Otakar Borůvka

Über die Differentialgleichungen $y'' = g(t)y$ mit periodischen Abständen der Nullstellen ihrer Integrale

Wissenschaftliche Schriftenreihe der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt, 1975. (5. Tagung über Probleme und Methoden der mathematischen Physik, 1975), 239-255

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500158

O. BORŮVKA

Ueber die Differentialgleichungen $y'' = q(t)\,y$ mit periodischen Abständen der Nullstellen ihrer Integrale

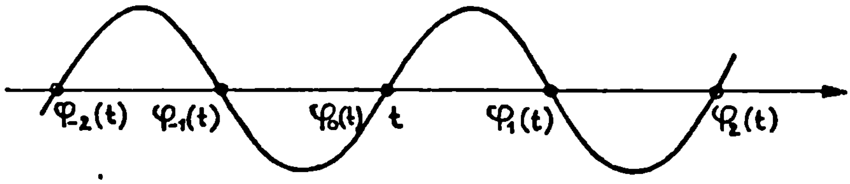
1. In meinem Vortrag werde ich mich mit gewöhnlichen linearen homogenen und oszillatorischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung befassen. Ich werde diese Differentialgleichungen in der Jacobischen Form annehmen

$$(q) \qquad y'' = q(t)\,y$$

und voraussetzen, dass der Träger q reell und stetig ist, und zwar im Intervall $j = (-\infty, \infty)$. Eine Differentialgleichung (q) heisst oszillatorisch, wenn jedes ihrer Integrale unendlich oftmal verschwindet, wobei sich die Nullstellen gegen $-\infty$ und ∞ häufen. Einen Prototyp dieser Differentialgleichungen stellt ersichtlich die Differentialgleichung mit dem Träger -1 dar, also die Differentialgleichung $y'' = -y$, von der wir noch zu hören haben werden.

Wie aus dem Titel meines Vortrages ersichtlich ist, werde ich mich mit einer besonderen Klasse der Differentialgleichungen (q), die ich etwa mit A bezeichnen will, befassen. Um dieselbe definieren zu können, will ich zunächst den Begriff von Zentraldispersionen (erster Art) kurz erläutern.

Zu jeder ganzen Zahl ν gehört die Zentraldispersion φ_ν mit dem Index ν, die so erklärt ist: Für $\nu \neq 0$ ist der Wert $\varphi_\nu(t)$, $t \in j$, der $|\nu|$-te rechtsseitig oder linksseitig konjugierte Punkt mit t, je nachdem ob ν positiv oder negativ ist. Mit anderen Worten: Wenn man ein an der Stelle t verschwindendes Integral der Differentialgleichung (q) betrachtet, so sind die übrigen Nullstellen dieses Integrals nach rechts und nach links gerade die Werte der Zentraldispersionen mit einzelnen Indizes im Punkte t. Für $\nu = 0$ setzt man $\varphi_0(t) = t$.



Insbesondere heisst die Zentraldispersion mit dem Index 1, φ_1, die Fundamentaldispersion. Von den Eigenschaften der Zentraldispersionen will ich nur die folgenden anführen:
1^0 Jede Zentraldispersion φ_ν gehört der Klasse C_j^3 an,
2^0 die Ableitung φ_ν' ist stets positiv, 3^0 φ_ν nimmt jeden Wert an.

Parallel zu den Zentraldispersionen definiert man die sogenannten Abstandsfunktionen d_ν , und zwar im Sinne der Formel:

$$d_\nu(t) = \varphi_\nu(t) - t \qquad (t \in j)$$

deren Inhalt evident ist: $d_\nu(t)$ ist der Abstand des konjugierten Punktes $\varphi_\nu(t)$ von t .

