Otakar Borůvka

Sur la structure algébrique de la théorie des transformations différentielles linéaires du deuxième ordre

Acta Fac. Rer. Natur. Univ. Comenianae, Mathematica 31, 1975, 59-71

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500152

(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. - MATHEMATICA XXXI, 1975)
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXXI - 1975

SUR LA STRUCTURE ALGÉBRIQUE DE LA THÉORIE DES TRANSFORMATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU DEUXIÈME ORDRE

O. BORUVKA, Brno

Discours prononcé le 28 août 1972 dans la séance plénière de la CZECHOSLOVAK CONFERENCE ON DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS (EQUADIFF III) tenue a Brno, Tchécoslovaquie, 28-8 - 1-9 1972.

Table des matieres

I. Préliminaires

1. Dans la présente conférence je me propose de donner un aperçu de la structure algébrique de la théorie des transformations des équations différentielles ordinaires linéaires et homogènes du deuxième ordre dans le champ réel et de développer un modèle algébrique abstrait de cette théorie. Nous considérons les équations en question dans la forme jacobienne

$$(q) \qquad y'' = q(t)y$$

et nous supposons que le coefficient q, appelé par occasion le porteur de l'équation (q), est une fonction continue dans un intervalle considéré, j : $q \in C_j^0$. Qu'il me soit permis d'indiquer et de souligner dès le commencement que, pour de bonnes raisons dont je parlerai plus tard, nous nous bornons aux équations (q) définies et oscillatoires dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$. On appelle une équation (q) oscillatoire dans l'intervalle j si toute intégrale de (q) admet infiniment beaucoup de zéros vers les deux extrémités de j. Un prototype de ces équations oscillatoires est évidemment l'équation (-1) $y'' = -y$ dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$.

A la base de notre théorie figurent deux notions importantes, à savoir celles des (premières) phases et des dispersions centrales (de la première espèce). Nous allons d'abord rappeler leurs définitions et quelques propriétés en tant qu'elles nous seront utiles dans la suite.

Pour abréger des notations ultérieures introduisons dès maintenant les systèmes denombrables suivants

$$\mathfrak{z} = \{\ldots t-2\pi, t-\pi, t, t+\pi, t+2\pi, \ldots\}, \quad \mathfrak{z}_0 = \{\ldots, t-2\pi, t, t+2\pi, \ldots\}$$

et désignons, pour $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $t \in j$:

$$c_n(t) = t + n\pi .$$

On a, évidemment, $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 \vee Z_1$; $\mathfrak{z}_0 = \{c_{2n}\}$, $Z_1 = \{c_{2n+1}\}$.

2. Phases. Soit (q) une équation jacobienne et $B = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ une base de (q), les composantes u, v étant, par conséquent, des intégrales linéairement indépendantes de (q). Le wronskien w $(=uv' - u'v)$ est alors une constante non nulle. On appelle phase de B toute fonction α qui est continue dans j et qui satisfait dans cet intervalle j, en dehors des zéros de v, à l'équation $\operatorname{tg}\alpha(t) = u(t) : v(t)$. On démontre que les phases de B forment un système dénombrable (α) qui est précisément $(\alpha) = \mathfrak{z}\alpha$; α designe une phase quelconque de B et on applique la notation $\mathfrak{z}\alpha = \{\ldots \ldots, \alpha - 2\pi, \alpha - \pi, \alpha, \alpha + \pi, \alpha + 2\pi, \ldots\}$.

Il est bien connu que chaque phase α de B jouit dans j des propriétés suivantes:

$$(1) \qquad 1.\ \alpha \in C_j^3; \qquad 2.\ \alpha' \neq 0; \qquad 3.\ \lim_{t \to \sigma\infty} \alpha(t) = \sigma\infty \operatorname{sgn}\alpha' \quad (\sigma = \pm 1)$$

dont la $3^{\text{-ième}}$ caractérise les équations (q) oscillatoires. On a en outre la formule

$$(2) \qquad q(t) = -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t) \qquad (t \in j)$$

$\{\alpha, t\}$ étant la dérivée schwarzienne de α au point t.

