Otakar Borůvka

Sur les blocs des équations différentielles $y'' = g(t)y$ aux coefficients périodiques

Rend. Mat., VI. Ser., Vol. 8, 1975, 2, 519-532

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500156

OTAKAR BORŮVKA
1975
Rendiconti di Matematica
(2) Vol. 8, Serie VI.

Sur les blocs des équations différentielles $Y'' = Q(T)\,Y$ aux coefficients périodiques

par **OTAKAR BORŮVKA** (Brno, Tchécoslovaque)

Homage à mon illustre Collègue M. Mauro Picone pour son 90^e^ *anniversaire.*

RIASSUNTO - *L'insieme delle equazioni oscillatorie* $(q): y'' = q(t)\,y$, $[t \in (-\infty, +\infty)]$ *si decompone in classi, caratterizzate dal fatto che le equazioni di una medesima classe si ottengono trasformando una di esse — sia essa la* (q) *— mediante le fasi dell'equazione* (-1), *cioè*: $y'' = -y$. *Tali classi vengono chiamate « blocchi ». Le equazioni di uno stesso blocco godono di proprietà similari e, in particolare, esse hanno un portante (*$\equiv$ *coefficiente* $q(t)$*) periodico di periodo* π, *se una fra esse gode di siffatta proprietà. Il presente articolo contiene un saggio delle proprietà dei blocchi anzidetti, proprietà che servono di base alla dimostrazione del teorema secondo cui le equazioni* (q), *con portante periodico di periodo* π *e situate nel medesimo blocco, possiedono le stesse radici caratteristiche.*

I. L'énoncé du problème.

Notre étude actuelle concerne les équations différentielles ordinaires du deuxième ordre et de la forme jacobienne

$$(q) \qquad y'' = q(t)\,y,$$

aux porteurs continus dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$: $q(t) \in C_j$. Il s'agira surtout des équations (q) aux porteurs périodiques et donc soumises à la théorie classique de FLOQUET.

Nous supposons dès le commencement nos équations oscillatoires et par la suite jouissant de la proprieté que leurs intégrales admettent infiniment beaucoup de zéros qui s'accumulent vers les deux extrémités de j. Dans ces conditions les phases de nos équations sont non-bornées et leur ensemble, muni de la loi de multiplication définie par composition de fonctions, est un groupe $\mathfrak{G}$, appelé le groupe de phases. L'ensemble des phases de l'équation (1): $y'' = -y$ est alors un sous-groupe de $\mathfrak{G}$, dit le sous-groupe fondamental, $\mathfrak{F}$ ([1]).

Notre étude est conçue en contribution à la théorie algébrique des équations en question et surtout dans le domaine des équations (q) aux porteurs périodiques avec π. Rappelons que la théorie algébrique des équations (q) consiste en étude des propriétés de structure du groupe $\mathfrak{G}$ et leurs relations avec les équations (q).

L'un des résultats fondamentaux de la théorie en question met en évidence ceci que, l'ensemble des équations (q), $\{(q)\}$, se décompose en classes disjointes et qui sont mutuellement inverses deux à deux. Nous désignons cette décomposition par D. Les classes $u \in D$ s'appelent *blocs* ([2]) tandis que les équations (q) formant un bloc u sont dites mutuellement *associées*, plus simplement associées, et chacune d'elles est dite associée avec toute autre. Toute équation $(q^*) \in u$ se déduit de chaque équation $(q) \in u$ par une transformation élément de $\mathfrak{F}$, c'est à-dire par le changement de t de la forme

$$(\varepsilon) \qquad \varepsilon = {}_{\nu}\mathrm{Arc\,tg}\, c \cdot \frac{\sin(t+a)}{\sin(t+b)},$$

les a, b, c étant des constantes telles que $0 \le a, b < \pi$; $c \sin(a-b) \neq 0$, tandis que le symbole ${}_{\nu}\mathrm{Arc\,tg}$ désigne une branche de la fonction correspondante (n^0 1), et l'on a la formule

$$q^*(t) = -1 + c^2 \cdot \sin^2(b-a) \cdot \frac{1 + q\left[{}_{\nu}\mathrm{Arc\,tg}\, c \cdot \frac{\sin(t+a)}{\sin(t+b)}\right]}{[c^2 \cdot \sin^2(t+a) + \sin^2(t+b)]^2} \cdot$$

On voit que les équations (q) d'un bloc dépendent, en général, de trois constantes arbitraires et en plus d'entiers multiples de π correspondant aux différentes branches de la fonction Arc tg.

La décomposition D consiste — nous l'avons dit — en blocs qui sont mutuellement inverses deux à deux: à tout bloc $u \in D$ correspond biunivoquement le bloc inverse de u, $u^{-1} \in D$, formé précisément par ces équations (q) qui sont inverses de toute équation $(q) \in u$. On a

$(\bar{u}^{\;1})^{\;1}=\bar{u}$. Rappelons que deux équations $(q), (q)$ sont dites (mutuellement) inverses et chacune d'elles s'appelle inverse de l'autre si elles admettent des phases α, α qui sont des fonctions mutuellement inverses: $\alpha\alpha\,(t)=\bar{\alpha}\,\alpha\,(t)=t\ (\in j)$.

