Otakar Borůvka

Sur quelques compléments à la théorie de Floquet pour les équations différentielles du deuxième ordre

Ann. Mat. Pura Appl., IV. Ser., Vol. 102, 1975, 71-77

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500154

BORUVKA, O.
1975
Annali di Matematica pura ed applicata
(IV), Vol. CII, pp. 71-77

Sur quelques compléments à la théorie de Floquet pour les équations différentielles du deuxième ordre (*).

O. BORŮVKA (Brno, Cecoslovacchia)

Hommage à mon ami M. Beniamino SEGRE
pour son 70ᵉ anniversaire

Résumé. – *La théorie de Floquet appliquée aux équations* (q) $y''=q(t)y$ *entraîne que, toute équation* (q) *au porteur périodique est ou bien disconjuguée ou bien oscillatoire et par conséquent soumise, dans le second cas, à la théorie des dispersions. Les équations* (q) *oscillatoires et aux porteurs périodiques sont donc accessibles par de différentes voies provenant des deux théories en question. Cette idée se trouve appliquée, dans l'article présent, au cas des racines caractéristiques réelles. Sont démontrés plusieurs nouveaux résultats gravitant autour d'une expression des racines caractéristiques de* (q) *en valeurs du porteur* q.

Position du problème.

Dans un article récent nous avons étudié les équations différentielles $y''=q(t)y$ pour lesquelles la distance de deux points conjugués varie périodiquement. Nous avons montré que la classe formée par ces équations comprend, en particulier, toutes les équations aux porteurs q périodiques ([1]). Les méthodes appliquées à l'étude des équations de la classe en question, faisant intervenir des notions en partie nouvelles, et basées sur la théorie des dispersions, exercent une influence, naturellement, à la théorie des équations aux porteurs périodiques. On trouve de cette façon un nouveau accès à la théorie classique de Floquet. Dans l'article présent nous déduisons par cette voie de nouvelles propriétés des équations aux porteurs périodiques admettant les racines caractéristiques réelles.

Préliminaires.

Considérons une équation différentielle ordinaire linéaire du deuxième ordre de la forme jacobienne

$$\text{(q)} \qquad y''=q(t)y$$

dont le porteur q est une fonction continue dans l'intervalle $j=(-\infty,\infty)$: $q(t)\in C_j^0$.

(*) Entrata in Redazione il 7 maggio 1973.

Rappelons que l'équation (q) s'appelle *oscillatoire* si toute intégrale de (q) admet infiniment beaucoup de zéros vers les deux extrémités de j. Dans la suite nous ne considérons que les équations (q) oscillatoires.

Porteurs généraux.

1. – *Dispersions centrales.*

On sait que la dispersion centrale (de première espèce) d'indice ν $(-0, \pm 1, \ldots)$, φ_ν, est définie de la manière suivante: Pour $t \in j$ la valeur $\varphi_\nu(t)$ est le $|\nu|$-ième nombre conjugué avec t et situé à droite ou à gauche de t suivant que $\nu > 0$ ou $\nu < 0$; pour $\nu = 0$ on pose $\varphi_0(t) = t$ ([2]).

On voit que, toute intégrale de (q) s'annulant en t a précisément n $(\geqslant 1)$ zéros dans l'intervalle $[t, \varphi_n(t))$ et $n+1$ zéros dans $[t, \varphi_n(t)]$.

Au sujet des fonctions φ_ν rappelons les faits suivants dont nous nous servirons dans la suite:

(i) Toute fonction φ_ν appartient à la classe C_j^3 et sa dérivée φ'_ν est constamment positive: $\varphi'_\nu(t) > 0$ $(t \in j)$.

Si q est toujours négatif on a pour $n \geqslant 1$, $t \in j$:

$$\varphi'_n(t) = \frac{q(t_1)}{q(t_3)} \cdot \frac{q(t_5)}{q(t_7)} \cdots \frac{q(t_{4n-3})}{q(t_{4n-1})}, \tag{1}$$

les $t_1, \ldots, t_{4n-1}$ étant de convenables nombres tels que $t < t_1 < \ldots < t_{4n-1} < \varphi_n(t)$.

