 8, le théorème suivant :

4. *Pour qu'une fonction-phase $\xi \in \mathfrak{G}$ transforme le sous-groupe $\mathfrak{Z}_m$ sur $\mathfrak{Z}_n$, il faut et il suffit qu'elle puisse être mise sous la forme*

$$\xi(t) = \varepsilon\, \frac{m}{n}\, t + \frac{m}{n}\, G_n(t), \tag{18}$$

ε étant ± 1 et $G_n(t)$ une fonction de classe C_j^3, périodique avec $n\pi$ et telle que

$$\operatorname{sgn}\, [\varepsilon + G_n'(t)] = \varepsilon. \tag{19}$$

Nous savons que toute fonction-phase $\xi(t)$ représente une phase de l'équation (q) dont le porteur est donné par une formule telle que (6). On a par conséquent, en vertu de 4, le théorème suivant :

Toutes les fonctions-phases qui transforment le sous-groupe $\mathfrak{Z}_m$ sur $\mathfrak{Z}_n$ sont précisément les phases des équations (q) *définies par la formule*

$$(20) \qquad q(t) = -\frac{1}{2}\frac{G_n'''(t)}{\varepsilon + G_n'(t)} + \frac{3}{4}\frac{G_n''^2(t)}{(\varepsilon + G_n'(t))^2} - \frac{m^2}{n^2}(\varepsilon + G_n'(t))^2,$$

ε *étant* ± 1 *et* $G_n(t)$ *une fonction de classe* C_t^3, *périodique avec* $n\pi$ *et vérifiant la relation* (19).

Remarquons que, pour $m = n = 1$ la formule (20) entraîne un résultat connu [2].

Reçu le 3 avril 1970

Institut de Mathématiques de l'Académie
Tchécoslovaque des Sciences
Brno

BIBLIOGRAPHIE

1. O. Borůvka, *Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung*. VEB Deutscher Verlag der Wiss., Berlin, 1967.
2. E. Barvínek, *O rozložení nulových bodů řešení lineární diferenciální rovnice $y'' = Q(t)y$ a jejich derivací*. Acta Fac. Nat. Univ. Comenian., V, 8—10 Math. 1961, 465—474.