La décomposition D de l'ensemble $\{(q)\}$ n'a rien d'artificiel et donc elle résulte inhérente à la notion de l'ensemble $\{(q)\}$ elle-même. Les équations formant un bloc u jouissent des propriétés similaires ce qui veut dire que, les éléments de la théorie en question (intégrales, dispersions centrales, indicateurs, etc.) attachés aux différentes équations $(q^*) \in u$ sont liées par des lois simples et, *sit venia verbo*, élégantes.

Si l'on s'intéresse en particulier des équations aux porteurs périodiques avec π, on voit d'abord — et cela résulte du reste immédiatement de la formule précédente — que, le porteur q^* de toute équation associée avec une équation au porteur q périodique avec π, résulte encore périodique evec π.

Tout bloc $u \in D$ consiste donc en équations aux porteurs périodiques avec π ou bien en equations dont aucune ne jouit de cette propriété. Cette situation suggère la question d'éclaircir les relations existant entre les différents éléments intervenant dans la théorie de FLOQUET (racines caractéristiques, stabilité des intégrales, etc.) en tant qu'elles s'appliquent aux équations situées dans le même bloc. Le but principal de notre étude actuelle consiste précisément en la démonstration du théorème que, *les racines caractéristiques des équations aux porteurs périodiques avec π et situées dans le même bloc sont toujours les mêmes.*

II. Généralités.

Le problème actuel et dont nous allons nous occuper penètre bien profondément dans la théorie des équations (q) et son traitement exige d'appliquer de nombreuses relations intervenant dans l'appareil analytique correspondant. C'est pourquoi il semble utile, pour la commodité du lecteur, de mettre en évidence les faits fournissant la base de nos considérations. C'est ce que nous ferons dans les Chapitres II et III.

Soit alors (q) une équation oscillatoire, $q(t) \in C_{j=(-\infty\ \infty}$.

1. PHASES. Étant donnée une base de l'équation (q), c'est-à-dire un couple ordonné d'intégrales linéairement indépendantes de (q),

u, v, on entend sous une (première) phase de cette base toute fonction *continue dans* j, $\alpha(t)$, satisfaisant en dehors des zéros de l'intégrale v, à la relation $tg\,\alpha(t) = [u(t) : v(t)]$. On voit que la valeur de toute phase α dans un zéro de u (v égale à un multiple paire (impaire) de $\pi/2$.

Les phases de la base u, v forment un système dénombrable dont les éléments ne diffèrent l'un de l'autre que par des entiers multiples de π. Toute phase de ce système se trouve bien déterminée par sa valeur dans un point quelconque, par exemple dans un zéro de u. Si l'on avait choisi un zéro de u, a_0, toute phase du système en question, α, est bien déterminée par sa valeur $\nu\pi$ au point a_0, et l'on écrit:

$$\alpha(t) = {}_\nu\mathrm{Arc\,tg}\,[u(t) : v(t)] \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Rien n'empêche, naturellement, de regarder les différentes phases de u, v en tant que les branches de la fonction multivalente Arc tg $[u(t) : v(t)]$ $(t \in j)$.

Sous une (première) phase de l'équation (q) on entend une phase d'une base de (q).

Pour simplifier le langage nous parlons, par occasion, des phases du porteur q au lieu de celles de l'équation (q) et nous employons la même simplification dans d'autres cas (intégrales de q, etc.).

Toute phase de (q), α, jouit dans j des propriétés suivantes:

$$(1) \quad 1.\ \alpha(t) \in C_1^3; \quad 2.\ \alpha'(t) \neq 0; \quad 3.\ \lim_{t \to \sigma\infty} \alpha(t) = \sigma\infty\,\mathrm{sgn}\,\alpha' \; (\sigma = \pm 1).$$

α étant une phase de (q), toute base u, v admettant cette phase consiste en intégrales comprenant une constante arbitraire $c \neq 0$,

$$(2) \qquad u(t) = c \cdot \frac{\sin\alpha(t)}{\sqrt{|\alpha'(t|}}, \quad v(t) = c \cdot \frac{\cos\alpha(t)}{\sqrt{|\alpha'(t)|}},$$

et l'on a la relation

$$(3) \qquad q(t) = -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t) \qquad (t \in j);$$

le symbole $\{\ \}$ indique la dérivée schwarzienne de la fonction α au point t:

$$\{\alpha, t\} = \frac{1}{2}\frac{\alpha'''(t)}{\alpha'(t)} - \frac{3}{4}\frac{\alpha''^2(t)}{\alpha'^2(t)}.$$

Une phase α s'appelle dispersionnelle si l'on a, dans j, toujours $\alpha(t) > t$ ou bien $\alpha(t) < t$; dans le premier cas α prend le nom phase supérieure et dans l'autre phase inférieure. Toute phase dispersionnelle résulte constamment croissante.