Und nun kann ich schon die in Frage stehende Klasse A von Differentialgleichungen (q) definieren: Es handelt sich um Differentialgleichungen (q), deren Fundamentaldispersion φ_1 elementar ist. Und zwar elementar in folgendem Sinne:

$$\varphi_1(t + \pi) = \varphi_1(t) + \pi \quad . \tag{1}$$

Der Inhalt dieser Formal (1) ist folgender: Wenn man irgendwo im Intervall j zwei Punkte t, $t+\pi$ wählt, deren Abstand also π ist, so haben die ersten rechtsseitig konjugierten Punkte $\varphi_1(t)$, $\varphi_1(t+\pi)$ ebenfalls den Abstand π. Nun, es lässt sich leicht zeigen, dass die Fundamentaldispersion φ_1 elementar ist dann und nur dann, wenn die zugehörige erste Abstandsfunktion d_1 mit π periodisch ist. Ferner kann ebenso leicht gezeigt werden, dass, wenn die Fundamentaldispersion φ_1 elementar ist, dasselbe für alle Zentraldispersionen derselben Differentialgleichung (q) gilt, und in diesem Fall sind auch alle zugehörigen Abstandsfunktionen mit π periodisch. Folglich kann die zu untersuchende Klasse A von Differentialgleichungen (q) einfach so definiert werden:

Es handelt sich um Differentialgleichungen (q), deren Zentraldispersionen sämtlich elementar sind, oder, mit anderen Worten, deren Abstandsfunktionen mit π periodisch sind.

Die Bedeutung der Untersuchung gerade dieser Klasse von Differentialgleichungen (q) ist durch die folgende Tatsache unterstrichen: Jede Differentialgleichung (q), deren Träger q mit π periodisch ist, für die also $q(t+\pi) = q(t)$ gilt, für $t \in j$, gehört zur Klasse A. Somit hat man das erste Resultat:

Die Zentraldispersionen jeder Differentialgleichung mit π-periodischem Träger sind sämtlich elementar, und zugleich sind alle zugehörigen Abstandsfunktionen mit π periodisch.

Man erhält auf diese Weise einen neuen Zugang zu der klassischen Theorie der Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten und folglich auch zu der klassischen Theorie von Floquet, was naturgemäss zu neuen Resultaten führt, wie wir sehen werden.

2. In meinen weiteren Ausführungen werde ich einige Vorkenntnisse benötigen, die ich nun kurz erläutern werden. Es handelt sich um 1° den Phasenbegriff, 2° den Begriff der Phasengruppe und 3° den, wie ich meine, neuen Begriff der inversen Differentialgleichung (q).

Zum Phasenbegriff: Unter einer Phase der von zwei linear unabhängigen Integralen $u(t)$, $v(t)$ gebildeten Basis der Differentialgleichung (q) versteht man jede Funktion α, die im Intervall j stetig ist und überall dort, wo $v(t) \neq 0$ ist, die folgende Funktionalgleichung erfüllt:

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{u(t)}{v(t)} .$$

Unter einer Phase der Differentialgleichung $\grave{(q)}$ versteht man eine Phase irgendeiner Basis der Differentialgleichung (q).

Die folgenden Eigenschaften von Phasen einer Differentialgleichung (q) sind wohlbekannt: Erstens gehört jede Phase von (q) der Klasse C_j^3 an, zweitens ist ihre erste Ableitung überall von Null verschieden und drittens, was mit der oszillatorischen Eigenschaft von Integralen der Differentialgleichung (q) zusammenhängt, ist jede Phase von unten und oben unbeschränkt. Wichtig ist die folgende Tatsache:

Für jede Phase α und jede Zentraldispersion φ_ν von (q) besteht die Beziehung

$$\alpha\varphi_\nu(t) = \alpha(t) + \nu\pi \operatorname{sgn} \alpha' \qquad (t \in j) ,$$

die als die Abelsche Beziehung für Phasen bezeichnet wird.