Introduisons, pour simplifier les notations, la base de l'équation (-1) : $I(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$.

A l'aide de toute phase $\alpha \in (\alpha)$ la base B s' exprime en coordonnées polaires de la façon suivante

$$(3) \qquad B = \sigma \sqrt{|w|} \, \frac{1}{\sqrt{|\alpha'|}} \, I\alpha \qquad (\sigma = \pm 1)$$

La phase α s'appelle propre ou bien impropre suivant que $\sigma = 1$ ou bien $\sigma = -1$. Les phases propres, par exemple, forment un sous-système de (α), $(\alpha)_0$; α étant une phase propre on a : $(\alpha)_0 = \mathfrak{Z}_0 \alpha$.

A coté de la notion des phases d'une base de (q) on introduit la notion des phases de l'équation (q) elle-même: Sous une phase de l'équation (q) on entend une phase d'une base quelconque de (q).

Pour aller plus loin appelons fonction-phase toute fonction α définie dans l'intervalle j et jouissante dans cet intervalle des propriétés (1). Par la fonction-phase α se trouve bien déterminnée, d'après (2), une équation oscillatoire (q). On vérifie que α est une phase de (q). Les bases de (q) admettant la phase α forment un systeme des bases proportionnelles, $\bar{B} = \{\mu \, I\alpha : \sqrt{|\alpha'|}\}$, const $= \mu \neq 0$.

La fonction-phase α s'appelle élementaire si elle vérifie, dans j, la relation suivante

$$(4) \qquad \alpha(t+\pi) = \alpha(t) + \pi . \operatorname{sgn} \alpha'.$$

Cette formule entraîne la relation plus générale

$$(5) \qquad \alpha c_n(t) = c_{n.\operatorname{sgn}\alpha'} \alpha(t) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Subsistent, par conséquent, les formules

(6) $$\mathfrak{z}\alpha = \alpha\mathfrak{z} \quad ; \quad \mathfrak{z}_0\alpha = \alpha\mathfrak{z}_0$$

3. Dispersions centrales. On entend sous la dispersion centrale d'indice n $(=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ de l'équation (q) la fonction φ_n définie dans j de manière que, pour chaque nombre $t \in j$, la valeur $\varphi_n(t)$ est le $n^{-\text{ième}}$ nombre conjugué avec t et situé à droite ou à gauche de t suivant que $n > 0$ ou $n < 0$. En particulier, la fonction φ_1 s'appelle la dispersion fondamentale. Quant à la fonction φ_0, on pose pour $t \in j$: $\varphi_0(t) = t$.

On sait que chaque fonction φ_n est une fonction-phase qui est constamment croissante et satisfait pour $t \in j$ à l'inégalité $\varphi_{n-1}(t) < \varphi_n(t)$.

Rappelons finalement qu'on entend sous la fonction-distance de l'équation (q) la fonction d définie dans j par la formule

$$d(t) = \varphi_1(t) - t.$$

Au sujet de cette fonction d, dont la signification est évidente, contentons-nous de mentionner le résultat suivant: Pour que la fonction-distance d soit périodique avec π, il faut et il suffit que la dispersion fondamentale φ_1 soit élémentaire.

II. Fondaments de la théorie des transformations des équations jacobiennes

1. On sait depuis une quatre-vingtaine d'années que toute transformation biunivoque du plan (T, Y) sur le plan (t, y), telle que $T = X(t)$, $y = f(t, Y)$ et qui transforme les intégrales de chaque équation jacobienne (Q) dans celles d'une autre, (q), a la forme suivante

(X) $$T = X(t), \quad y = \frac{c}{\sqrt{|X'(t)|}}\, Y \qquad (0 \neq c = \text{const.});$$

on suppose, sans parler de certaines propriétés d'inversibilité et de différentiabilité de la fonction f, que X est une fonction-phase.