Une phase α s'appelle élémentaire si elle vérifie dans j la relation

$$\alpha(t+\pi) = \alpha(t) + \pi \cdot \operatorname{sgn} \alpha' ;$$

une telle phase peut être exprimée par formule $\alpha(t) = \operatorname{sgn} \alpha' \cdot t + p(t)$, la fonction $p(t) \in C_t^3$ étant périodique avec π et soumise à la condition $\operatorname{sgn} \alpha' \cdot p'(t) > -1$. La dérivée d'une phase élémentaire α, α', résulte périodique avec π $(t \in j)$. L'ensemble de toutes les phases élémentaires forme un sous-groupe de $\mathfrak{G}$, dit le sous-groupe des phases élémentaires.

Dans la théorie qui nous occupe un rôle important est joué par les phases de l'équation (-1): $y'' = -y$. Pour la commodité de langage nous les appelons phases spéciales. Il s'agit donc des éléments du sous-groupe fondamental $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$. Il est facile à voir que, toute phase spéciale, $\varepsilon(t)$, peut être exprimée par la formule

$$\varepsilon(t) = {}_{\nu}\text{Arc tg}\, c \cdot \frac{\sin(t+a)}{\sin(t+b)}, \tag{4}$$

ν étant un entier et a, b; c des constantes telles que $0 \leq a, b < \pi$, $c \cdot \sin(a-b) \neq 0$; le second membre désigne la branche de la fonction correspondante Arc tg, prenant au point $-a$ la valeur $\nu\pi$ $(\nu = 0, \pm 1, \ldots)$. Toute phase spéciale est, d'après (3), une intégrale de l'équation $-\{X, t\} = X'^2(t) - 1$, et elle résulte élémentaire.

Pour simplifier le langage nous appelons fonction-phase toute fonction $\alpha(t)$ définie dans j et vérifiante dans cette intervalle les trois conditions (1). Il est clair que chaque phase de (q) est une fonction-phase; inversement, chaque fonction-phase est une phase de cette équation (q) dont le porteur est donné par une formule telle que (3). C'est alors de cette raison que nous parlons, par occasion, de phases au lieu de fonctions-phases et nous transferons des notions définies pour phases aux fonctions-phases.

α étant une fonction-phase nous désignons occasionnellement par q_α le porteur admettant la phase α. On a, par exemple, pour $\varepsilon \in \mathfrak{F}$,

$$q_\varepsilon(t) = -1 \qquad (t \in j). \tag{5}$$

α, β étant des fonctions-phases, la dérivée schwarzienne de la fonction composée $\alpha\beta$, au point $t \in j$, obéit la formule ([1]):

$$\}\alpha\beta, t\{ = \}\alpha, \beta(t)\{\, \beta'^2(t) + \}\beta, t\{.$$

Celle-ci entraîne, en vertu de (3),

$$q_{\alpha\beta}(t) = [1 + q_\alpha\, \beta(t)]\, \beta'^2(t) + q_\beta(t). \tag{6}$$

2. Dispersions centrales. On appelle dispersion centrale (de première espèce) d'indice $\nu\ (=0, \pm 1, \ldots)$, φ_ν, la fonction définie dans j de la manière suivante: pour $t \in j$ la valeur $\varphi_\nu(t)$ est le $|\nu|$-ième nombre conjugué avec t et situé à droite ou à gauche de t suivant que $\nu > 0$ ou $\nu < 0$; pour $\nu = 0$ on pose $\varphi_0(t) = t\ (t \in j)$. La fonction φ_1 prend le nom de dispersion fondamentale. On voit que, toute intégrale de (q) s'annulant en t a précisément $n\ (\geq 1)$ zéros dans l'intervalle $[t, \varphi_n(t))$ et $n+1$ zéros dans $[t, \varphi_n(t)]$.

Toute dispersion centrale φ_ν est une fonction-phase constamment croissante: $\varphi'_\nu(t) > 0\ (t \in j)$ et elle résulte supérieure ou bien inférieure suivant que $\nu > 0$ ou bien $\nu < 0$. On a pour chaque ν: $\varphi_{\nu-1}(t) < \varphi_\nu(t)\ (t \in j)$.

Toute dispersion centrale φ_ν transforme, dans j, chaque intégrale de (q), y, dans elle-même dans l'esprit de la formule

$$y[\varphi_\nu\ t] = (-1)^\nu\, |\varphi'_\nu(t) \cdot y(t). \tag{7}$$

Subsiste, pour chaque dispersion centrale φ_ν et toute phase α de (q) la relation abelienne

$$\alpha\varphi_\nu(t) = \alpha(t) + \nu \cdot \pi \cdot \operatorname{sgn} \alpha' \qquad (t \in j). \tag{8}$$

On voit que φ_ν s'exprime en terme de α par la formule

$$\varphi_\nu(t) = \alpha^{-1}\,[\alpha(t) + \nu \cdot \pi \cdot \operatorname{sgn} \alpha']. \tag{9}$$

α^{-1} étant, naturellement, la fonction inverse de α.

