Otakar Borůvka
Contribution à la théorie algébrique des équations $Y'' = Q(T)Y$

Bollettino U.M.I., (5) 13-B, 1976, 896-915

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500164

Bollettino U. M. I.
(5) **13**-B (1976), 896-915

Contribution à la théorie algébrique des équations $Y'' = Q(T)Y$.

O. Borůvka (Brno, Cecoslovacchia)

Hommage à mon illustre Collègue et Ami M. Giovanni Sansone
pour son 85^e anniversaire

Sunto. – *Si considerano le equazioni differenziali dotate di soluzioni oscillatorie nell'intervallo* $(-\infty, \infty)$: (q) $y'' = q(t)y$. *L'insieme di tali equazioni si scompone in classi disgiunte, essendo gli elementi di ciascuna classe* $\bar{u}$ *le trasformate di ogni equazione* $(q) \in \bar{u}$ *mediante le fasi dell'equazione* (-1). *Si tratta di uno studio delle proprietà di struttura delle classi in questione. Si applica quindi la relativa teoria alle trasformazioni dell'equazione di Mathieu.*

I. – L'énoncé du problème.

Dans l'article suivant nous considérons les équations différentielles ordinaires linéaires du deuxième ordre, de la forme jacobienne

$$(q) \qquad y'' = q(t)y$$

et aux porteurs continus dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$: $q(t) \in C_j^0$.

Nous supposons ces équations oscillatoires et donc, jouissant de la propriété que leurs intégrales admettent infiniment beaucoup de zéros qui s'accumulent vers les deux extrémités de j. Dans ces conditions les phases de nos équations sont non-bornées et leur ensemble, muni de la loi de multiplication définie par composition de fonctions, est un groupe $\mathfrak{G}$, appelé le groupe des phases. L'ensemble des phases de l'équation (-1): $y'' = -y$, est alors un sous-groupe de $\mathfrak{G}$, dit le *sous-groupe fondamental*, $\mathfrak{E}$ ([1]).

La théorie algébrique des équations en question consiste en étude des propriétés de structure du groupe $\mathfrak{G}$ et de leurs relations avec les équations (q). Un essai tendant à un élargissement de cette théorie aux équations linéaires d'ordre n, $v.$ [2].

Le point de départ de nos considérations actuelles s'attache aux deux décompositions du groupe $\mathfrak{G}$, en classes à droite et à gauche, générées par $\mathfrak{C}$: $\bar{G}_d - \mathfrak{G}/_d\mathfrak{C}$, $\bar{G}_g = \mathfrak{G}/_g\mathfrak{C}$. Il est bien connu que toute classe $\bar{a}_d \in \bar{G}_d$ consiste précisément en phases d'une équation (q) bien déterminée tandis que toute classe $\bar{a}_g \in \bar{G}_g$ est formée précisément par les fonctions inverses des phases d'une équation $(\bar{q})$ qui est encore bien définie. Or, si l'on applique un théorème algébrique bien connu exprimant que les décompositions $\bar{G}_d, \bar{G}_g$ sont complémentaires, on trouve, en ce qui concerne les équations (q), ceci: L'énsemble des équations (q) se décompose en classes que nous appelons *blocs* et qui jouissent des propriétés suivantes:

(i) Toutes les équations d'un bloc $\bar{u}$ se déduisent de chacune d'entre elles par les transformations-éléments de $\mathfrak{C}$, c'est-à-dire par les changements de t de la forme

$$(\varepsilon) \qquad x = \text{Arc tg}\, c \cdot \frac{\sin(t+a)}{\sin(t+b)};$$

a, b, c sont des constantes telles que $0 \leqslant a, b < \pi$; $c \cdot \sin(a-b) \neq 0$ et le symbole Arc tg désigne une branche continue dans j de la fonction correspondante.

(ii) Toutes les équations du $\bar{u}$ admettent les mêmes équations inverses; l'énsemble de celles-ci est encore un bloc $\bar{u}^{-1}$ appelé *inverse* de $\bar{u}$ et l'on a $(\bar{u}^{-1})^{-1} = \bar{u}$.

Rappelons que deux équations (q), $(\bar{q})$ sont dites (mutuellement) inverses et chacune d'elles s'appelle inverse de l'autre si elles admettent des phases $\alpha, \bar{\alpha}$ qui sont des fonctions inverses: $\alpha\bar{\alpha}(t) = \bar{\alpha}\alpha(t) = t (\in j)$.

Cela étant prélevé, nous sommes en mesure de préciser l'objet de nos recherches actuelles. Il s'agit d'une étude des propriétés de structure de différents blocs et en particulier des questions suivantes: *Etant donnée une équation* $(q) \in \bar{u}$, *quelles sont les applications-éléments de* $\mathfrak{C}$ *qui transforment l'équation* (q) *dans une équation assignée* $(q^*) \in \bar{u}$, *et spécialement dans l'équation* (q) *elle-même? Quelle est la puissance du bloc* $\bar{u}$? Ces problèmes résolus, nous appliquons la théorie générale à l'equation classique de Mathieu ce qui conduit à un calcul effectif sans trop de complicatins.

II. – Préliminaires.

Dans ce Chapitre nous allons indiquer, pour la commodité du lecteur, les éléments de la théorie des équations (q) en tant qu'elles nous seront utiles dans la suite ([1]). Inutile de dire que nous supposons dès le commencement que les équations envisagées (q) sont *oscillatoires*.

Soit alors (q) une équation oscillatoire, $q(t) \in C^0_{j=(-\infty,\infty)}$.

1. – *Radicaux.*

Nous appelons *radical* de (q) la fonction définie dans j:

$$R_q(t) = \int_0^t \sqrt{|1 + q(\sigma)|}\, d\sigma;$$

notations: R_q, R.

On a évidemment:

$$R(0) = 0\,, \quad R(t) \geqslant 0 \text{ pour } t > 0\,, \quad R(t) \leqslant 0 \text{ pour } t < 0\,,$$

$$R(t) \in C^1_j\,, \quad R'(t) = \sqrt{|1 + q(t)|} \geqslant 0 \text{ pour } t \in j\,.$$

L'équation (q) est dite *normale* si la fonction R est constamment croissante et non-bornée; elle prend le nom d'équation *régulière* si l'on a en plus: $R(t) \in C^3_j$; $R'(t) > 0$ pour $t \in j$.

2. – *Phases.*

On distingue entre les phases d'une base de (q) et celles de l'équation (q) elle-même.

On entend sous une (première) *phase d'une base de* (q), u, v, toute fonction continue dans j, $\alpha(t)$, satisfaisant en dehors des zéros de v à la relation $\operatorname{tg} \alpha(t) = u(t) : v(t)$. Inutile de dire que u, v désignent des intégrales linéairement indépendantes de (q).