Wenn man also $\alpha'(t) > 0$ annimmt, so erhält man $\alpha\varphi_\nu(t) = \alpha(t) + \nu\pi$, woraus $\varphi_\nu(t) = \alpha^{-1}[\alpha(t) + \nu\pi]$ folgt. α^{-1} bedeutet natürlich die zu α inverse Funktion. Man sieht, dass jede Zentraldispersion von (q), φ_ν, vermöge jeder wachsenden Phase α dieser Differentialgleichung im Sinne der eben angeführten Formel ausgedrückt werden kann.

Eine Phase α von (q) heisst elementar, wenn

$$\alpha(t+\pi) = \alpha(t) + \pi \operatorname{sgn} \alpha' \qquad (t \in j)$$

gilt.

Zum Begriff der Phasengruppe: Unter der Phasengruppe versteht man die aus den Phasen aller Differentialgleichungen (q) gebildete Menge, wobei die Gruppenoperation als Zusammensetzung von Funktionen definiert ist. Dieselbe wird mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet. Das Einselelement von $\mathfrak{G}$ ist natürlich die Funktion $\varphi_0(t) = t$ $(t \in j)$. Die Elemente von $\mathfrak{G}$ werden Phasenfunktionen genannt. Die Struktureigenschaften von $\mathfrak{G}$ sind weitgehend bekannt. Ich werde mich natürlich nur auf diejenigen beschränken, die ich unmittelbar gebrauchen werde.

Zunächst bilden die Phasen der Differentialgleichung (-1), d.h. der oben erwähnten Differentialgleichung $y'' = -y$, eine Untergruppe $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{G}$, also $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{G}$, die als die Fundamentaluntergruppe von $\mathfrak{G}$, kürzer die Fundamentalgruppe, bezeichnet wird. Diese Fundamentalgruppe erzeugt zwei Nebenklassenzerlegungen von $\mathfrak{G}$, die rechtsseitige Nebenklassenzerlegung $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{E}$ und die linksseitige Nebenklassenzerlegung $\mathfrak{G}/_\ell\mathfrak{E}$, die voneinander verschieden sind. Ich werde der Kürze halber diese Zerlegungen als die erste und zweite Zerlegung von $\mathfrak{G}$ bezeichnen.

Jedes Element der ersten Zerlegung hat die Form $\mathfrak{f}\alpha$, wobei α eine feste Phasenfunktion ist, und es entsteht, wie wir sehen, durch Zusammensetzung der Elemente von $\mathfrak{f}$ mit α. Ueberaus wichtig ist die Tatsache, dass dieses Element die Phasenmenge genau einer Differentialgleichung (q) darstellt, und zwar der Differentialgleichung (q), deren Phase α ist, also $q(t) = -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t)$, wobei das Symbol $\{\ \}$ die Schwarzsche Ableitung von α an der Stelle t bedeutet. Diese Zuordnung der einzelnen Elemente von $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{f}$ und der Differentialgleichung (q) ist eineindeutig. Jedes Element der zweiten Zerlegung hat die Form $\alpha\mathfrak{f}$, und es entsteht, wie wir sehen, durch Zusammensetzung von α mit den Elementen von $\mathfrak{f}$. Dieses Element $\alpha\mathfrak{f}$ besteht aus Funktionen, die invèrs sind zu den Phasen der Differentialgleichung $(\bar{q})$, deren Phase $\bar{\alpha}(t) = \alpha^{-1}(t)$ ist. Man sieht, dass die Elemente der beiden Zerlegungen $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{f}$ paarweise zueinander invers sind. Ferner besteht zwischen diesen Zerlegungen die folgende Beziehung. Es gibt eine Zerlegung $\bar{U}$ der Phasengruppe $\mathfrak{G}$ von folgender Beschaffenheit: Jedes Element $\bar{u} \in \bar{U}$ ist die Vereinigung von einigen Elementen der ersten Zerlegung und ebenfalls die Vereinigung von Elementen der zweiten Zerlegung, wobei je zwei Elemente, eines aus der ersten und das andere aus der zweiten Zerlegung, die in demselben Element $\bar{u} \in \bar{U}$ als Untermengen enthalten sind, einen nicht leeren Durchschnitt haben. Die Elemente $\bar{u}$ werden Blöcke genannt, und die Algebraiker wissen, dass $\bar{U}$ die kleinste gemeinsame Ueberdeckung der beiden Nebenklassenzerlegungen $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{f}$, $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{f}$ ist.