Ajoutons à cette occasion la remarque suivante au sujet des équations (q) admettant des dispersion centrales linéaires ([3]).

Si la dispersion centrale d'un certain indice $\nu\ (\neq 0)$, φ_ν, est linéaire et précisément de la forme $\varphi_\nu(t) = t + c\ (t \in j,\ \text{const} = c \neq 0)$, le porteur q résulte périodique avec c et, d'après (7), toutes ses intégrales sont semi-périodiques ou périodiques avec c suivant que ν est impaire ou paire. La réciproque de cette proposition est encore vraie. Si, en particulier, $\nu=1$, la distance de deux zéros consécutifs quelconques de toute intégrale de q égale à $|c$, et inversement. La formule (8) entraîne: On a $\varphi_1(t)=t+\pi\ (t\in j)$ si et seulement si toutes les phases de (q) sont élémentaires.

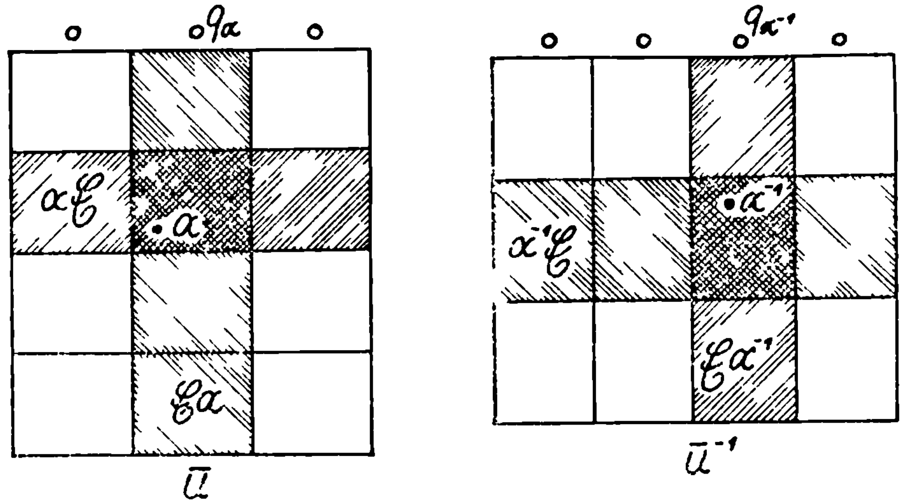
3. Blocs des équations (q). On arrive à la notion des blocs des équations (q) si l'on considère les deux décompositions du groupe $\mathfrak{G}$ en classe latérales à droite et à gauche, par rapport au groupe $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{G})$:

$$G_d=\mathfrak{G}\,{}_d\mathfrak{F}.\qquad G_g=\mathfrak{G}\,{}_g\mathfrak{F}.$$

Rappelons que, toute classe à dioite, $a_d\in G_d$, est l'ensemble $\overline{a_d}=\mathfrak{F}\alpha$ tandis qu'on a, pour toute classe à gauche, $a_g\in G_g$, $\overline{a_g}=\alpha\mathfrak{F}.\ \alpha$ étant n'importe quel élément de la classe correspondante. On sait que, toute classe a_d consiste précisément en phases d'une équation (q) bien définie et dont le porteur obéit une formule telle que (3), pendant que toute classe a se trouve formée par les fonctions inverses des phases du porteur q_{a-1} admettant la phase α [1].

Or, on sait que les deux décompositions en question sont associables (complémentaire) ([4]). Cela veut dire ceci: il existe une décomposition du groupe $\mathfrak{G}, U$, telle que chaque élément $u\in U$ est la réunion de certains éléments de l'une et, en même temps, de l'autre décomposition G_d, G , et en plus, deux arbitraires éléments $a\in G_d$, $c\in G_g$ qui sont contenus dans le même élément $u\in U$ se coupent dans un ensemble non-vid: $\overline{a}\cap\overline{c}\neq 0$. Nous appelons *blocs des phases* les éléments de $\overline{U}$. À tout bloc $u\in U$ correspond un bloc bien déterminé, u [1], appelé inverse de u; ce bloc u [1] est la réunion de toutes les classes de chaque décomposition G_d, G , qui sont inverses des classes de l'autre décomposition cortenues dans u. On a é idemment $(\overline{u}\ ^1)\ ^1=u$. Inutile de dire qu'on appelle deux classes $a\in G_d$, $c\in G_g$ inverses l'une de l'autre si elles consistent en fonctions mutuellement inverses.