Les phases de la base u, v forment un système dénombrable et dont les éléments ne diffèrent l'un de l'autre que par des multiples entiers de π: $\ldots < \alpha_{-1}(t) < \alpha_0(t) < \alpha_1(t) < \ldots$; $\alpha_\nu(t) = \alpha_0(t) + \nu\pi$; $\nu = 0, \pm 1, \ldots$; $t \in j$. Toute phase α_ν admet exactement un zéro $t_\nu (\in j)$, l'ensemble $\{t_\nu\}$ étant précisement celui des zéros de u. On a évidemment

$$\alpha_\nu(t) = {}_\nu\mathrm{Arc\,tg}[u(t) : v(t)]\,,$$

le second membre désignant la fonction continue dans j, qui s'annule dans t_ν et pour laquelle la fonction tg au point $t \in j$ résulte égale à $u(t) : v(t)$ $(v(t) \neq 0)$. Remarquons que le système des phases en question porte le nom de *système complet* des phases de la base u, v.

On entend sous une *phase de l'équation* (q) une phase d'une base de (q). Pour simplifier le langage nous parlons, par occasion, des phases du porteur q au lieu de celles de l'équation (q) et nous employons cette manière d'expression aussi dans d'autres cas, quand il s'agit des notions inhérentes à l'équation (q) (intégrales de q, radical de q, etc.).

Toute phase de q, α, juit dans j des propriétés suivantes:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &1)\quad \alpha(t) \in C_j^3;\\ &2)\quad \alpha'(t) \neq 0;\\ &3)\quad \lim_{t\to\sigma\infty} \alpha(t) = (\sigma\,\infty)\operatorname{sgn}\alpha' \qquad (\sigma = \pm 1)\,. \end{aligned}$$

Quant à la propriété 2) remarquons qu'on a $\alpha'(t) > 0$ ou bien $\alpha'(t) < 0$ suivant que le wronskien $w = u(t)v'(t) - u'(t)v(t)$ résulte < 0 ou bien > 0. Une autre remarque: Subsiste, dans j, la relation

$$(2) \qquad q(t) = -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t)\,,$$

le symbole $\{\,\}$ désignant la dérivée schwarzienne de α au point t:

$$\{\alpha, t\} = [\tfrac{1}{2}\alpha'''(t) : \alpha'(t)] - [\tfrac{3}{4}\alpha''^2(t) : \alpha'^2(t)]\,.$$

Une phase α s'appelle *dispersionelle* si l'on a dans j toujours $\alpha(t) > t$ ou bien $\alpha(t) < t$; dans le premier cas α prend le nom *phase supérieure* et dans l'autre *phase inférieure.* Inutile de dire que toute phase dispersionnelle résulte constamment croissante.

Une phase α de q s'appelle *élémentaire* si elle vérifie dans j la relation

$$\alpha(t + \pi) = \alpha(t) + \pi\cdot\operatorname{sgn}\alpha'\,.$$

3. – *Phases spéciales.*

Dans la théorie qui nous occupe un rôle important est joué par les phases de l'équation (-1): $y'' = -y$. Pour la commodité du langage nous les appelons *phases spéciales.*

Toute base de (-1) étant, évidemment, $u(t) = C_{11}\cdot\sin t + C_{12}\cdot\cos t$, $v(t) = C_{21}\cdot\sin t + C_{22}\cdot\cos t$ ($C_{11}, \ldots, C_{22} = \text{const.}$, $C_{11}\cdot C_{22} - C_{12}\cdot C_{21} \neq 0$), elle peut être prise dans la forme $u(t) = c_1\cdot\sin(t + a)$, $v(t) = c_2\cdot\sin(t + b)$, les constantes c_1, c_2; a, b vérifiant les relations: $0 < a, b < \pi$; $c_1\cdot c_2\cdot\sin(b - a) \neq 0$. Nous voyons que toute phase spéciale, $\varepsilon(t)$, peut être donnée par la formule

$$(3) \qquad \varepsilon(t) = {}_{\nu}\mathrm{Arc\,tg}\, c\cdot\frac{\sin(t + a)}{\sin(t + b)}\,,$$

ν étant un entier et c, a, b des constantes telles que $0 < a, b < \pi$, $c \cdot \sin(b-a) \neq 0$; ici le second membre désigne la fonction continue dans j qui s'annule pour $-a-\nu\pi$ et pour laquelle la fonction tg au point $t \in j$ résulte égale à $c \cdot \sin(t+a) : \sin(t+b)$ (pour $\sin(t+b) \neq 0$).

Toute phase spéciale est, d'après (2), une intégrale de l'équation

$$(4) \qquad -\{X, t\} = X'^2(t) - 1 \,,$$

et inversement. Toute phase spéciale résulte élémentaire.

Nous avons déjà dit que, l'ensemble des phases spéciales, muni de la loi de multiplication définie par composition de fonctions est un groupe, $\mathfrak{C}$, appelé fondamental; l'élément neutre de $\mathfrak{C}$, $\underline{1}$, est manifestement la fonction $t (\in j)$. Figurent parmi les phases spéciales les fonctions $t, -t, c_\nu(t) = t + \nu\pi$ $(\nu = 0, \pm 1, \ldots)$.

L'ensemble des phases spéciales qui sont croissantes est un sousgroupe invariant de $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_0$, d'indice 2. Les ensembles

$$\mathfrak{T} = \{t, -t\} \,, \qquad \mathfrak{Z} = \{c_\nu(t)\}_{\nu=-\infty}^{\infty}$$

sont encore des sous-groupes de $\mathfrak{C}$. $\mathfrak{Z}$ est le groupe monogène infini généré par $c_1(t)$: $c_\nu(t) = c_1^\nu(t)$; ce groupe est le centre de $\mathfrak{C}_0$ et il facile de montrer qu'il est invariant dans $\mathfrak{C}$. Les groupes $\mathfrak{T}, \mathfrak{Z}$ sont permutables et donc, leur produit $\hat{\mathfrak{Z}} (= \mathfrak{T}\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}\mathfrak{T})$:

$$\hat{\mathfrak{Z}} = \{\ldots, t-\pi, -t-\pi, t, -t, t+\pi, -t+\pi, \ldots\}$$

est un sous-groupe de $\mathfrak{C}$; nous l'appelons l'*hypocentre de* $\mathfrak{C}$.

4. – *Dispersions.*

Revenons à l'équation (q). On appelle *dispersion de* (q) (ou bien de q) toute fonction $\zeta(t) \in C_j^3$, $\zeta'(t) \neq 0$ $(t \in j)$ qui transforme l'équation (q) dans elle-même. Cela veut dire que, ζ transforme chaque intégrale de (q), y, dans une intégrale Y de la même équation suivant la formule: $Y(t) = y\zeta(t) : \sqrt{|\zeta'(t)|}$, $y\zeta$ étant naturellement la fonction composée $y(\zeta)$. Il s'agit ici des dispersions de première espèce ([1]). On sait que, α étant une phase quelconque de q, choisie une fois pour toute, les dispersions de q sont précisément les fonctions $\zeta(t) = \alpha^{-1}\varepsilon\alpha(t)$ $(t \in j)$ formées avec de différentes phases spéciales ε; α^{-1} désigne, naturellement, la fonction inverse de α. Chaque dispersion de q est une intégrale de l'équation

$$(5) \qquad -\{X, t\} + q(X)X'^2(t) = q(t) \,,$$

et inversement.