Dans la suite nous prenons, pour simplifier les formules, $c=1$

2. Transformations des bases. Soient (Q) une équation jacobienne, $B_A(T)$ une base de (Q) admettant la phase propre A et W le wronskien correspondant. Subsiste alors une formule telle que (3) écrite en lettres majuscules ($\sigma=1$). Appliquons la transformation (X) aux composantes de B_A, Nous avons

$$(7) \qquad B_A(T) \xrightarrow{X} \sqrt{|W|}\ \frac{1}{\sqrt{|AX(t)'|}}\ IAX(t)\,.$$

Or, la fonction $\alpha(t) = AX(t)$ étant une fonction-phase, elle détermine, d'après (2), une équation oscillatoire (q), qui admet la phase α. En faisant le calcul on trouve le porteur correspondant q:

$$(Qq) \qquad -\{X,t\} + Q(X)X'^2(t) = q(t).$$

On voit que le second membre de (7) est une base de (q), B_α, admettant la phase α. Parmi les bases proportionnelles de (q) qui admettent la phase α, la base B_α se trouve bien déterminée par ceci que, son wronskien a la valeur $W.\operatorname{sgn} X'$ et la fonction α est une phase propre de B_α. Remarquons que la base transformée B_α ne dépend point du choix de la phase $A \in (A)_0$.

L'équation (Qq) s'appelle l'équation de Kummer. Les fonctions Q, q étant données, les solutions X de cette équation sont précisément les fonctions-phases qui réalisent les transformations (X) des bases de (Q) dans celles de (q). Ces solutions s'appelent les dispersions générales des équations (Q), (q) et leur ensemble est nommé le complexe de Kummer, $K_{Q,q}$. Dans le cas Q=q on parle des dispersions et du complexe de Kummer de l'équation (q), K_q.

Envisageons la transformation considérée en tant qu'une opération faisant associer à toute base B_A de (Q) et à toute fonction-phase X, la base B_α de (q); désignons cette opération par o de sorte que $B_\alpha = B_A \circ X$. On trouve illustré le processus menant des données B_A, X au résultat $B_A \circ X$ de l'opération en question dans le schème a la p. ; il y est marqué par les flèches. On a désigné par L_Q, L_q les espaces vectoriels linéaires formés des intégrales des équations (Q), (q) et par $\mathcal{G}$ l'ensemble de toutes les fonctions-phases.

3. Transformations des intégrales. Il reste à dire quelques mots au sujet des transformations (X) de différentes intégrales de (Q) dans celles de (q). Y(T) étant une intégrale de (Q) on a, évidemment,

$$(8) \qquad Y(T) = (\gamma_1, \gamma_2) B_A (T),$$

γ_1, γ_2 (= const.) étant les coordonnées de Y par rapport a la base B_A . L'intégrale transformée, y(t), est alors

$$(9) \qquad y(t) = (\gamma_1, \gamma_2) (B_A \circ X(t)).$$

On démontre que l'intégrale y de (q) ne dépend pas du choix de la base B_A .

III. L'Algèbre des phases

1. Le groupe des phases, $\mathcal{G}$. Revenons à la notation ei-dessus et désignons par $\mathcal{G}$ l'ensemble formé par les fonctions-phases. Il est clair que les fonctions inverses et de même les fonctions composées des fonctions-phases sont encore des fonctions-phases. Par conséquent, si l'on introduit dans $\mathcal{G}$ l'opération binaire, dite la multiplication et consistant en composition des fonctions, $\mathcal{G}$ devient un groupe. Nous appelons $\mathcal{G}$ le groupe des phases et ses éléments, occasionnellement, les phases. L'élement neutre de $\mathcal{G}$ est, évidemment, la fonction $\varphi_0(t) = t$.

Remarquons à cette ocasion que, notre supposition faite dès le commencement, à savoir qu'il s'agisse des équations (q) définies et oscillatoires dans l'intervalle j = $(-\infty, \infty)$, est tout-à-fait esentielle pour nos raisonnements. En effet, les équations (q) étant oscillatoires, les valeurs des élements du groupe $\mathcal{G}$ recouvrent l'intervalle j qui est précisément le domaine de définition de ces élements. Cela entraîne que le groupe $\mathcal{G}$ est bien déterminé.

Les fonctions-phases croissantes forment un sous-groupe de $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_0$, qui est invariant dans $\mathfrak{G}$ et dont l'indice égale à 2. L'autre élément du groupe-facteur $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$, G_1, consiste en fonctions-phases décroissantes.