Wenn man einen Block $\bar{u}$ betrachtet und jedes in ihm liegende Element einer der beiden Zerlegungen $\mathfrak{G}/_{r}\mathfrak{f}$, $\mathfrak{G}/_{l}\mathfrak{f}$ durch das inverse Element der anderen Zerlegung ersetzt, so bekommt man durch Vereinigung aller dieser Elemente wiederum einen Block von $\bar{U}$, den sogenannten inversen Block $\bar{u}^{-1}$.
Wie wir sehen, sind die Blöcke der Zerlegung $\bar{U}$ paarweise zueinander invers. Von einer Differentialgleichung (q) sagt man, sie gehöre zu dem Block $\bar{u}$, oder auch sie liege in dem Block $\bar{u}$, wenn ihre Phasenmenge in dem Block $\bar{u}$ als Untermenge enthalten ist.
Und nun nur noch eine kurze Bemerkung zu den elementaren Phasenfunktionen. Dieselben bilden eine Untergruppe $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{G}$, die sogenannte Gruppe von elementaren Phasen. Es gilt $\mathfrak{E} \supset \mathfrak{f}$.
Die Bedeutung dieser Gruppe $\mathfrak{E}$ ist folgende: Zwei Differentialgleichungen (q_1), (q_2) haben dieselben Zentraldispersionen dann und nur dann, wenn ihre Phasenmengen in derselben rechtsseitigen Nebenklasse von $\mathfrak{G}/_{r}\mathfrak{E}$ als Untermengen enthalten sind. Mit anderen Worten, dann und nur dann, wenn für irgendwelche Phasen α_1, α_2 dieser Differentialgleichungen eine Beziehung von der Form $\alpha_1(t) = h[\alpha_2(t)]$, für $t \in j$, besteht. h ist natürlich eine elementare Phasenfunktion.
Zum Begriff der inversen Differentialgleichungen: Zwei Differentialgleichungen (q), $(\bar{q})$ heissen zueinander invers, wenn es Phasen gibt, $\alpha(t)$, $\bar{\alpha}(t)$, die zueinander invers sind: $\alpha(t) = \alpha^{-1}(t)$, $t \in j$. Es gilt der folgende Satz:
Zwei Differentialgleichungen (q), $(\bar{q})$ sind dann und nur dann zueinander invers, wenn sie inversen Blöcken angehören.

3. Nach dieser Einleitung will ich nun zum eigentlichen Thema meines Vortrages übergehen, also zur Untersuchung der oben erwähnten Klasse A der Differentialgleichung (q). Wir wissen, dass es sich um Differentialgleichungen (q) handelt, deren Zentraldispersionen sämtlich elementar sind oder, mit anderen Worten, deren Abstandsfunktionen sämtlich mit π periodisch sind.

An der Spitze dieser Theorie steht der folgende Satz:

Wenn die Differentialgleichung (q) der Klasse A angehört, so gibt es zu jeder ihrer Phasen α eine elementare Phasenfunktion h so, dass die Beziehung

$$\alpha(t+\pi) = h[\alpha(t)] \tag{2}$$

erfüllt ist, für $t \in j$.

Umgekehrt, wenn die Differentialgleichung (q) eine Phase α besitzt, für die eine Beziehung von der Form (2) besteht, wobei h eine geeignete elementare Phasenfunktion bedeutet und $t \in j$ ist, so gehört die Differentialgleichung (q) der Klasse A an.

Um das Funktionieren des oben angeführten Begriffsapparats vorzuführen, will ich den ersten Teil dieses Satzes kurz skizzieren.