Figurent, parmi les dispersions de q, les dispersions appelées *centrales* qui sont constamment croissantes et transforment chaque intégrale de q, y, dans elle-même ou bien dans son opposée $-y$. Ces dispersions centrales forment une suite croissante:

$$\ldots < \varphi_{-2}(t) < \varphi_{-1}(t) < \varphi_0(t) - t < \varphi_1(t) < \varphi_2(t) < \ldots .$$

On démontre que, pour $t \in j$, la valeur $\varphi_\nu(t)$ est le $|\nu|$-ième nombre conjugué avec t et situé à droite ou bien à gauche de t suivant que $\nu > 0$ ou bien $\nu < 0$; on pose $\varphi_0(t) \quad t$ $(\nu = 0, \pm 1, \ldots)$. Toute fonction φ_ν est constamment croissante; elle transforme chaque intégrale de q, y, suivant la formule $(-1)^\nu y(t) = y\varphi_\nu(t) : \sqrt{\varphi'_\nu(t)}$ et l'on a, pour $y(t) = 0$, $(-1)^\nu y'(t) - y'\varphi_\nu(t) \cdot \sqrt{\varphi'_\nu(t)}$. α étant une phase quelconque de q, subsiste dans j la formule

$$(6) \qquad \varphi_\nu(t) = \alpha^{-1} c_{\nu \cdot \operatorname{sgn} \alpha'} \alpha(t) .$$

La fonction inverse de φ_ν est, visiblement, $\varphi_{-\nu}$. Finalement, remarquons que la fonction φ_1 s'appelle la *dispersion fondamentale de* (q).

5. – *Equations inverses.*

Nous appelons une équation $(\bar{q})$ *inverse de* (q) si elle admet une phase $\bar{\alpha}$ qui est la fonction inverse d'une phase de (q), α: $\bar{\alpha} - \alpha^{-1}$. La relation en question est évidemment symétrique par rapport aux équations (q), $(\bar{q})$. Nous parlons donc des équations mutuellement inverses, plus simplement: inverses, (q), $(\bar{q})$, et nous disons qe chacune d'entre elles est inverse de l'autre. Soulignons que, les équations inverses de (q) forment un ensemble dont les éléments dépendent de différentes phases de (q).

III. – Fondements de la théorie algébrique.

6. – *Fonctions-phases.*

Nous appelons *fonction-phase* toute fonction $\alpha(t)$ définie dans j et vérifiante dans cet intervalle les trois conditions (1). Il est clair que toute phase d'une équation (q) est une fonction-phase; inversement, chaque fonction-phase est une phase de cette équation (q) dont le porteur est donné par la formule telle que (2). C'est alors de cette raison que nous parlons, à l'occasion, des phases au lieu des fonctions-phases et que nous transferons des notions définies pour les phases aux fonctions-phases.

Si l'équation (q) est régulière, le radical R_q est une phase.

Toute dispersion centrale φ_ν de chaque équation (q) est une phase supérieure ou bien inférieure suivant que $\nu > 0$ ou bien $\nu < 0$; inversement, toute fonction-phase supérieure ou bien inférieure représent, par exemple, la dispersion fondamentale ou bien son inverse d'une équation (q) ([1]).

7. – *Groupe des phases.*

Nous avons déjà prélevé la notion du groupe de phases, $\mathfrak{G}$: C'est — nous l'avons dit — l'ensemble constitué par les phases de toutes les équations (q), et muni de la loi de multiplication définie par composition de fonctions. L'élément neutre de $\mathfrak{G}$, $\underline{1}$, est donc la fonction $t(\in j)$. On a en particulier: $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{G}$.

Désignons, pour un élément $\alpha \in \mathfrak{G}$ quelconque, par q_α le porteur admettant la phase α; la fonction q_α est donc donnée par (2). On a en plus, pour $\varepsilon \in \mathfrak{C}$; $\alpha, \beta \in \mathfrak{G}$ les formules suivantes et valables dans j:

$$q_\varepsilon(t) = -1\,, \tag{7}$$

$$q_{\alpha\beta}(t) = [1 + q_\alpha\beta(t)]\beta'^2(t) + q_\beta(t)\,, \tag{8}$$

$$q_{\alpha^{-1}}(t) = -1 - [1 + q_\alpha\alpha^{-1}(t)]\alpha^{-1\prime 2}(t); \tag{9}$$

ici désigne, naturellement, α^{-1} la fonction inverse de α et, par exemple, $q_\alpha\beta$ la fonction $q_\alpha(\beta)$.

Remarquons que, $(q_{\alpha^{-1}})$ signifie l'équation inverse de (q) admettant la phase α^{-1}. Une autre remarque: Si la dispersion fondamentale de (q) est spéciale, le porteur de toute équation inverse de (q), $\bar{q}$, est périodique avec π. Cela résulte immédiatement des formules (6)-(9) ([4]).

8. – *Quelques propriétés de structure du groupe* $\mathfrak{G}$.

1) L'ensemble des phases qui sont croissantes est un sous-groupe invariant de $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_0$, d'indice 2; l'autre élément du groupe-quotient $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$, G_1, consiste en phases décroissantes. Le groupe fondamental $\mathfrak{C}$ est naturellement un sous-groupe de $\mathfrak{G}$; il prend le nom de *sous-groupe fondamental* de $\mathfrak{G}$. On désigne $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{G}_0$.

Par le sous-groupe fondamental $\mathfrak{C}$ se trouvent univoquement déterminées la décomposition de $\mathfrak{G}$ en classes à droite, $\mathfrak{G}/_d\mathfrak{C}$, et celle en classes à gauche, $\mathfrak{G}/_g\mathfrak{C}$. Nous parlons plus simplement de la décomposition à droite, $\bar{G}_d$, et la décomposition à gauche, $\bar{G}_g$: $\bar{G}_d = \mathfrak{G}/_d\mathfrak{C}$, $\bar{G}_g = \mathfrak{G}/_g\mathfrak{C}$. Toute classe $\bar{a} \in \bar{G}_d$ est l'ensemble $\mathfrak{C}\alpha$, $\alpha \in \bar{a}$ étant pris arbitrairement; de même on a, pour $\bar{c} \in G_g$: $\bar{c} = \gamma\mathfrak{C}$,

$\gamma \in \bar{c}$. A toute classe $\bar{a} = \mathfrak{C}\alpha \in \bar{G}_d$ ou bien $\bar{c} = \gamma\mathfrak{C} \in \bar{G}_g$ correspond biunivoquement la classe $\bar{a}^{-1} = \alpha^{-1}\mathfrak{C} \in \bar{G}_g$ ou bien $\bar{c}^{-1} = \mathfrak{C}\gamma^{-1} \in \bar{G}_d$ appelée *inverse* de $\bar{a}$ ou bien de $\bar{c}$; la classe $\bar{a}^{-1}$, par exemple, consiste en fonctions inverses des phases qui sont contenues dans $\bar{a}$, et l'on a manifestement $(\bar{a}^{-1})^{-1} = \bar{a}$.