(ii) Toute fonction φ_ν transforme, dans j, chaque intégrale y de (q) et sa dérivée y' en elles-mêmes, suivant les formules

$$\begin{aligned} y[\varphi_\nu(t)] &= (-1)^\nu \sqrt{\varphi'_\nu(t)}\, y(t) \qquad \text{pour } t \in j\,, \\ y'[\varphi_\nu(t)] &= (-1)^\nu \frac{1}{\sqrt{\varphi'_\nu(t)}}\, y'(t) \qquad \text{si } y(t) = 0\,. \end{aligned} \tag{2}$$

On appelle *courbe intégrale de l'équation* (q) la courbe, C, donnée par les coordonnées paramétriques $u(t)$, $v(t)$-intégrales linéairement indépendantes de (q). Si q est toujours négatif la courbe C résulte régulière, c'est-à-dire localement convexe et sans points d'inflexion. Dans ce cas les nombres $\varphi_\nu(t)$ sont les valeurs du paramètre des points d'intersection de C avec la droite $OP(t)$ déterminée par l'origine O du système des coordonnées et le point $P(t) \in$ C. Deux points d'intersection en question, $P(\varphi_\mu(t))$, $P(\varphi_\nu(t))$, sont situés au même coté de O ou bien aux côtés différents suivant que $\mu - \nu$ est pair ou bien impair ([3]).

2. – *Fonctions-distances.*

Nous appelons *fonction-distance d'indice* ν ($0, \pm 1, \ldots$) *de* (q) la focntion d_ν définie par la formule

$$d_\nu(t) = \varphi_\nu(t) - t \qquad (t \in j)\,.$$

Les fonctions d_ν jouissent, évidemment, des propriétés suivantes:

(i) Toute fonction d_ν appartient à la classe C_j^3 et sa dérivée d'_ν dépasse constamment -1: $d'_\nu(t) > -1$ $(t \in j)$.

(ii) Si q est toujours négatif on a pour $n \geqslant 1$, $t \in j$,

$$\frac{1}{\pi} d_n(t)\sqrt{m_t} \leqslant n < \frac{1}{\pi} d_n(t)\sqrt{M_t} \tag{3}$$

m_t et M_t étant le minimum resp. maximum de $|q|$ dans $[t, \varphi_n(t)]$ $(0 < m_t < M_t)$.

3. – *Phases.*

On sait qu'on entend sous une *phase d'une base de* (q) formée par les intégrales linéairement indépendantes u, v toute fonction continue dans j, $\alpha(t)$, qui satisfait en dehors des zéros de v à la relation $\operatorname{tg}\alpha(t) = u(t)/v(t)$.

(i) Toute phase en question, α, appartient à la classe C_j^3 et sa dérivée est constamment différente de 0: $\alpha'(t) \neq 0$ $(t \in j)$.

(ii) On a, en posant $\varrho^2(t) = u^2(t) + v^2(t)$, $w - u(t)v'(t) - u'(t)v(t)$ $(= \text{const} \neq 0)$,

$$\alpha'(t) = \frac{-w}{\varrho^2(t)} \qquad (t \in j)\,. \tag{4}$$

Sous une *phase de l'équation* (q) on entend une phase d'une base quelconque de (q).

Subsiste, pour toute phase α de (q) et chaque dispersion centrale φ_ν la relation abelienne suivante

$$\alpha\varphi_\nu(t) \quad \alpha(t) + \nu\pi \operatorname{sgn}\alpha' \qquad (t \in j) \tag{5}$$

Porteurs périodiques.

Dans la suite nous supposons que le porteur q est constamment négatif et périodique avec π:

$$q(t) < 0\,, \quad q(t+\pi) - q(t) \qquad (t \in j)$$

Dans ces conditions la fonction q est bornée dans j et l'on a, en posant $m = \min_{t\in j} |q(t)|$, $M = \max_{t\in j} |q(t)|$,

$$0 < m \leqslant M .$$

Remarquons que la périodicité de q entraîne que les dispersions centrales φ_ν sont élémentaires en le sens de la formule $\varphi_\nu(t+\pi) = \varphi_\nu(t) + \pi$ $(t \in j)$. En même temps les fonctions-distances d_ν sont elles-mêmes périodiques avec π ([1]).

4. – *Racines caractéristiques.*

Dans la théorie de Floquet on associe à (q) l'équation algébrique suivante

$$s^2 - As + 1 = 0 \qquad (\text{const} - A \neq 0)$$

dont les racines s_1, s_2, appelées les racines caractéristiques de (q) (periodicity factors ([4])), donnent des renseignements au sujet du comportement des intégrales de (q). On a, évidemment, $s_1 s_2 \quad 1$.

Soient $\xi \in j$ un nombre quelconque et u, v les intégrales de (q) déterminées par les valeurs suivantes:

$$(6) \qquad \begin{aligned} u(\xi) &= 1 , & u'(\xi) &= 0 , \\ v(\xi) &= 0 , & v'(\xi) &= 1 . \end{aligned}$$

On sait que la valeur de la fonction

$$A(\xi) = u(\xi + \pi) + v'(\xi + \pi)$$

ne dépend point de ξ et qu'on a précisement

$$A(\xi) - A \qquad (= \text{const} \neq 0) .$$

Remarquons qu'on prend habituellement $\xi = 0$ ([5]), mais, c'est exactement le fait que la fonction $A(\xi)$ garde toujours la valeur A, qui est essentiel pour nos considerations suivantes.