Es sei also (q) eine zur Klasse A gehörige Differentialgleichung, α eine Phase von (q) und φ_1 die Fundamentaldispersion dieser Differentialgleichung. Ohne Verlust an Allgemeinheit will ich z.B. $\alpha'(t) > 0$ voraussetzen. Ich schreibe nun die Abelsche Funktionalgleichung

$$\alpha[\varphi_1(t)] = \alpha(t) + \pi$$

an der Stelle $t + \pi$ und erhalte

$$\alpha[\varphi_1(t+\pi)] = \alpha(t+\pi) + \pi$$

und ferner, da $(q) \in A$,

$$\alpha[\varphi_1(t) + \pi] - \alpha[\varphi_1(t)] = \alpha(t+\pi) - \alpha(t).$$

Setzt man nun

$$(3) \qquad \alpha(t+\pi) - \alpha(t) = G(t),$$

so hat man zunächst

$$G[\varphi_1(t)] = G(t),$$

woraus man folgert, dass von den Funktionen

$$H(t) = G[\alpha^{-1}(t)], \quad h(t) = t + H(t)$$

die erste mit π periodisch und die zweite elementar ist. Daraus und aus (3) folgt die obige Behauptung.

Nun kann man die Beziehung (2) auf zweierlei Weise deuten. Erstens: Da α eine Phase von (q) ist, so ist $\alpha(t+\pi)$ eine solche von $(q(t+\pi))$ und die Beziehung (2) besagt, dass diese Phasen in derselben rechtsseitigen Nebenklasse von $\mathfrak{G}/_r\mathfrak{f}$ enthalten sind. Folglich haben die Differentialgleichungen mit den Trägern $q(t)$ und $q(t+\pi)$ dieselben Zentraldispersionen. Umgekehrt, wenn zwei Differentialgleichungen mit den Trägern $q(t)$ und $q(t+\pi)$ dieselben Zentraldispersionen haben, so besteht für ihre Phasen $\alpha(t)$ und $\alpha(t+\pi)$ eine Beziehung von der Form (2). Folglich gilt der Satz:

Die Differentialgleichung (q) gehört zur Klasse A dann und nur dann, wenn die Differentialgleichungen $(q(t))$ und $(q(t+\pi))$ dieselben Zentraldispersionen haben.

Auf diese Weise kommt man in Berührung mit der weitgehend erarbeiteten Theorie von Differentialgleichungen mit denselben Zentraldispersionen, wie sie etwa in meinem Buch über die linearen Differentialtransformationen zweiter Ordnung dargestellt ist [1], und die Ergebnisse dieser Theorie bieten Informationen über Eigenschaften der betrachteten Differentialgleichungen der Klasse A. Von diesen Informationen will ich nur die folgenden hervorheben:

1. Für jede Differentialgleichung $(q) \in A$ gibt es in jedem Intervall $[t, t+d_1(t))$ wenigstens vier Punkte t_1, t_2, t_3, t_4, in denen die Funktionen $q(t)$, $q(t+\pi)$ dieselben Werte annehmen: $q(t_i + \pi) = q(t_i)$, $i = 1,2,3,4$.

2. Für jede Differentialgleichung $(q) \in A$ und jede ihrer Phasen α gibt es eine Funktion f mit den unten beschriebenen Eigenschaften, vermöge deren die Werte von $q(t+\pi)$ und $q(t)$ im Intervall j so zusammenhängen:

$$q(t+\pi) = q(t)+(f''[\alpha(t)]+f'^2[\alpha(t)]+2f'[\alpha(t)]\cot \alpha(t))\alpha'^2(t).$$

Die Funktion f hat folgende Eigenschaften:

$$f(t+\pi)=f(t) \text{ für } t \in j; \quad f \in C_j^2; \quad f(0)=f'(0)=0;$$

$$\int_0^\pi \frac{\exp[-2f(\sigma)]-1}{\sin^2\sigma}\, d\sigma = 0 .$$

Durch diese Eigenschaft sind die Differentialgleichungen der Klasse A charakterisiert.