Il importe de rappeler ceci: Pour toute équation (q), les phases de (q) forment précisément une classe $\bar{a} \in \bar{G}_d$; inversement, les fonction-phases contenues dans une telle classe sont les phases précisément d'une équation (q) qui est déterminée par la formule (2), α étant n'importe quel élément de la classe en question. Subsiste donc la relation d'équivalence: $\{q\} \sim \bar{G}_d$.

2) Les décompositions $\bar{G}_d, \bar{G}_g$ génèrent univoquement deux nouvelles décompositions du groupe $\mathfrak{G}$: le plus petit recouvrement $[\bar{G}_d, \bar{G}_g]$ et le plus grand raffinement $(\bar{G}_d, \bar{G}_g)$ des $\bar{G}_d, \bar{G}_g$ ([3]). Nous ne nous intéressons ici que du plus petit recouvrement: $\bar{U} = [\bar{G}_d, \bar{G}_g]$.

Appelons *blocs des phases*, plus simplement: *blocs*, les éléments $\bar{u} \in \bar{U}$. Chaque bloc $\bar{u}$ est la réunion de certains éléments de $\bar{G}_d$ dont l'ensemble nous désignons par $\bar{\bar{u}}_d$, et en même temps, la réunion de certains éléments de $\bar{G}_g$ formant l'ensemble $\bar{\bar{u}}_g$; on a donc $\bar{\bar{u}}_d \subset \bar{G}_d$, $\bar{\bar{u}}_g \subset \bar{G}_g$. Les blocs en question jouissent de la suivante particularité exprimant la propriété de complementarité (associabilité) des décompositions $\bar{G}_d, \bar{G}_g$ ([3]). Deux éléments arbitraires $\bar{a} \in \bar{\bar{u}}_d$, $\bar{c} \in \bar{\bar{u}}_g$, parties d'un bloc quelconque $\bar{u} \in \bar{U}$, se coupent dans un ensemble non-vid: $\bar{a} \cap \bar{c} \neq \emptyset$. Nous exprimons cette particularité en disant que les blocs sont *treillissés* et nous écrivons: $\bar{\bar{u}}_d \# \bar{\bar{u}}_g$. Il est facile à voir que, en prenant arbitrairement un élément $\alpha \in \bar{u}$ on a $\bar{u} = \mathfrak{C}\alpha\mathfrak{C}$; α prend alors le nom de *représentant de* $\bar{u}$ et il est clair qu'on peut le remplacer par n'importe quel élément $\beta = \varepsilon_1\alpha\varepsilon_2$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathfrak{C}$.

A tout bloc $\bar{u} \in \bar{U}$ correspond biunivoquement un bloc $\bar{u}^{-1}$ appelé *inverse de* $\bar{u}$ et qui est la réunion de tous les éléments $\bar{a}^{-1} \in \bar{G}_g$ pour lesquels $\bar{a} \in \bar{\bar{u}}_d$, ou bien, ce qui revient au même, la réunion de tous les éléments $\bar{c}^{-1} \in \bar{G}_d$ pour lesquels $\bar{c} \in \bar{u}_g$. Subsistent, évidemment, les relations d'équivalence:

$$\bar{u}_g^{-1} \sim u_d; \qquad \bar{u}_d^{-1} \sim \bar{u}_g$$

et l'on a: $(\bar{u}^{-1})^{-1} = \bar{u}$. La formule $\bar{u} = \mathfrak{C}\alpha\mathfrak{C}$ entraîne $\bar{u}^{-1} = \mathfrak{C}\alpha^{-1}\mathfrak{C}$, l'application par inversion de $\bar{u}$ sur $\bar{u}^{-1}$ étant biunivoque: $\varepsilon_1\alpha\varepsilon_2 \leftrightarrow$ $\leftrightarrow \varepsilon_2^{-1}\alpha^{-1}\varepsilon_1^{-1}$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathfrak{C}$; donc $\bar{u} \sim \bar{u}^{-1}$.

Convenons de dire qu'une équation (q) ou bien son porteur q appartiennent à un bloc $\bar{u} \in \bar{U}$ si les phases de (q) sont contenues dans $\bar{u}$; notations: $(q)^{\bar{u}}$, $q^{\bar{u}}$. Inutile de dire que toute équation (q)

appartient précisément à un bloc et que l'ensemble des équations (q) appartenantes au même bloc $\bar{u}$, $\{(q)^{\bar{u}}\}$, est équivalent à $\bar{\bar{u}}_d$:

$$\{q^{\bar{u}}\} \sim \bar{u}_d .$$

Pour la commodité du langage nous disons que, les équations $\{q\}$ appartenantes au même bloc forment un bloc des équations, plus simplement: un bloc. Par conséquent, l'ensemble des équations (q) se décompose en blocs disjoints et inverses deux à deux.

Avec ces explications préalables nous sommes en mesure de procéder à l'étude du problème proposé.

IV. – L'étude du problème proposé.

9. – *Indicateurs.*

Considérons une équation (q).

Nous avons déjà prélévé (n° 4) que, l'ensemble des dispersions de (q), $\mathfrak{K}_q$, consiste en fonctions $\zeta(t) = \alpha^{-1}\, \varepsilon\alpha(t)$ $(t \in j)$ formées avec de différentes phases spéciales $\varepsilon \in \mathfrak{C}$; α désigne une phase quelconque de (q) choisie arbitrairement et une fois pour toute. $\mathfrak{K}_q$ est donc un sous-groupe de $\mathfrak{G}$ et précisément le sous-groupe conjugué de $\mathfrak{C}$ et déterminé par α; notations: $\mathfrak{K}_q, \mathfrak{K}_\alpha, \mathfrak{K}$.

Nous appelons *indicateur de* (q), I_q, l'ensemble des dispersions de (q) qui sont situées dans $\mathfrak{C}$: $I_q = \mathfrak{K}_q \cap \mathfrak{C}$; ou bien, en d'autres termes, l'ensemble des phases spéciales qui transforment l'équation (q) dans elle-même. I_q est donc un sous-groupe de $\mathfrak{C}$ et précisément l'intersection de $\mathfrak{K}_q$ avec $\mathfrak{C}$; notations: I_q, I_α, I.

It est clair que I_q contient l'élément neutre de $\mathfrak{G}$, donc $t \in I_q$ $(t \in j)$.

D'après (4), (5) une phase spéciale ε figure dans I_q si et seulement si elle satisfait, dans j, à l'équation suivante dite l'*équation d'indicateur*:

$$[1 + q\varepsilon(t)]\cdot\varepsilon'^2(t) = 1 + q(t) . \tag{10}$$

Cette équation intégrée montre que toute phase $\varepsilon \in I_q$ satisfait dans j à l'équation fonctionnelle

$$R\varepsilon(t) = \operatorname{sgn}\varepsilon' \cdot R(t) + R\varepsilon(0) , \tag{11}$$

R étant le radical de (q).