5. – *Racines caractéristiques réelles.*

Pour le reste de cet article nous nous concentrons à l'étude de l'équation (q) admettant les racines caractéristiques s_1, s_2 *réelles*. Cela a lieu, évidemment, si et seulement si $|A| > 2$.

Dans le cas $A > 2$ $(A < 2)$ les nombres s_1, s_2 sont positifs (négatifs) et mutuellement différents. Dans le cas $A = 2$ $(A = -2)$ on a $s_1 = s_2 = 1$ $(s_1 - s_2 = -1)$.

Les théorèmes.

Théorème 1. – *Pour que les racines caractéristiques de l'équation* (q), s_1, s_2, *soient positives* (*négatives*) *il faut et il suffit qu'une fonction-distance de* (q), d_n, *à l'indice* n *positif et pair* (*positif et impair*) *et vérifiant les inégalités*

$$\sqrt{m} \quad n \quad \sqrt{M}, \tag{7}$$

prenne pour un point x $(\in j)$ *la valeur* π: $d_n(x) \quad \pi$.

Si cette condition est remplie, on a

$$s_1 = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\varphi_n'(x)}}, \qquad s_2 = (-1)^n \sqrt{\varphi_n'(x)} \tag{8}$$

et, de plus, $s_1 \neq s_2$ *ou bien* $s_1 = s_2$, *suivant que* $d_n'(x) \neq 0$ *ou bien* $d_n'(x) = 0$.

Démonstration. – *a*) Supposons $s_1 > 0$, $s_2 > 0$ $(s_1 < 0,\ s_2 < 0)$.

La théorie de Floquet assure l'existence d'une intégrale de (q), y_1, telle que

$$y_1(t) = \exp\left(\frac{\log|s_1|}{\pi}t\right)\cdot p_1(t) \qquad (t \in j) \tag{9}$$

la fonction p_1 étant périodique ou semi-périodique avec π suivant la formule

$$p_1(t+\pi) = \operatorname{sgn} s_1 \cdot p_1(t) \qquad (t \in j)\,. \tag{10}$$

Or, l'équation (q) étant oscillatoire, y_1 admet au moins un zéro x $(\in j)$: $y_1(x) = 0$. On a alors, d'après (9), (10), $y_1(x+\pi) = 0$, ce qui montre que le point $x+\pi$ est conjugué à droite avec x. On a par conséquent, pour un nombre naturel convenable n,

$$\varphi_n(x) = x + \pi \tag{11}$$

d'où

$$d_n(x) = \pi\,.$$

Vu que le nombre des zéros de y_1 dans l'intervalle $[x, x+\pi)$ est n, subsistent, d'après (3), les inégalités (7).

La formule (9) entraîne

$$y_1'(t) = \frac{\log|s_1|}{\pi} y_1(t) + \exp\left(\frac{\log|s_1|}{\pi}t\right)\cdot p_1'(t) \qquad (t \in j)$$

d'où, en vertu de (11), (2), (10), les formules (8).

b) Supposons qu'une fonction-distance d_n à l'indice n positif et pair (positif et impair) prenne pour un point x $(\in j)$ la valeur π.

On a alors $\varphi_n(x) = x + \pi$ ce qui montre que toute intégrale de (q), y_1, s'annulant en x, a précisément n zéros dans l'intervalle $[x, x+\pi)$. Subsistent, par conséquent, les inégalités (7).

Choisissons dans les formules (6) $\xi = x$ et appliquons aux intégrales u, v ainsi obtenues les formules (2). Nous avons

$$u(x+\pi) = u[\varphi_n(x)] = (-1)^n \sqrt{\varphi_n'(x)}\cdot u(x) = (-1)^n \sqrt{\varphi_n'(x)},$$

$$v'(x+\pi) = v'[\varphi_n(x)] = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\varphi_n'(x)}}\cdot v'(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\varphi_n'(x)}},$$

d'où

$$A = (-1)^n \left\{\sqrt{\varphi_n'(x)} + \frac{1}{\sqrt{\varphi_n'(x)}}\right\}.$$

Il en résultent les formules (8) et, de plus,

$$\sqrt{A^2-4} = \sqrt{\varphi_n'(x)} - \frac{1}{\sqrt{\varphi_n'(x)}} = \frac{|d_n'(x)|}{\sqrt{\varphi_n'(x)}}$$

ce qui achève la démonstration.