Zweitens: Wenn man in der Formel (2) etwa $\alpha'(t) > 0$ annimmt und dieselbe an der Stelle $\alpha^{-1}(t)$ anwendet, so erhält man für $t \in j$

$$\alpha[\alpha^{-1}(t) + \pi] = h(t) .$$

Der hier links stehende Ausdruck ist die mit der Funktion $\alpha^{-1}(t)$ gebildete Fundamentaldispersion, also die Fundamentaldispersion der zu (q) inversen und die Phase α^{-1} enthaltenden Differentialgleichung $(\bar{q})$. Nach der letzten Formel ist diese Fundamentaldispersion elementar. Folglich gehört die Differentialgleichung $(\bar{q})$ ebenfalls der Klasse A an. Da aber jede zu (q) inverse Differentialgleichung bei einer geeigeneten Wahl von α auf diese Weise erfasst werden kann, so gilt der Satz:

Wenn die Differentialgleichung (q) der Klasse A angehört, so gilt dasselbe auch für jede zu (q) inverse Differentialgleichung $(\bar{q})$.

Mit anderen Worten:

Die Klasse A ist in bezug auf inverse Differentialgleichungen (q) abgeschlossen.

Eine unmittelbare Folgerung davon ist:

Mit jeder Differentialgleichung (q) gehört zur Klasse A auch jede in demselben Block wie (q) liegende Differentialgleichung (q^*).

4. In meinen weiteren Ausführungen werde ich mich nun mit Differentialgleichungen (q) mit π-periodischen Trägern q befassen: $q(t+\pi) = q(t)$ für $t \in j$.

Wie ich bereits eingangs gesagt habe, gehört jede Differentialgleichung (q) mit π-periodischem Träger zur Klasse A. Dies ist eine unmittelbare Folge der oben angeführten charakteristischen Eigenschaft der Differentialgleichungen (q) von A, dass $(q(t))$ und $(q(t+\pi))$ dieselben Zentraldispersionen haben. Direkt kann dieses Resultat so eingesehen werden:

Da mit jedem Integral $y(t)$ von (q) auch die Funktion $y(t+\pi)$ ein solches ist, so gilt auch für jede Phase $\alpha(t)$ von (q), dass die Funktion $\alpha(t+\pi)$ eine Phase der Differentialgleichung (q) darstellt. Weil ferner, wie wir sehen, alle Phasen derselben Differentialgleichung (q) in derselben rechtsseitigen Nebenklasse in bezug auf die Fundamentalgruppe $\mathfrak{f}$ liegen, so gibt es eine Phase $\varepsilon(t) \in \mathfrak{f}$ so, dass $\alpha(t+\pi) = \varepsilon[\alpha(t)]$ ist. Da ferner wegen $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{E}$ die Phase elementar ist, so besteht die Formel (2) mit $h(t) = \varepsilon(t)$, und die Behauptung ist bewiesen.

Ausserdem sieht man:

Die Fundamentaldispersion und folglich alle Zentraldispersionen jeder zu einer Differentialgleichung (q) mit -periodischem Träger inversen Differentialgleichung $(\bar{q})$ liegen in der Fundamentalgruppe

Ferner gilt: Durch diese Eigenschaft sind die Differentialgleichungen (q) mit π-periodischen Trägern charakterisiert.

Eine unmittelbare Folgerung davon ist:

Mit jeder Differentialgleichung (q) mit -periodischem Träger haben auch alle in demselben Block wie (q) liegenden Differentialgleichungen (q^{*}) -periodische Träger.

An dieser Stelle sei bemerkt, dass die in den obigen Untersuchungen enthaltenen Elemente algebraischer Natur zum Aufbau eines abstrakten Modells der gesamten hier behandelten Theorie angewendet werden können, etwa nach dem in meinem Buch [2] erarbeiteten Muster. Insbesondere können die Differentialgleichungen (q) mit π-periodischen Trägern abstrakt charakterisiert werden.