Pour $\varepsilon \in G_1 \cap I_q$ on a $\varepsilon\varepsilon \in \mathfrak{G}_0 \cap I_q$ et donc; si l'indicateur I_q ne se réduit pas à l'élément neutre t, il contient des phases qui sont croissantes et différentes de t.

La proposition suivante est évidente:

Pour que I_q contient

1) *le centre* $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{S}_0 \cap \mathfrak{C}$, 2) *la phase* $-t \in \mathfrak{C}$, 3) *l'hypocentre de* $\mathfrak{C}$, *il faut et il suffit que q soit*

1) *périodique avec* π, 2) *paire,* 3) *périodique avec* π *et paire.*

Supposons à présent que (q) soit *normale.* Dans ce cas le radical R résulte constamment croissant et non-borné dans j et donc, il existe la fonction inverse $R^{-1}(t) \in C_j^1$.

Cette situation entraîne les faits suivants:

1) *Toute phase* $\varepsilon \in I_q$ *s'exprime dans j par la formule*

$$\varepsilon(t) = R^{-1}[\operatorname{sgn} \varepsilon' \cdot R(t) + R\varepsilon(0)] . \tag{12}$$

2) *Toutes les phases situées dans* I_q *qui sont croissantes et différentes de t son dispersionnelles; plus précisément, chaque phase jouissante des propriétés en question,* $\varepsilon \in I_q$, *est supérieure ou bien inférieure suivant que* $\varepsilon(0) > 0$ *ou bien* $\varepsilon(0) < 0$.

En effet, soit $\varepsilon \in I_q$ une phase croissante et différente de t. Subsiste alors une formule telle que (12) avec $\operatorname{sgn} \varepsilon' = 1$, R étant naturellement le radical de (q). Si $\varepsilon(0) = 0$ on a $R\varepsilon(0) = 0$ et la formule (12) entraîne $\varepsilon(t) = t$ pour $t \in j$, ce qui est absurde. On a donc $\varepsilon(0) > 0$ ou bien $\varepsilon(0) < 0$ et par conséquent $R\varepsilon(0) > 0$ ou bien $R\varepsilon(0) < 0$. Il en résulte en vertu de (12) et pour $t \in j$: $\varepsilon(t) > t$ ou bien $\varepsilon(t) < t$ suivant que $\varepsilon(0) > 0$ ou bien $\varepsilon(0) < 0$, ce qui achève la démonstration.

3) *Toute phase* $\varepsilon \in I_q$ *croissante et différente de t est la dispersion fondamentale ou bien son inverse d'une équation* (Q) *suivant que* $\varepsilon(0) > 0$ *ou bien* $\varepsilon(0) < 0$ *et les porteurs des équations inverses de* (Q) *sont périodiques avec* π (nº 7).

Supposons maintenant que, (q) étant normale elle résulte en plus régulière et donc, le radical R_q est une fonction-phase.

Cette situation entraîne la proposition suivante:

4) *Toute phase* $\varepsilon \in I_q$ *croissante et différente de t est la dispersion fondamentale ou bien son inverse de l'équation* (Q):

$$Q(t) = -\{R, t\} - \left[\frac{\pi}{R\varepsilon(0)}\right]^2 |1 + q(t)| , \tag{13}$$

suivant que $\varepsilon(0) > 0$ *ou bien* $\varepsilon(0) < 0$ *et les porteurs des équations inverses de* (Q) *sont périodiques avec* π.

En effet, dans les conditions ci-dessus, la fonction $\pi R(t) : R\varepsilon(0)$ est une phase de l'équation (Q) donnée par la formule (2) et admettant la dispersion fondamentale ε ou bien ε^{-1} suivant que $\varepsilon(0) > 0$ ou bien $\varepsilon(0) < 0$.

10. – *Equations associées.*

Deux équations (q), (q^*) du même bloc sont appelées *associées* et chacune d'elles est dite associée avec l'autre.

1) *Pour que l'équation* (q^*) *soit associée avec* (q) *il faut et il suffit qu'il existe une phase* $\varepsilon \in \mathfrak{E}$ *envoyant toute phase de* (q), α, *dans une phase de* (q^*), $\alpha^* = \alpha\varepsilon$.

DÉMONSTRATION. – Soit α_0 une phase de (q) et $\bar{u}$ le bloc correspondant; on a alors: $\mathfrak{E}\alpha_0$, $\alpha_0\mathfrak{E} \subset \bar{u}$.

a) Supposons que (q^*) est associée avec (q). $\bar{a}^*$ étant l'ensemble des phases de (q^*) on a $\bar{a}^* \in \bar{\bar{u}}_d$, et la propriété $\#$ entraîne $\bar{a}^* \cap \alpha_0\mathfrak{E} \neq \emptyset$. Chaque élément de cette intersection, α_0^*, est une phase de (q^*) de la forme $\alpha_0^* = \alpha_0\varepsilon$, $\varepsilon \in \mathfrak{E}$ et donc, ε envoie la phase α_0 dans α_0^*. Pour voir que ε jouit de la propriété ci-dessus, considérons une phase quelconque de (q), α. Il existe alors une phase $\varepsilon_0 \in \mathfrak{E}$ telle que $\alpha \quad \varepsilon_0\alpha_0$ et l'on a: $(\alpha^* =) \varepsilon_0\alpha_0^* = (\varepsilon_0\alpha_0)\varepsilon = \alpha\varepsilon$, α^* étant, évidemment, une phase de (q^*). On voit que ε envoie la phase α dans α^*.

b) Soit $\varepsilon \in \mathfrak{E}$ une phase jouissant de la propriété ci-dessus. La fonction $\alpha^* \quad \alpha_0\varepsilon$ est alors une phase de (q^*) et l'on a: $\alpha^*\mathfrak{E} = (\alpha_0\varepsilon)\mathfrak{E} \quad \alpha_0\mathfrak{E} \subset \bar{u}$. Il en résulte $\alpha^*\mathfrak{E} \subset \bar{u}$ et cela achève la démonstration.

En utilisant le langage de la théorie des groupes nous appelons l'application $(q) \to (q^*)$ dont il est la question dans le théorème précedent, *translation de* (q) *dans* (q^*). Nous disons par occasion que l'équation (q^*) est associée avec (q) par la translation ε ou encore que la translation ε fait associer l'équation (q^*) avec (q).

Il est clair que la propriété d'associabilité dont nous venons de parler est un même temps réflexive, symétrique et transitive. En particulier, *si* (q^*) *est associée avec* (q) *par* ε, *l'équation* (q) *résulte associée avec* (q^*) *par* ε^{-1}.

Inutile de dire que les translations sont des changements de t de la forme (ε) (v.I.).

Considérons à présent deux équations associées (q), (q^*). Soit ε une translation de (q) dans (q^*).

D'abord, nous nous intéressons de l'ensemble des translations de (q) dans (q^*). A ce sujet on a le théorème suivant:

2) *L'ensemble des translations de* (q) *dans* (q^*) *est la classe de la décomposition à droite* $\mathfrak{C}/_d I_q$, *contenante* ε, $I_q\varepsilon$.