Convenons de dire qu une équation (q) appartient au bloc $\overline{u}$ si les phases de (q) sont contenues dans u. Pour simplifer le langage nous disons que les equat'ons (q) appartenantes au même bloc $\overline{u}$ forment elles-même un bloc; celt i-ci sera désigné, habituellement, par la même lettre $\overline{u}$. Deux équatıons du même bloc, $(q), (q^*)$, s'appellent mutuellement *associées*, plus simplement: associées, et chacune d'elles est dite associée avec l'autre. Existe donc la décomposition D de l'ensemble



Sont représentés deux blocs des phases, mutuellement inverses, $u, \bar{u}^{-1} \in U$. Chacun d'eux est la réunion de certains éléments de G_d (rectangles verticaux) et en même temps de certains éléments de G_g (rectangles horizontaux). Chaque élément de G_d, situé dans u ou u^{-1} consiste précisément en phases d'un porteur (petits circles) tandis que chaque élment de G_g consiste en fonctions inverses des phases d'un porteur appartenant au bloc inverse $\bar{u}^{-1}$ ou u. Pour toute $\alpha \in \bar{u}$ on a $\alpha^{-1} \in u^{-1}$ et donc $\mathfrak{J}\alpha, \alpha\mathfrak{J} \subset u$; $\mathfrak{J}\alpha^{-1}, \alpha^{-1}\mathfrak{J} \subset \bar{u}^{-1}$ et les correspondances $\mathfrak{J}\alpha <\;> \alpha^{-1}\mathfrak{J}$ et $\alpha\mathfrak{J} <\!\!-\!\!-\!\!> \mathfrak{J}\alpha^{-1}$ résultent biunivoques.

$\{(q)\}$ en blocs des équations (q) mutuellement associées.

Si une équation (q) admettant la phase α appartient au bloc des phases, u, la classe latérale $\alpha\,\mathfrak{J} \in \mathfrak{G}/_g\mathfrak{J}$ se trouve située, manifestement, dans u. Cette classe coupe l'ensemble des phases de toute équation associée avec $(q), (q^*)$, dans un ensemble non-vid. Il en résulte que (q^*) admet la phase $\alpha^* = \alpha\varepsilon$, $\varepsilon \in \mathfrak{J}$ étant une phase convenable. Inversement, toute équation (q^*) admettant une phase de la forme $\alpha\varepsilon, \varepsilon \in \mathfrak{f}$, résulte associée avec (q). Si l'on applique la formule (6) on trouve

$$q^*(t) = -1 + [1 + q\,\varepsilon(t)]\,\varepsilon'^2(t). \tag{10}$$

On voit que les équations (q^*) associées avec (q) sont précisément celles que fournit la formule (10), $\varepsilon(t) \in \mathfrak{J}$.

En se servant de la formule (9) on trouve facilement qu'il subsiste entre les dispersions centrales φ_ν et φ_ν^* de (q) et (q^*) la relation suivante

$$\varphi_\nu^*(t) = \varepsilon^{-1}\,\varphi_{\nu\cdot \mathrm{sgn}\,\varepsilon'}\,\varepsilon(t) \qquad (\nu = 0, \pm 1, \ldots;\ t \in j). \tag{11}$$

Si l'on a pour un certain ν: $\varphi_\nu(t)=t+\pi$, on a encore, d'après (11): $\varphi^*_\nu(t)=t+\pi$.

Conclusion: *si toutes les intégrales de l'équation* (q) *sont demi-periodiques* (*périodiques*) *avec* π, *chaque équation associée avec* (q) *jouit de la même propriété.*

Nous allons terminer ce Chapitre par la remarque suivante: il a été dit qu'à tout bloc $\bar{u}\in U$ correspond un bloc bien déterminé $u^{\ 1}$ appelé inverse de $\bar{u}$ et dont les relations avec u ont été mises en évidence. Il en résulte qu'à tout bloc $u\in D$ correspond biunivoquement un bloc inverse $u^{\ 1}\in D$; les relations en question se manifestent par ceci que, chacun des blocs $u, u^{\ 1}$ consiste précisément en équations (q) qui sont inverses de toute équation (q) située dans l'autre.

III. Porteurs périodiques.

Nous passons à la considération des équations (q) aux porteurs périodieues avec π: $q(t+\pi)=q(t)$ $(t\in j)$. Dans ce cas les éléments de la théorie précédente tels que phases, dispersions centrales, etc., jouissent, naturellement, de certaines particularités et, en plus, elles entrent en relations avec les éléments de la théorie de FLOQUET. Voici la situation qui nous sert de base pour la solution du problème énoncé plus haut.

4. PHASES. Si le porteur q est périodique avec π, il existe pour toute phase α de q, une phase spéciale ε telle que

$$\alpha(t+\pi)=\varepsilon\alpha(t) \qquad (t\in j). \tag{12}$$

Inversement, s'il existe, pour une phase α de q une phase spéciale satisfaisant à (12), le porteur q résulte périodique avec π ([5]).