In dem nun folgenden letzten Teil meines Vortrages werde ich an die klassische Theorie von Floquet anknüpfen, um im Rahmen der obigen Begriffsbildungen und Methoden zu einer Vertiefung dieser Theorie beizutragen. Genauer gesagt, ich werde mich für Differentialgleichungen (q) mit reellen charakteristischen Wurzeln interessieren. Dementsprechend werde ich im Folgenden voraussetzen, dass die Träger der betrachteten Differentialgleichungen (q) mit π periodisch sind.

Es ist wohl bekannt, dass man in der Theorie von Floquet zu jeder Differentialgleichung (q) eine algebraische Gleichung zweiten Grades, die sogenannte Fundamentalgleichung,

$$(4) \qquad s^2 - A.s + 1 = 0$$

zuordnet, deren Wurzeln s_1, s_2 gewisse Informationen über das Verhalten der Integrale von (q) liefern. Diese Wurzeln werden als die charakteristischen Wurzeln von (q) bezeichnet. Der in (4) stehende Buchstabe A bedeutet eine (reelle) Konstante, die so definiert ist:

Es sei $x \in j$ eine beliebige Zahl und u,v die mit den folgenden Anfangswerten gebildete Basis von (q):

$$u(x) = 1 , \qquad v(x) = 0 ,$$

$$u'(x) = 0 , \qquad v'(x) = 1 ;$$

ferner sei $A(x)$ die Funktion

$$A(x) = u(x+\pi) + v'(x+\pi) .$$

Nun kann gezeigt werden, dass die Werte dieser Funktion von der Wahl von x nicht abhängen, also die Funktion eine Konstante ist. Und eben diese Konstante ist der in der obigen charakteristischen Gleichung (4) von (q) auftretende Koeffizient.

Es ist klar, dass die Wurzeln s_1, s_2 von (4) stets zueinander invers und je nachdem, ob $|A| \geq 2$ oder $|A| < 2$ gilt, reell oder imaginär sind. Im Fall $A > 2$ sind diese Wurzeln positiv und voneinander verschieden, während sie im Fall $A = 2$ beide gleich 1 sind; im Fall $A < -2$ sind sie negativ und voneinander verschieden, während sie im Fall $A = -2$ beide den Wert -1 haben.

Ich werde nun zwei Sätze angeben, von denen der erste eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Auftreten reeller charakteristischer Wurzeln und eine sowohl analytische als auch geometrische Deutung dieser letzteren angibt, während der zweite eine Abschätzung der absoluten Werte dieser Wurzeln vermöge der Werte von q bringt. Einige diesbezügliche Aussagen gelten nur unter der Annahme, dass der Träger q stets negativ ist, wie dies etwa für die Hill'sche Differentialgleichung bei genügend grossen absoluten Werten des Parameters stets der Fall ist. Ich werde also in den folgenden Ausführungen der Einfachheit halber $q(t) < 0$ für $t \in j$ voraussetzen. Ferner bezeichne ich

$$m = \min_{t \in j} |q(t)| , \qquad M = \max_{t \in j} |q(t)| ,$$

so dass $0 < m \leq M$ gilt.

Die Sätze

1. Die charakteristischen Wurzeln von (q) sind dann und nur dann positiv bzw. negativ, wenn die Abstandsfunktion d_n, mit einem geraden bzw. ungeraden und den Ungleichungen

$$\sqrt{m} \leq n \leq \sqrt{M}$$

enügenden Index n, an einer Stelle $x \in j$ den Wert π annimmt. Ist diese Bedingung erfüllt, so haben die charakteistischen Wurzeln von (q) die Werte

$$s_1 = (-1)^n \sqrt{\varphi_n'(x)}\ , \qquad s_2 = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\varphi_n'(x)}}$$

u d sind voneinander verschieden oder einander gleich, je nachdem, ob $d_n'(x) \neq 0$ oder $d_n'(x) = 0$ ist.