DÉMONSTRATION. – Soit α une phase de (q). La fonction $\alpha^* = \alpha\varepsilon$ est alors un phase de (q^*). Soit ξ une translation quelconque de (q) dans (q^*). $\alpha\xi$ est donc une phase de (q^*) et l'on a par conséquent $\alpha\xi = \varepsilon_0\alpha^* = \varepsilon_0\alpha\varepsilon$, où $\varepsilon_0 \in \mathfrak{C}$. Il en résulte $\xi = \alpha^{-1}\varepsilon_0\alpha\varepsilon \in (\alpha^{-1}\mathfrak{C}\alpha \cap \mathfrak{C})\varepsilon = I_q\varepsilon$, d'où $\xi \in I_q\varepsilon$. Nous voyons que l'ensemble en question se trouve contenu dans $I_q\varepsilon$. Inversement, soit $\xi \in I_q\varepsilon$ et donc $\xi = \alpha^{-1}\varepsilon_0\alpha\varepsilon \in \mathfrak{C}$, où $\varepsilon_0 \in \mathfrak{C}$. On en tire $\alpha\xi = \varepsilon_0(\alpha\varepsilon)$ ce qui montre que ξ est une translation de (q) dans (q^*). Cela achève la démonstration.

En particulier $(\varepsilon = t)$, l'ensemble des translations de l'équation (q) dans elle-même est précisément l'indicateur I_q.

En second lieu nous nous intéressons des fonctions q^*, R^*, I_{q^*}, φ_1^*, les notations étant évidentes.

3) *On a dans* j *les formules suivantes*:

$$q^*(t) = -1 + [1 + q\varepsilon(t)]\varepsilon'^2(t) \tag{14}$$

$$R^*(t) = \operatorname{sgn}\varepsilon'[R\varepsilon(t) - R\varepsilon(0)] \tag{15}$$

$$I_{q^*} = \varepsilon^{-1}I_q\varepsilon\,, \tag{16}$$

$$\varphi_1^*(t) = \varepsilon^{-1}\varphi_{\operatorname{sgn}\varepsilon'}\,\varepsilon(t)\,. \tag{17}$$

DÉMONSTRATION. – La base commune de ces formules consiste en ceci que, pour toute phase de (q), α, la fonction $\alpha^* = \alpha\varepsilon$ est une phase de (q^*).

Or, la formule (14) résulte immédiatement de (7) et (8). Cette formule entraîne à son tour (15). Quant à (16) nous avons

$$I_{q^*} = (\alpha\varepsilon)^{-1}\mathfrak{C}(\alpha\varepsilon) \cap \mathfrak{C} = \varepsilon^{-1}\alpha^{-1}\mathfrak{C}\alpha\varepsilon \cap \mathfrak{C} =$$
$$= \varepsilon^{-1}[\alpha^{-1}\mathfrak{C}\alpha \cap \varepsilon\mathfrak{C}\varepsilon^{-1}]\varepsilon = \varepsilon^{-1}[\alpha^{-1}\mathfrak{C}\alpha \cap \mathfrak{C}]\varepsilon = \varepsilon^{-1}I_q\varepsilon\,.$$

Finalement on a d'après (6):

$$\varphi_1^*(t) = (\alpha\varepsilon)^{-1}[\alpha\varepsilon(t) + \pi\cdot\operatorname{sgn}(\alpha\varepsilon)'] =$$
$$= \varepsilon^{-1}\alpha^{-1}[\alpha + \pi\cdot\operatorname{sgn}\alpha'\cdot\operatorname{sgn}\varepsilon']\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\varphi_{\operatorname{sgn}\varepsilon'}\,\varepsilon(t)\,.$$

Les formules précédentes appelent les remarques suivantes:

Si l'équation (q) *est normale,* (q^*) *en est aussi et subsiste la formule*

$$\varepsilon(t) = R^{-1}[\operatorname{sgn}\varepsilon' \cdot R^*(t) + R\varepsilon(0)] ,$$

et tous les éléments de la classe de la décomposition $\mathfrak{C}/_d I_d$ *contenante* ε *vérifient cette relation* $\big((14), (15)\big)$.

Si l'équation (q) *est régulière, l'équation* (q^*) *en est aussi.* $\big((14)\big)$.

Si I_q *est invariant dans* $\mathfrak{C}$, I_{q^*} *se confond avec* I_q. $\big((16)\big)$.

Si φ_1 *est une phase spéciale,* φ_1^* *en est aussi.* $\big((17)\big)$.

Quant aux intégrales de l'équation (q^*) on a le théorème suivant:

3) *Toute intégrale de* (q^*), y^*, *est la transformée d'une intégrale de* (q), y, *en sens de la formule*:

$$y^*(t) = \frac{y\varepsilon(t)}{\sqrt{|\varepsilon'(t)|}} \qquad (t \in j) .$$

En effet, on a dans j pour de convenables phases α^* et α de (q^*) et (q):

$$\alpha^* = \alpha\varepsilon; \qquad y^* = C \cdot \frac{\sin \alpha^*}{\sqrt{|\alpha^{*\prime}|}} \qquad (C = \text{const.})$$

et la fonction $y = C \cdot \sin \alpha : \sqrt{|\alpha'|}$ est une intégrale de (q), ce qui démontre la proposition.

Finalement, il s'agit de déterminer la puissance du bloc des équations contenant (q), c'est-à-dire de $\{q^{\bar{u}}\}$:

4) *Substitute la relation d'équivalence:*

$$\{q^{\bar{u}}\} \sim \mathfrak{C}/_d I_q .$$

En effet, faisons correspondre à toute équation (q^*) associée avec (q) la classe des translations envoyant (q) dans (q^*), $\bar{e}^* \in \mathfrak{C}/_d I_q$. On a alors une application $\mathfrak{T}$ de $\{q^{\bar{u}}\}$ sur $\mathfrak{C}/_d I_q$, $\mathfrak{T}$: $(q^*) \to \bar{e}^*$ et il est clair que cette application résulte biunivoque. Il en résulte la proposition.

11. – *Equations inverses.*

Nous passons maintenant aux équations dites inverses et dont la notion a déjà été prélevé au nº 5.

Considérons une équation quelconque (q).