La formule (12) écrite au point $\alpha^{\ 1}(t)$ donne: $\alpha(\alpha^{\ 1}(t)+\pi)= =\varepsilon(t)$; ici le premier membre est la valeur de la dispersion centrale $\varphi_{\operatorname{sgn}\alpha'}$ du porteur q_{-1} au point t. Il en résulte ceci:

1. *La phase spéciale figurant dans* (12), ε, *résulte supérieure ou inférieure suivant le cas* $\alpha'>0$ *ou* $\alpha'<0$;

2^0 *toutes les dispersions centrales de chaque équation inverse de* (q), (q), *ont la forme* (4), *les constantes* $a, b; c; \nu$ *étant assujeties à véri-*

fier de certaines conditions supplémentaires. Inutile de dire que ces dispersions résultent élémentaires.

5. DISPERSIONS CENTRALES. Si le porteur q est périodique avec π la dispersion fondamentale de q et donc toute dispersion centrale de (q) sont élémentaires ([5]). Subsiste, par conséquent, pour des entiers quelconques, μ, ν, la formule

$$(13) \qquad \varphi_\nu(t+\mu\pi) = \varphi_\nu(t) + \mu\pi \qquad (t \in j).$$

En ce qui concerne les équations associées, nous avons déjà remarqué que, la périodicité avec π du porteur q entraîne la même propriété de tout porteur q^* associé avec q.

6. RACINES CARACTÉRISTIQUES. Il est bien connu que, dans la théorie de FLOQUET pour les équations (q) aux porteurs périodiques avec π, on associe avec toute équation (q) une équation algébrique telle que

$$\varrho^2 - A\varrho + 1 = 0 \qquad (A = \text{const.}).$$

et dont les racines $\rho_\sigma (\sigma = \pm 1)$, appelées les racines caractéristiques de (q), donnent des informations au sujet du comportement des intégrales de l'équation (q). On a, manifestement, $\rho_1 \rho_{-1} = 1$.

On connait bien la signification de A et c'est pouquoi nous n'y insistons pas. Les racines ρ_σ résultent réelles ou imaginaires suivant le cas $|A| \geq 2$ ou bien $|A| < 2$. Dans le cas $A > 2$ $(A < -2)$ les nombres ρ_σ sont positifs (négatifs) et mutuellement différents; pour $A = 2 (A = -2)$ on a $\rho_1 = \rho_{-1} = 1$ $(\rho_1 = \rho_{-1} = -1)$. Dans le cas $-2 < A < 2$ les racines en question résutent imaginaires et de la forme $\rho_\sigma = \exp(\sigma\, a\, \pi\, i)$; $0 < a < 1$.

Récemment on est parvenu à caractériser les racines caractéristiques de (q) en relation avec les phases et les dispersions centrales correspondantes ([6], [7]). Voici les résultats que nous réproduissons en légères modifications:

Soit (q) une équation au porteur périodique avec π.

1. *Pour que les racines caractéristiques de* (q), ρ_σ $(\sigma = \pm 1)$, *soient réelles, il faut et il suffit, qu'il existe un point* $x \in j$ *et un nombre naturel* n (≥ 1) *vérifiants la formule*

$$(14) \qquad \varphi_n(x) = x + \pi,$$

φ_n *étant la dispersion centrale d'indice* n *de* (q). *Si cette condition est* *remplie on a*

(15) $$\varrho_\sigma = (-1)^n \, [\gamma'_n(x)]^{\sigma/2} \, .$$

Pour la commodité de langage, x prend le nom de nombre caractéristique de type n et donc, les équations (q) aux racines caractéristiques réelles sont précisément celles qui admettent des nombres caractéristiques en question .

2. *Pour que les racines caractéristiques de* $(q), \rho_\sigma (\sigma = \pm 1)$ *soient imaginaires et résultent égales à* $\rho_\sigma = \exp (\sigma \, a \, \pi \, i)$. $0 < a < 1$, *il faut et il suffit qu'il existe une phase de* $(q), \alpha$, *vérifiante dans* j *la relation*

(16) $$\alpha (t + \pi) = \alpha (t) + (a + 2n) \pi,$$

n étant un nombre entier.

Cela étant insistons pour un moment sur ces résultats pour se rendre compte de quelques conclusions qui en vont immédiatement.

Considérons une équation (q) au porteur périodique avec π.

Supposons que toutes les intégrales de q sont semi-périodiques avec π, la distance entre deux zéros consécutifs quelconques de toute intégrale de q étant egale à π. Dans ces conditions on a, d'après n^0 2, $\varphi_1 (t) = t + \pi$ et donc, tout point $t \in j$ résulte caractéristique de type 1. On a par conséquent $\rho_\sigma = -1$ $(\sigma = \pm 1)$. D'autre part, toute phase de q, α, est élémentaire (n^0 2) et donc sa fonction inverse α^{-1} jouit encore de cette propriété (n^0 1). Il en résulte que la dispersion fondamentale $\bar{\varphi}_1$ de chaque équation inverse de $(q), (\bar{q})$, a la même forme linéaire et donc $\bar{\varphi}_1 (t) = t + \pi$. Par conséquent, toutes les intégrales de $(\bar{q})$ sont encore semi-périodiques avec π, la distance entre deux zéros consécutifs quelconques de toute intégrale de $(\bar{q})$ étant égale à π, et subsistent pour les racines caractéristiques correspondantes $\bar{\varrho}_\sigma$ les égalités $\bar{\varrho}_\sigma = \varrho_\sigma = -1$ $(\sigma = \pm 1)$.