REMARQUE. – *Pour que les racines caractéristiques de* (q) *soient positives* (*négatives*) *il faut que la fonction q satisfasse à la condition* $M \geqslant 4$ $(M \geqslant 1)$.

COROLLAIRE. – *Pour que les racines caractéristiques de l'équation* (q), s_1, s_2, *soient positives* (*négatives*), *il faut et il suffit qu'il existent, sur toute courbe intégrale de* (q), $\mathfrak{C}$, *les points* $P_1(x)$, $P_2(x+\pi)$ *aux valeurs* x, $x+\pi$ $(\in j)$ *du paramètre, situés sur la même droite passant par l'origine O du système de coordonnées et, plus précisément, au même côté* (*aux côtés différents*) *de ce point O*.

Si cette condition est remplie, on a

$$s_1 = \frac{OP_1(x)}{OP_2(x+\pi)}, \quad s_2 = \frac{OP_2(x+\pi)}{OP_1(x)},$$

$OP_1(x)$ *et* $OP_2(x+\pi)$ *étant les distances orientées de l'origine O aux points* $P_1(x)$ *et* $P_2(x+\pi)$ $\big((4), (5)\big)$.

THÉORÈME 2. – *Si les racines caractéristiques de l'équation* (q) *sont réelles, subsiste, pour chacune d'entre elles, s, la formule*

$$(12) \qquad \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}\sqrt{M}} \leqslant |s| \leqslant \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}\sqrt{M}}.$$

DÉMONSTRATION. – Soit s une racine caractéristique de (q) supposée réelle. Vu le théorème 1, s coïncide avec l'une des valeurs $(-1)^n\sqrt{\varphi_n'(x)}$, $(-1)^n/\sqrt{\varphi_n'(x)}$, les φ_n $(n\geqslant 1)$ et $x(\in j)$ étant convenablement choisis.

Or, si les inégalités (12) sont vraies pour s, elles sont encore vraies, évidemment, pour $1/s$ c'est-à-dire pour l'autre racine caractéristique de (q). On peut prendre, par conséquent, sans restreindre la généralité de nos conclusions, $s=(-1)^n\sqrt{\varphi_n'(x)}$.

Cela étant, appliquons à la valeur $\varphi_n'(x)$ la formule (1). Nous avons, apparemment,

$$\left(\frac{m}{M}\right)^{n/2}<|s|<\left(\frac{M}{m}\right)^{n/2}.$$

Ces formules entraînent, en vertu de (7), les inégalités (12), ce qui achève la démonstration.

APPLICATION. – Considérons, à titre d'exemple, l'équation de Mathieu

$$y''+(\lambda-2h^2\cos 2t)y=0 \qquad (\lambda>0,\ h\in j)\,. \tag{a}$$

En se servant des notations précédentes on a, évidemment,

$$m=\lambda-2h^2\,,\qquad M=\lambda+2h^2\,;$$

pour rester dans nos conditions, il faut supposer

$$\lambda>2h^2\,.$$

Si les racines caractéristiques de l'équation (a) *sont réelles, subsiste, pour chacune d'entre elles, s, l'estimation suivante*

$$\left(\frac{1-2h^2/\lambda}{1+2h^2/\lambda}\right)^{\frac{1}{\pi}\sqrt{\lambda+2h^2}}<|s|<\left(\frac{1+2h^2/\lambda}{1-2h^2/\lambda}\right)^{\frac{1}{\pi}\sqrt{\lambda+2h^2}}. \tag{13}$$

Si les racines en question sont positives (négatives) on a, nécéssairement, $\lambda\geqslant 4-2h^2$ $(\lambda\geqslant 1-2h^2)$.

Remarquons que, h étant donné, les deux bornes figurant dans (13) tendent à 1 pour $\lambda\to\infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] O. BORŮVKA, *Sur la périodicité de la distance des zéros des intégrales de l'équation différentielle $y''=q(t)y$*, Tensor, N. S., **26** (1972), pp. 121-128.

[2] O. BORŮVKA, *Linear Differential Transformations of the Second Order*, The English Universities Press, London, 1971.

[3] O. BORŮVKA, *Eléments géométriques dans la théorie des transformations des équations différentielles linéaires et ordinaires du deuxième ordre*, Atti del Convegno Internazionale di Geometria Differenziale, Bologna, 28-30 settembre 1967.

[4] F. M. ARSCOTT, *Periodic Differential Equations*, Pergamon Press, 1964.

[5] W. MAGNUS - S. WINKLER, *Hill's Equation*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, 1966.