Nous avons dit que nous appelons une équation $(\bar{q})$ inverse de (q) si elle admet une phase $\bar{\alpha}$ qui est la fonction inverse d'une phase de (q), α: $\bar{\alpha} - \alpha^{-1}$. La relation en question est évidemment symétrique par rapport aux équations (q), $(\bar{q})$. Nous parlons donc des équations mutuellement inverses, plus simplement: inverses, (q), $(\bar{q})$, et nous disons que chacune d'entre elles est inverse de l'autre. Nous avons aussi souligné que les équations inverses de (q) forment un ensemble dont les éléments dépendent de différentes phases de (q). On a à ce sujet le thorème fondamental suivant:

1) *Deux équations* (q), $(\bar{q})$ *sont inverses l'une de l'autre si et seulement si elles appartiennent à des blocs mutuellement inverses.*

DÉMONSTRATION. – Soient $\alpha, \bar{\alpha}$ des phases de (q), $(\bar{q})$ et $\bar{u}, \bar{u}'$ les blocs correspondants: $\mathfrak{C}\alpha \in \bar{u}_d$, $\mathfrak{C}\bar{\alpha} \in \bar{u}'_d$. Si l'équation $(\bar{q})$ est inverse de (q), elle admet une phase $\varepsilon_1\bar{\alpha}$ qui est la fonction inverse d'une phase de (q), $\varepsilon_2\alpha$: $\varepsilon_1\bar{\alpha} = (\varepsilon_2\alpha)^{-1}$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathfrak{C}$. Cette égalité entraîne en vertu des formules $\varepsilon_1\bar{\alpha} \in \mathfrak{C}\bar{\alpha} \in \bar{u}'_d$; $(\varepsilon_2\alpha)^{-1} = \alpha^{-1}\varepsilon_2^{-1} \in$ $\in \alpha^{-1}\mathfrak{C} \in u_g^{-1}$: $\bar{u}' \cap \bar{u}\ ^{1} \neq \emptyset$, d'où $\bar{u}' = \bar{u}^{-1}$. Inversement, si l'équation $(\bar{q})$ appartient au bloc $\bar{u}^{-1}$, la relation $\mathfrak{C}\bar{\alpha} \in \bar{u}_d^{-1}$ entraîne $\bar{\alpha}^{-1}\mathfrak{C} \in \bar{\bar{u}}_g$ et subsiste, en vertu de $\#$, l'inégalité $\bar{\alpha}^{-1}\mathfrak{C} \cap \mathfrak{C}\alpha \neq \emptyset$. Donc on a pour de convenables phases $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathfrak{C}$ la formule $(\varepsilon_1\bar{\alpha})^{-1} = \varepsilon_2\alpha$, d'où $\varepsilon_1\bar{\alpha}\quad(\varepsilon_2\alpha)\ ^{1}$, ce qui achève la démonstration.

Le théorème que nous venons de démontrer entraîne évidemment que, toutes les équations inverses de (q) sont précisément les équations associées avec une quelconque d'entre elles.

Soient $(\bar{q})$ une équation inverse de (q), $\bar{q} = q_{\alpha-1}$ et $\bar{R}, I_{\bar{q}}, \bar{\varphi}_1$ les fonctions correspondantes.

2) *On a dans j les formules suivantes*:

$$\bar{q}(t) = -1 - [1 + q\alpha^{-1}(t)]\alpha^{-1'2}(t)\,, \tag{18}$$

$$\bar{R}(t) - \operatorname{sgn}\alpha' \cdot [R\alpha^{-1}(t) - R\alpha^{-1}(0)]\,, \tag{19}$$

$$I_{\bar{q}} = \alpha I_q \alpha\ ^{1}\,, \tag{20}$$

$$\bar{\varphi}_1(t) = \alpha^2\varphi_1\alpha^{-2}(t)\,. \tag{21}$$

Nous omettons la démonstration de ces formules et les conclusions correspondantes car elles sont analogues aux raisonnements effectués pour les équations associées.

En ce qui concerne les intégrales de $(\bar{q})$ on a la proposition suivante qui est encore analogue au cas des équations associées:

3) *Toute intégrale de* $(\bar{q})$, $\bar{y}$, *est la transformée d'une intégrale*

de (q), y, *en sens de la formule:*

$$\bar{y}(t) = \frac{y\alpha^{-2}(t)}{\sqrt{|\alpha^{-2\prime}(t)|}} \qquad (t \in j) .$$

Finalement, notons les formules d'équivalence, valables pour d'arbitraires blocs $\bar{u}, \bar{u}^{-1}$ et les équations correspondantes (q), $(\bar{q})$:

4) *Subsistent les relations d'équivalence*:

$$\bar{u}_g^{-1} \sim \bar{u}_d \sim \{q^{\bar{u}}\} \sim \mathfrak{C}/_d I_q ,$$

$$\bar{\bar{u}}_g \sim \bar{\bar{u}}_d^{-1} \sim \{\bar{q}^{\bar{u}-1}\} \sim \mathfrak{C}/_d I_{\bar{q}} .$$

V. – L'équation de Mathieu.

12. – Nous allons refraîchir la théorie précédente par l'exemple de l'équation de Mathieu:

$$y'' = (-\lambda + 2h^2 \cdot \cos 2t) y \qquad (t \in j;\ \lambda \neq 0 \neq h = \text{const.}) .$$

Pour éviter des complications inutiles nous supposons $-\lambda + 2h^2 < -1$ et désignons

$$p = -\lambda + 2h^2 \ (< -1) , \qquad k^2 = 4h^2 : [-(p+1)] \ (> 0) .$$

Avec ces notations l'équation en question prend la forme

$$(m) \qquad y'' = p \cdot \left(1 + \frac{4h^2}{-p} \cdot \sin^2 t\right) y$$

et l'on a évidemment: $q(t) = p \cdot (1 + 4h^2 \cdot \sin^2 t / (-p))$, $1 + q(t) = (p+1)(1 + k^2 \cdot \sin^2 t)$. Remarquons que le radical de (m) s'exprime en terme de l'intégrale elliptique

$$R(t) = \sqrt{|p+1|} \int_0^t \sqrt{1 + k^2 \cdot \sin^2 \sigma}\, d\sigma .$$

1) Equations associées avec l'équation (m). Si l'on applique les formules (3), (8) on trouve sans aucune espèce de difficultés le résultat suivant:

Toutes les équations associées avec l'équation (m) *sont données par la formule suivante:*

$$(22)\qquad q^*(t) = -1 - \frac{4h^2c^2\sin^2(b-a)}{k^2}\cdot$$
$$\cdot\frac{c^2(1+k^2)\sin^2(a+t)+\sin^2(b+t)}{[c^2\cdot\sin^2(a+t)+\sin^2(b+t)]^3};$$

$a, b; c$ sont des constantes telles que $0 \leqslant a, b < \pi$; $c\cdot\sin(b-a) \neq 0$.

2) *Indicateur.* Le porteur de l'équation (m) étant périodique avec π et paire, la théorie précédente entraîne que l'indicateur de (m) contient l'hypocentre du groupe fondamental $\mathfrak{C}$. Nous allons démontrer le théorème:

L'indicateur de l'équation (m) *est précisément l'hypocentre du groupe* $\mathfrak{C}$.

Démonstration. – Soit ε une phase spéciale-élément de l'indicateur de l'équation (m), I_m: $\varepsilon(t) \in I_m$ $(t \in j)$.