Supposons, en second lieu, que les racines caractéristiques de (q), ϱ_σ, résultent imaginaires et, précisément $\varrho_\sigma = \exp (\sigma \, a \, \pi \, i)$; $0 < a < 1$, $\sigma = \pm 1$. Existe alors une phase de (q), α, vérifiant dans j la relation telle que (16). Cette relation écrite au point $\alpha^{-1} (t)$ donne

(17) $$\varphi_{\operatorname{sgn} \alpha'} (t) = t + (a + 2n) \pi,$$

le premier membre étant, naturellement, la dispersion fondamentale ou bien son inverse du porteur $q_{\alpha^{-1}}$, suivant que $\alpha' > 0$ ou $\alpha' < 0$. L'équation inverse de (q), $(q_{\alpha-1})$, résulte donc péridique avec $(a+2n)\,\pi$ et, en plus, toutes ses intégrales sont semi-périodiques avec $(a+2n)\pi$.

IV. La solution du problème proposé.

Nous voilà en mésure de resoudre le problème proposé, ce qui peut se faire, grâce aux explications précédentes, bien rapidement et sans aucune espèce de difficultés. Nous allons considérer deux équations $(q), (q^*)$ aux porteurs périodiques avec π et associées l'une avec l'autre. Nous désignons par α, α^*; $\varphi_\nu, \varphi_\nu^*$; ϱ_σ, ϱ_σ^* $(\sigma = \pm 1)$ les éléments correspondants et rappelons, une fois de plus, ceci: les porteurs q, q^* étant périodiques avec π, les fonctions φ_ν, φ_ν^* résultent élémentaires et donc, leurs dérivées φ_ν', $\varphi_\nu^{*\prime}$ sont encore périodiques avec π. Comme les $(q), (q^*)$ sont mutuellement associées, il existe, pour toute phase de (q), α, une phase spéciale ε telle que $\alpha^* = \alpha\varepsilon$ est une phase de (q^*) et subsistent, dans j, d'après (11), les formules

$$(18) \quad \varphi_\nu^*(t) = \varepsilon^{-1}\,\varphi_{\nu\cdot\operatorname{sgn}\varepsilon'}\,\varepsilon(t), \; \varphi_\nu^{*\prime}(t) = \varepsilon^{-1\prime}\,[\varphi_{\nu\cdot\operatorname{sgn}\varepsilon'}\,\varepsilon(t)]\cdot\varphi'_{\nu\cdot\operatorname{sgn}\varepsilon'}[\varepsilon(t)]\cdot\varepsilon'(t).$$

Subsiste la « loi d'inertie des racines caractéristiques ».

THÉORÈME. *Deux équations $(q), (q^*)$ aux porteurs périodiques avec π et mutuellement associées ont les mêmes racines caractéristiques.*

DÉMONSTRATION. *a*. RACINES CARACTÉRISTIQUES RÉELLES. Supposons que les nombres ρ_σ sont réels. Dans ce cas il existe un point caractéristique de type $n\,(n \geq 1)$, $x \in j$, et l'on a une formule telle que (14).

Posons

$$x' = \varepsilon^{-1}(x).$$

On a alors, en vertu de (11),

$$\varphi_n^*(x') = \varepsilon^{-1}\,\varphi_{n\cdot\operatorname{sgn}\varepsilon'}\,\varepsilon(x') = \varepsilon^{-1}\,\varphi_{n\cdot\operatorname{sgn}\varepsilon'}(x) = \varepsilon^{-1}(x + \operatorname{sgn}\varepsilon'\cdot\pi) =$$
$$= \varepsilon^{-1}(x) + \pi = x' + \pi\,;$$

cela montre que x' est un point caractéristique de type n pour l'équation (q^*). Les nombres ρ_σ^* sont donc réels.