2. <u>Le sous-groupe fondamental</u> $\mathfrak{F}$. Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des phases de l'équation (-1) : $y'' = -y$. On démontre, en se servant de (2), que l'ensemble $\mathfrak{F}$ consiste précisément en solutions de l'équation de Kummer (-1, -1) et qu'il forme un sous-groupe de $\mathfrak{G}$: $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$. Nous appelons $\mathfrak{F}$ le sous-groupe fondamental de $\mathfrak{G}$, plus brièvement: le groupe fondamental.

Les systèmes $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{Z}_0$ sont, évidemment, des sous-groupes monogènes du groupe $\mathfrak{F}_0$, aux générateurs c_1, c_{-1} et c_2, c_{-2} respectivement. On pose $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_0$, $E_1 = \mathfrak{F} \cap G_1$.

On démontre que toute phase $\mathcal{E} \in \mathfrak{F}$ est élémentaire. Subsiste, par conséquent, une relation telle que (5) ($\alpha \equiv \mathcal{E}$) ; donc, la phase $\mathcal{E}$ est échangeable ou bien inversement échangeable avec chaque élement $c_n \in \mathfrak{Z}$, suivant que $\mathcal{E} \in \mathfrak{F}_0$ ou bien $\mathcal{E} \in E_1$. Il en résulte que le groupe $\mathfrak{Z}$ fait partie du centre du groupe $\mathfrak{F}_0$ et on démontre que $\mathfrak{Z}$ est le centre même de $\mathfrak{F}_0$. D'apres (6) les groupes $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_0$ sont invariants dans $\mathfrak{F}$. Les groupes-facteurs $\mathfrak{F}/\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{F}/\mathfrak{Z}_0$ vérifient, évidemment, la relation $\mathfrak{F}/\mathfrak{Z} > \mathfrak{F}/\mathfrak{Z}_0$ et on démontre que, tout élément de $\mathfrak{F}/\mathfrak{Z}$ est la réunion exactement de deux élements de $\mathfrak{F}/\mathfrak{Z}_0$.

Une autre propriété importante de groupe $\mathfrak{F}$ consiste en ceci, que ce groupe $\mathfrak{F}$ coincide avec le complexe de Kummer de l'équation (-1), K_{-1}. Donc, $\mathcal{E} \in \mathfrak{F}$ étant un élément arbitraire, la transformation ($\mathcal{E}$) fait passer la base $I(t)$ de l'équation (-1) dans une base de la même équation (-1). On a, par conséquent,

$$\frac{1}{\sqrt{|\mathcal{E}'(t)|}}\, I\mathcal{E}(t) = \mathcal{H}_{\mathcal{E}}\, I(t)$$

$\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ étant une matrice régulière 2x2 sur le corps des nombres réels, R. On démontre que la correspondance $\mathcal{H} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ est un homomorphisme du groupe $\mathfrak{F}$ sur le groupe $\mathfrak{U}$ formé des matrices unimodulaires 2x2 sur R.

Indiquons finalement la suivante propriété du groupe $\mathfrak{F}$: Le normalisateur de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}_{\mathfrak{F}}$, se confond avec $\mathfrak{F}$: $\mathfrak{N}_{\mathfrak{F}} =$

3. <u>La décomposition</u> $\mathfrak{G}/_d\,\mathfrak{F}$. L'importance du groupe $\mathfrak{F}$ pour la théorie qui nous occupe tient à ceci: Les systèmes des phases de différentes équations (q) sont précisément les éléments de la décomposition du groupe $\mathfrak{G}$ en classes latérales à droite, $\mathfrak{G}/_d\,\mathfrak{F}$.