Ueber den Beweis dieses Satzes will ich nur anführen, dass er an die Floquet'sche kanonische Form der Integrale von (q) anknüpft und gewisse Transformationseigenschaften der Zentraldispersionen, von denen ich in der Einleitung nicht gesprochen habe, wesentlich ausnützt ([3]) .

Der obige Satz lässt eine einfache geometrische Deutung zu. s sei $\mathcal{C}$ eine auf ein Koordinatensystem mit dem Ursprung O bezogene Integralkurve von (q) mit den parametrischen Koordinaten etwa $x_1 = y_1(t)$, $x_2 = y_2(t)$. Wegen $q(t) < 0$, $t \in j$, ist die Kurve $\mathcal{C}$ regulär, d.h. lokal konvex und wendepunktfrei.

Es gilt der

Folgesatz. Die charakteristischen Wurzeln von (q) sind dann und nur dann positiv bzw. negativ, wenn es auf der Kurve $\mathcal{C}$ einen Punkt $P(x) = (y_1(x), y_2(x))$ gibt, so dass die Punkte $P(x)$, $P(x+\pi)$ auf derselben durch O gehenden Geraden liegen, und zwar auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten von O. Ist diese Bedingung erfüllt, so sind die charakteristischen Wurzeln von (q) die Verhältnisse der orientierten Abstände $\overline{OP(x)}$, $\overline{OP(x+\pi)}$,

$$s_1 = \overline{OP(x)} : \overline{OP(x+\pi)} \,, \quad s_2 = \overline{OP(x+\pi)} : \overline{OP(x)}$$

und sind voneinander verschieden oder einander gleich, je nachdem, ob die erwähnten Punkte in verschiedenen Entfernungen oder in derselben Entfernung von O liegen.

2. Wenn die charakteristischen Wurzeln von (q) reell sind, so gilt für den absoluten Wert einer jeden von ihnen, s, die Abschätzung

$$(5) \qquad \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}\sqrt{M}} \leq |s| \leq \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}\sqrt{M}}$$

Bei dem Beweis dieses Satzes geht man von dem im Satz 1. angeführten Wert von s aus und wendet eine aus der Theorie der Zentraldispersionen bekannte Abschätzung der Funktion $\varphi_n'(t)$ an.

Wenn wir die Formeln (5) etwa auf die Differentialgleichung von Mathieu anwenden,

$$y'' + (\lambda - 2h^2 \cdot \cos 2t)y = 0 \,,$$

so kommt für $\lambda > 2h^2$

$$\left[\frac{1 - \frac{2h^2}{\lambda}}{1 + \frac{2h^2}{\lambda}}\right]^{\frac{1}{2}\sqrt{\lambda + 2h^2}} \leq |s| \leq \left[\frac{1 + \frac{2h^2}{\lambda}}{1 - \frac{2h^2}{\lambda}}\right]^{\frac{1}{2}\sqrt{\lambda + 2h^2}}$$

heraus. Es kann leicht gezeigt werden, dass die hier auftretenden Schranken für $\lambda \to \infty$ gegen 1 streben.

Ich bin nun in meinem Vortrag bis zu konkreten Differentialgleichungen der theoretischen Physik vorgedrungen und glaube somit diesen Vortrag getrost beenden zu können.

L I T E R A T U R

[1] O. Borůvka: Lineare Differentialtransformationen zweiter Ordnung. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.

[2] O. Borůvka: Linear Differential Transformations of the Second Order. The English Universities Press, London 1971.

[3] O. Borůvka: Sur quelques compléments à la théorie de Floquet pour les équations différentielles du deuxième ordre. Annali di matem. p. ed appl. (sous presse).

(Eingang: 2.7.1973)

Verfasser: Borůvka, O., Prof.Dr. Janáčkovo nám. 2a,
66295 Brno, ČSSR