Posons

$$\varrho_\sigma = (-1)^n\,[\varphi_n'(x)]^{\sigma 2}, \quad \varrho_\sigma^* = (-1)^n\,[\varphi_n^{*\prime}(x')]^{\sigma 2} \quad (\sigma = \pm 1).$$

On a d'après (18)

$$q_n^{*\prime}(x') = \varepsilon^{-1\prime}[\varphi_{n\cdot \operatorname{sgn}\varepsilon'}(x)]\cdot \varphi'_{n\cdot \operatorname{sgn}\varepsilon'}(x)\cdot \varepsilon'[\varepsilon^{-1}(x)] =$$

$$= \varepsilon^{-1\prime}(x + \operatorname{sgn}\varepsilon'\cdot\pi)\cdot \varepsilon'[\varepsilon^{-1}(x)]\cdot \varphi'_{n\cdot \operatorname{sgn}\varepsilon'}(x) =$$

$$= \underbrace{\varepsilon^{-1\prime}(x)\cdot \varepsilon'[\varepsilon^{-1}(x)]}_{1}\cdot \varphi'_{n\cdot \operatorname{sgn}\varepsilon'}(x) = [\varphi'_n(x)]^{\operatorname{sgn}\varepsilon'}$$

et donc

$$\varrho^*_\sigma = \varrho_{\sigma\cdot \operatorname{sgn}\varepsilon'} \qquad (\sigma = \pm 1).$$

b. Racines caractéristiques imaginaires. Supposons que les nombres ρ_σ sont imaginaires et précisément $\rho_\sigma = \exp(\sigma a \pi i)$; $0<a<1$; $\sigma = \pm 1$. Dans ce cas il existe une phase α vérifiante dans j la relation telle que (16). Subsistent donc les formules

$$\alpha^*(t + \pi\cdot \operatorname{sgn}\varepsilon') = \alpha\varepsilon(t + \pi\cdot \operatorname{sgn}\varepsilon') = \alpha[\varepsilon(t) + \pi] = \alpha\varepsilon(t) + (a + 2n)\pi =$$

$$= \alpha^*(t) + (a + 2n)\pi$$

et donc

$$(19) \qquad \alpha^*(t + \pi\cdot \operatorname{sgn}\varepsilon') = \alpha^*(t) + (a + 2n)\pi \qquad (t \in j).$$

Si $\operatorname{sgn}\varepsilon' = 1$, la phase α^* vérifie la relation (16).

Si $\operatorname{sgn}\varepsilon' = -1$, la formule (19) écrite au point $t+\pi$ donne

$$\alpha^*(t) = \alpha^*(t + \pi) + (a + 2n)\pi\,;$$

on voit que la fonction $-\alpha^*$, qui est encore une phase de (q^*), vérifie la relation (16). Cela achève la démonstration.

Exemple. Nous allons terminer nos considérations par indiquer explicitement le bloc des équations contenant l'équation de Mathieu

$$y'' = (-\lambda + 2h^2\cdot\cos 2t)y \quad (t \in j\,;\ \lambda \neq 0 \neq h = \text{const.}, -\lambda + 2h^2 < -1).$$

En posant $p = -\lambda + 2h^2\,(< -1)$, $k^2 \quad 4h^2 : [-(p+1)]\ (>0)$, l'équation précédente prend la forme

$$(\mathrm{m}) \qquad y'' = p\cdot\left(1 + \frac{4h^2}{-p}\cdot\sin^2 t\right)y.$$

Récemment nous avons montré ([2]) que le bloc des équations (q^*) associées avec (m) consiste en équations aux porteurs

$$q^*(t) = -1 - \frac{4h^2c^2\sin^2(b-a)}{k^2} \cdot \frac{c^2(1+k^2)\sin^2(a+t)+\sin^2(b+t)}{[c^2\cdot\sin^2(a+t)+\sin^2(b+t)]^3},$$

les $a, b; c$ étant des constantes telles que $0 \leq a, b < \pi$; $c \cdot \sin(a-b) \neq 0$. Deux équations de ce bloc, déterminées par les valeurs $a, b; c$ et $a', b'; c'$ coïncident si et seulement si $a = a'$, $b = b'$, $c^2 = c'^2$. D'après le théorème précédent, les racines caractéristiques de toutes les équations (q^*) répondant aux mêmes valeurs de p et h sont les mêmes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] O. Borůvka: *Linear Differential Transformations of the Second Order.* The English Universities Piess, London, 1971.

[2] O. Borůvka: *Contribution a la théorie algébrique des équations $y'' = q(t)y$.* Boll. dell'U. M. I. (sous presse).

[3] F. Neuman: *Linear Differential Equations of the Second Order and Their Applications.* Rend. di Mat. (3), 4, S. VI (1971), 559-617.

[4] O. Borůvka: *Foundations of the Theory of Groupoids and Groups.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1974.

[5] O. Borůvka: *Sur la périodicité de la distance des zéros des intégrales de l'équation différentielle y'' $q(t)y$.* Tensor, N. S. 26 (1972), 121-128.

[6] O. Borůvka: *Sur quelques compléments à la théorie de Floquet pour les équations différentielles du deuxième ordre.* Ann. di mat. p. ed app. (sous presse).

[7] F. Neuman: *Note on Bounded Non-periodic Solutions of Second-order Linear Differential Equations with Periodic Coeffcients.* Math., Nachrichten, 39 (1969), 217-222.

Pervenuto in Redazione il 3 gennaio 1975.