A tout élément $\bar{a} \in \mathfrak{G}/_d\,\mathfrak{F}$ se trouvent biunivoquement associés:

D'abord, une équation (q) dont les phases forment précisément l'élément $\bar{a}$. Cette équation (q) est bien déterminée par une formule telle que (2), α étant un arbitraire élément de $\bar{a}$;

puis, le complexe de Kummer de l'équation (q), K_q. Ce complexe K_q est bien déterminé par la formule

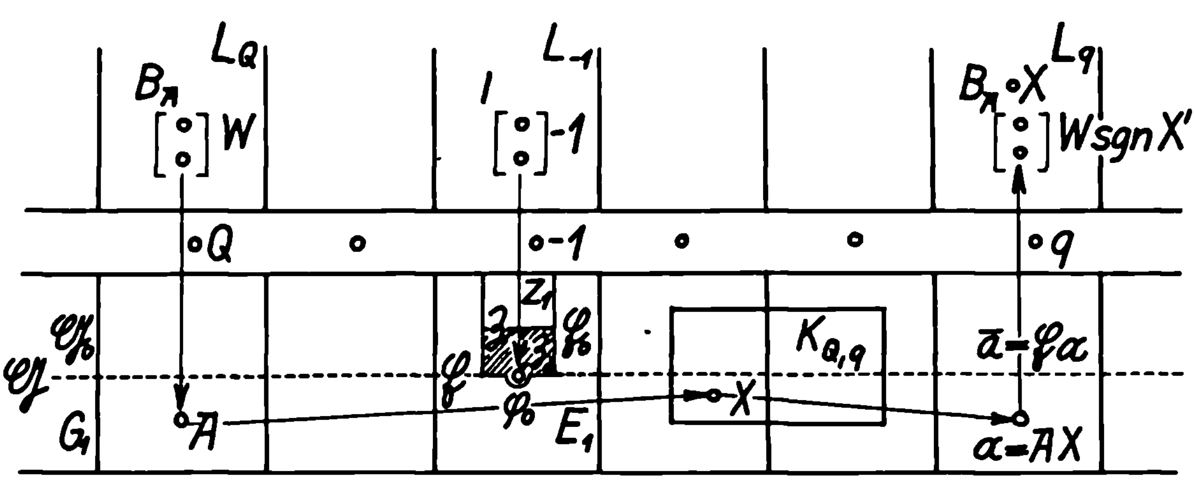
$$K_q = \alpha^{-1}\,\mathfrak{F}\,\alpha,$$

α étant encore un arbitraire élément de $\bar{a}$. Par conséquent, K_q est le groupe conjugué avec $\mathfrak{F}$ par rapport aux éléments de $\bar{a}$;

finalement, l'espace vectoriel linéaire formé par les intégrales de l'équation (q), L_q.

Et voici encore une caractérisation algébrique du complexe de Kummer, $K_{Q,q}$: Le complexe $K_{Q,q}$ consiste précisément en fonctions-phases X qui transforment le complexe K_Q sur K_q suivant la formule:

$$K^{-1} K_Q X = K_q.$$



4. Remarque. Le temps prévu pour ma conférence me ne permet pas d'insister sur la nature algébrique de certaines notions importantes, d'origine analytique, qui interviennent dans la théorie considérée. Cela concerne surtout les dispersions centrales des équations (q), les fonctions-phases élémentaires, des équations (q), ($\bar{q}$) mutuellement inverses et les équations (q) aux fonctions-distances périodiques. Au sujet des équations mutuellement inverses et celles dont les fonctions-distances sont périodiques on a récemment trouvé des résultats, me paraît-il, bien intéressants. Figurent parmi ces dernières équations les équations (q) aux porteurs q périodiques. Remarquons que, le porteur q d'une équation jacobienne résulte périodique avec π, si et seulement si le groupe K_q contient le centre $\mathfrak{z}$: $K_q \supset \mathfrak{z}$. V. à ce sujet mon article sous presse qui va paraître dans le Volume dédié à M. A. Kawaguchi pour son 70$^{-\text{ième}}$ anniversaire.

IV. Le modèle algébrique abstrait de la théorie en question

Nous voilà arrivés à la présentation d'un modèle algébrique abstrait de la théorie considérée. L'exposé précédent ayant été conçu de manière à faire apparaître, en grandes lignes, la structure logique de ce modèle, nous sommes en mésure d'aborder la question rapidement et sans aucune espèce de difficultés.

Nous désignons encore par $\mathfrak{U}$ le groupe des matrices unimodulaires 2x2 sur le corps R et nous posons $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Le modèle en question consiste en éléments suivants:

1. Le groupe des phases, $\mathfrak{G}$;
2. les espaces vectoriels linéaires $L\bar{a}$ associes aux élements $a \in \mathfrak{G}/_d \mathfrak{f}$;
3. les quasinormes des bases des espaces $L\bar{a}$;
4. les transformations kummeriennes des bases et des éléments des espaces $L\bar{a}$.

1. Le groupe des phases, $\mathfrak{G}$, est un groupe abstrait satisfaisant aux propositions suivantes:

A. $\mathfrak{G}$ contient un sous-groupe d'indice 2, $\mathfrak{G}_0$.

Cela entraîne que le groupe-facteur $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$ consiste en deux éléments $\mathfrak{G}_0$, G_1. Pour $a \in \mathfrak{G}$ nous posons sgn $a' = 1$ ou bien sgn $a' = -1$ suivant que $a \in \mathfrak{G}_0$ ou bien $a \in G_1$. Subsiste alors, pour $a, b \in \mathfrak{G}$, la formule: $\operatorname{sgn} (ab)' = \operatorname{sgn} a' . \operatorname{sgn} b'$.

B. $\mathfrak{G}$ contient un sous-groupe $\mathfrak{F}$, appelé le sous-groupe fondamental, jouissant des propriétés suivantes:

a/ Le centre $\mathfrak{Z}$ de $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_0$ est un groupe monogène $\mathfrak{Z} = \{c^n\}$ dont les éléments vérifient pour $e \in \mathfrak{F}$ la relation $ec^n = c^{n \cdot \operatorname{sgn} e'} e$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ c^0 = 1)$.

b/ Il existe un homomorphisme $\mathcal{H}$ de $\mathfrak{F}$ sur $\mathfrak{U}$ tel que (i) $\det \mathcal{H}e = \operatorname{sgn} e'$ pour $e \in \mathfrak{F}$; (ii) $\mathcal{H}c^n = (-1)^n E$, les c^{2n} étant les seuls éléments de $\mathfrak{F}$ qui se représent sur E.

c/ Le normalisateur de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{G}$ se confond avec $\mathfrak{F}$: $\mathfrak{N}_{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}$.

D'après a., les groupes $\mathfrak{Z} = \{c^n\}$, $\mathfrak{Z}_0 = \{c^{2n}\}$ sont invariants dans $\mathfrak{F}$. Tout élément de $\mathfrak{F}/\mathfrak{Z}$ est la réunion de deux éléments de $\mathfrak{F}/\mathfrak{Z}_0$. D'après b., le noyau de $\mathcal{H}$ est $\mathfrak{Z}_0$. Donc, d'après le premier théorème d'isomorphisme pour les groupes, il existe un isomorphisme $\bar{\mathcal{H}}$ de $\mathfrak{F}/\mathfrak{Z}_0$ sur $\mathfrak{U}$. Cet isomorphisme est de sorte que, les images de deux éléments $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2 \in \mathfrak{F}/\mathfrak{Z}_0$ dont la réunion est un élément de $\mathfrak{F}/\mathfrak{Z}$ diffèrent exactemant en signe: $\bar{\mathcal{H}}\bar{e}_1 = -\bar{\mathcal{H}}\bar{e}_2$.

2. <u>Les espaces vectoriels linéaires $L\bar{a}$ associée aux élements $\bar{a} \in \mathfrak{G}/_d\mathfrak{F}$</u>. On suppose qu'à tout élément $\bar{a} \in \mathfrak{G}/_d\mathfrak{F}$ se trouve biunivoquement associé un espace vectoriel linéaire à deux dimensions, $L\bar{a}$, dont les bases sont dans certaines relations avec les éléments de $\bar{a}$.

Soit $a \in \bar{a}$ un élément arbitraire. On a alors $\bar{a} = \mathfrak{F}a$. Les groupes $\mathfrak{F}/\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{F}/\mathfrak{Z}_0$ induisent les décompositions de $\bar{a}$, $\bar{a}/_d\mathfrak{Z} = (\mathfrak{F}/\mathfrak{Z})\,a$, $\bar{a}/_d\mathfrak{Z}_0 = (\mathfrak{F}/\mathfrak{Z}_0)\,a$. Celles-ci ne dépendent pas du choix de $a \in \bar{a}$. Tout élément de $\bar{a}/_d\mathfrak{Z}$ est la réunion de deux éléments de $\bar{a}/_d\mathfrak{Z}_0$.

Désignons par $\bar{B}$ le système des bases de $L\bar{a}$ provenant de la base B par la multiplication de B par les nombres positifs.

Les relations en question sont les suivantes:

a/ A tout élément $x \in \bar{a}$ correspond un système $\bar{B}_x$ bien déterminé.

b/ $\bar{B}_{ex} = \mathcal{H}e.\bar{B}_x$, pour $x \in \bar{a}$, $e \in \mathfrak{F}$.

c/ $\bar{B}_y = \bar{B}_x$; $x, y \in \bar{a}$, entraîne $y = c^{2n} x$, n étant un entier convenable.

D'après b.,c. il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des systèmes $\bar{B}$ et la décomposition $\bar{a}/_d\mathfrak{Z}_0$: $\bar{B} \rightarrow \bar{c}$ entraîne $\bar{B} = \bar{B}_x$ pour $x \in \bar{c}$ $(\in \bar{a}/_d\mathfrak{Z}_0)$. Toute base B de $L\bar{a}$ se trouve contenue, évidemment, dans un système $\bar{B}$ bien déterminé et l'on a $\bar{B} \rightarrow \bar{c}_1$, $-\bar{B} \rightarrow \bar{c}_2$, $\bar{c}_1 \vee \bar{c}_2 \in \bar{a}/_d\mathfrak{Z}$. Les éléments de l'ensemble $\bar{c}_1$ resp. $\bar{c}_2$ s'appelent les phases propres resp. impropres de la base B.

3. Les quasinormes des bases des espaces $L\bar{a}$. On suppose qu'à toute base B de $L\bar{a}$ se trouve associé un nombre réel non nul, $\|B\|$, appelé la quasinorme (wronskien) de B, de manière que

a/ $\operatorname{sgn} \|B\| = -\operatorname{sgn} a$; pour $B \in \bar{B}_a$.
b/ $\|MB\| = \det M . \|B\|$, pour toute matrice régulière 2x2 sur R.

4. Les transformations kummeriennes des bases et des éléments des espaces $L\bar{a}$.

Une transformation kummerienne des bases fait correspondre à toute base B de $L\bar{a}$ et tout élément $x \in \mathcal{G}$ la base $B \circ x$ de l'espace $L\bar{b}$, d'après la formule

$$B \circ x = \sqrt{\frac{\operatorname{abs} \|B\|}{\operatorname{abs} \|B_b\|}} \mathcal{H} e . B_b ;$$

ici la signification de différents symboles est la suivante: $ax \in \bar{b} \in \in \mathcal{G}/_d \mathcal{F}$, les éléments $b \in \bar{b}$ et $B_b \in \bar{B}_b$ ont éte choisis arbitrairement, et, finalement, $e \in \mathcal{F}$ est la solution de l'équation $ax = eb$.

Une transformation kummerienne des vecteurs fait correspondre à tout vecteur $Y \in L\bar{a}$ et tout élément $x \in \mathcal{G}$ le vecteur $Y \circ x$ tel que

$$Y = (\gamma_1, \gamma_2)\, B, \quad Y \circ x = (\gamma_1, \gamma_2)\,(B \circ x) \quad (\gamma_1, \gamma_2 = \text{const.});$$

B désigne une base de $L\bar{a}$ choisie arbitrairement.

Voilà le modèle algébrique abstrait de la théorie des transformations des équations jacobiennes oscillatoires dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$. Tous les éléments de la théorie en question, tels que le complexe de Kummer, $K_{Q,q}$, celui K_q, les dispersions centrales, les phases élémentaires, etc., admettent des analogues abstraits bien évidents. Ainsi, par exemple, le complexe de Kummer, K_q, se manifeste en tant que le groupe conjugué avec le groupe $\mathcal{F}$ par rapport aux éléments d'une classe $\bar{a} \in \in \mathcal{G}/_d \mathcal{F}$, etc.

V. Problèmes ouverts

Je me permets de terminer ma conférence par indiquer quelques problèmes ouverts qui s'attachent à l'exposé précédent.

1. On appelle deux équations (q), ($\bar{q}$) mutuellement inverses si elles admettent des phases α, $\bar{\alpha}$ qui sont des fonctions inverses: $\bar{\alpha} = \alpha^{-1}$. Il s'agit d'étudier la géométrie centro-affine des courbes intégrales des équations (q), ($\bar{q}$) mutuellement inverses.

2. Soient (Q), (q) des équations dont les porteurs diffèrent l'un de l'autre d'une constante $-\lambda^2$, $Q = -\lambda^2 + q$, et dont les dispersions centrales Φ_m, φ_n résultent confondues : $\Phi_m = \varphi_n$. On sait que, dans ces conditions, les fonctions Q, q sont périodiques avec $\omega (> 0)$ et les dispersions en question sont de la forme: $\Phi_m(t) = \varphi_n(t) = t + \omega$. Il s'agit de déterminer toutes les équations (Q), (q) jouissant de ces propriétés.

3. Appliquer la théorie des transformations considérée aux équations (q) aux porteurs périodiques. Etudier la théorie de Floquet en relation avec le modèle algébrique abstrait de ci-dessus.

4. Développer la composante numérique de la théorie considérée. Il s'agit surtout des méthodes effectives du calcul des phases et des dispersions centrales. Payer attention aux équations spéciales intervenantes dans les applications techniques.

5. Récemment, M.F. Neuman a développé une théorie géométrique des transformations des équations différentielles ordinaires linéaires et homogènes du $n^{\text{-ième}}$ ordre (sous presse). Il s'agit d'étudier cette théorie du point de vue algébrique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BORŮVKA O., Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung, VEB Deutscher Verlag des Wissenschaften, Berlin 1967.
Traduction anglaise par F. M. Arscott: Linear Differential Transformations of the Second Order, The English Universities Press Ltd, London 1971

[2] BORŮVKA O., Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961.
Traduction anglaise par Me M. Borůvková: Foundations of the Theory of Groupoids and Groups, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (sous presse).

L'adresse de l'auteur:
Otakar Borůvka
Institut Mathématique de l'Académie Tchécoslovaque des Sciences
Janáčkovo náměstí 2a
Brno
Tchécoslovaquie

Prišlo 6. apríla 1973,
do nakladateľstva 25. septembra 1973.

O. BORŮVKA

Algebraická struktura teorie lineárních diferenciálních transformací druhého řádu

Resumé

Předmětem tohoto článku je obsah plenární přednášky proslovené dne 28. srpna 1972 na konferenci EQUADIFF III v Brně. Přednáška obsahovala popis postupu vedoucího od prvních začátku analytické teorie Kummerových transformací oscilatorických diferenciálních rovnic $y'' = q(t).y$, $q(t) \in C^{0}_{j=(-\infty,\infty)}$, k abstraktnímu, na algebraických pojmech axiomaticky založenému modelu této teorie.

Jednotlivé kapitoly předloženého článku mají tento obsah: I. Úvod, II. Základy teorie transformací jacobiovských rovnic, III. Algebra fází, IV. Abstraktní algebraický model teorie transformací, V. Otevřené problémy.

Резюме

Алгебраическая структура теории линейных дифференциальных трансформаций второго порядка

О. БОРУВКА

Предметом этой статьи является содержание пленарной лекции прочтенной 28-го августа 1972 г. на конференции EQUADIFF III в городе Брно. В лекции описан процесс ведущий от первых начал аналитической теории трансформаций Куммера колеблющихся дифференциальных уравнений $y'' = q(t)y$, $q(t) \in C^{0}_{j=(-\infty,\infty)}$, к абстрактной, на алгебраических понятиях аксиоматическо основанной, модели этой теории.

Название отдельных глав статьи: I. Введение, II. Основы теории трансформаций уравнений Якоби III. Алгебра фаз, IV. Абстрактная алгебраическая модель теории трансформаций. V. Открытые проблемы.