D'après (3) on a

$$(23)\qquad \varepsilon(t) = {}_\nu\mathrm{Arc\,tg}\, c\cdot\frac{\sin(t+a)}{\sin(t+b)},$$

$a, b, c; \nu$ étant des constantes telles que

$$(24)\qquad 0 \leqslant a, b < \pi; \quad c\cdot\sin(b-a) \neq 0; \quad \nu \text{ entier}.$$

Or, étant donné que la fonction ε satisfait à l'équation d'indicateur, (10), subsiste la relation identique

$$(25)\qquad c^2\cdot\sin^2(b-a)\{c^2(1+k^2)\sin^2(a+t)+\sin^2(b+t)\} =$$
$$= (1+k^2\sin^2 t)\{c^2\cdot\sin^2(a+t)+\sin^2(b+t)\}^3$$

et l'autre, obtenue par la différentiation,

$$(26)\qquad c^2\cdot\sin^2(b-a)\{c^2(1+k^2)\sin 2(a+t)+\sin 2(b+t)\} =$$
$$= k^2\sin 2t\{c^2\cdot\sin^2(a+t)+\sin^2(b+t)\}^3 +$$
$$+ 3(1+k^2\sin^2 t)\{c^2\sin 2(a+t)+\sin 2(b+t)\}\cdot$$
$$\cdot\{c^2\sin^2(a+t)+\sin^2(b+t)\}^2.$$

La relation (25) donne pour $t = a$ et $t = -b$:

$$(27) \qquad c^2 \qquad = (1 + k^2 \sin^2 a) \sin^2(b - a)\,,$$

$$(28) \qquad 1 + k^2 = c^2(1 + k^2 \sin^2 b) \sin^2(b - a)\,,$$

tandis que (26) entraîne pour les mêmes valeurs de t:

$$(29) \qquad 4c^2 \cos(b - a) \qquad = k^2 \sin 2a \cdot \sin^3(b - a)\,,$$

$$(30) \qquad 4(1 + k^2) \cos(b - a) = -c^2 k^2 \sin 2b \cdot \sin^3(b - a)\,.$$

Il s'agit, évidemment, de déterminer toutes les solutions du système (27)-(30), qui vérifient les conditions (24) et, pour lesquelles la relation (25) subsiste identiquement. Chaque solution de ce genre fournit en vertu de (23) le système complet des phases de la base correspondante, $c \cdot \sin(t + a)$, $\sin(t + b)$, phases-éléments de I_m.

Dans ce but nous allons distinguer les deux cas suivants:

$$(31) \qquad a) \quad \sin 2a \cdot \sin 2b = 0\,; \qquad b) \quad \sin 2a \cdot \sin 2b \neq 0\,.$$

a) Dans ce cas le système (27)-(30) admet précisément les deux solutions suivantes:

$$1) \quad a = 0\,, \quad b = \frac{\pi}{2}\,, \quad c^2 = 1\,;$$

$$2) \quad a = \frac{\pi}{2}\,, \quad b = 0\,, \quad c^2 = 1\,.$$

Pour la solution 1) la relation (25) se trouve identiquement vérifiée et la formule (3) fournit les systèmes complets des phases qui appartiennent aux bases correspondantes aux valeurs $c = 1$ et $c = -1$:

$$\varepsilon_\nu(t) = t + \nu\pi\,, \quad \varepsilon_\nu(t) = -t - \nu\pi \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\,.$$

On voit que ces fonctions sont précisément les éléments de l'hypocentre de $\mathfrak{C}$.

Pour la solution 2) la relation (25) ne se trouve évidemment pas identiquement vérifiée et donc, la solution en question ne fournit pas d'éléments de I_m.

b) C'est précisément l'analyse de ce cas qui représente le noyau de la démonstration.

Or, les formules (27), (28) et (29), (30) entraînent

$$\frac{c^4}{1+k^2} = \frac{A+\cos 2a}{A+\cos 2b}, \qquad \frac{c^4}{1+k^2} = -\frac{\sin 2a}{\sin 2b} \tag{32}$$

$$\left(A = -\frac{k^2+2}{k^2} < -1\right)$$

et, a fortiori,

$$A(\sin 2a + \sin 2b) = -\sin 2(a+b)\,,$$

d'où

$$\sin(a+b)\cdot[A\cdot\cos(a-b) + \cos(a+b)] = 0\,. \tag{33}$$

Cette formule montre qu'on a deux cas à distinguer:

$$1)\quad \sin(a+b) = 0\,; \qquad 2)\quad \sin(a+b) \neq 0\,.$$

1) Dans ce cas on a évidemment $b = \pi - a$ et donc, d'après (32)

$$c^4 = 1 + k^2\,; \tag{34}$$

en même temps la relation (25) s'écrit

$$c^2\cdot\sin^2 2a\{c^2(1+k^2)\sin^2(a+t) + \sin^2(a-t)\} =$$
$$= (1 + k^2\sin^2 t)\cdot\{c^2\cdot\sin^2(a+t) + \sin^2(a-t)\}^3\,.$$

On en tire en vertu de (32) et pour $t = 0$ et $t = \pi/2$:

$$4c^2(c^6+1)\cos^2 a = (c^2+1)^3\sin^2 a\,,$$
$$c^2(c^2+1)^3\cos^2 a = 4(c^6+1)\sin^2 a\,.$$

Il en résulte la relation

$$(c^2-1)^2(c^2+1) = 0\,,$$

qui est, d'après (34), absurde.

2) Dans ce cas on a d'après (33)

$$A\cdot\cos(a-b) + \cos(a+b) = 0$$

ou bien, ce qui revient au même,

$$\text{(35)} \qquad \operatorname{tg} b = -\frac{1}{k^2+1} \operatorname{cotg} a \, .$$

Il en résultent les formules

$$\sin^2 b = \frac{\cos^2 a}{1 + k^2(k^2+2)\sin^2 a}, \quad \cos^2 b = (k^2+1)^2 \frac{\sin^2 a}{1 + k^2(k^2+2)\sin^2 a}$$

qui entraînent en vertu de (27), (28):

$$\frac{c^4}{k^2+1} = \frac{1 + k^2 \sin^2 a}{1 + k^2 \sin^2 b} = \frac{1}{k^2+1}[1 + k^2(k^2+2)\sin^2 a] \, .$$

Subsistent par conséquent les formules

$$\text{(36)} \qquad \begin{aligned} \sin^2 a &= \frac{c^4-1}{k^2(k^2+2)}, & \cos^2 a &= \frac{(k^2+1)^2 - c^4}{k^2(k^2+2)}, \\ \sin^2 b &= \frac{(k^2+1)^2 - c^4}{c^4 k^2(k^2+2)}, & \cos^2 b &= \frac{(k^2+1)^2(c^4-1)}{c^4 k^2(k^2+2)} \, . \end{aligned}$$

On en déduit par un calcul élémentaire, en tenant compte de (35),

$$\sin^2(b-a) = \frac{(k^2+1+c^4)^2}{c^4(k^2+2)^2}$$

et puis, en vertu de (27), (36),

$$(c^2-1)(c^2-\overline{k^2+1}) = 0 \, ,$$

ce qui est absurde, d'après *b*) et (36). Cela achève la démonstration.

Nous omettons de formuler explicitement les conclusions évidentes auxquelles conduisent les théorèmes 2, 4 du n° 10 en relation avec le résultat que nous venons d'obtenir pour l'équation de Mathieu (*m*). Nous nous contentons d'insister au fait que, *toutes les transformations de l'équation de Mathieu dans elle-même par les phases spéciales* (23) *sont données précisément par les valeurs des paramètres*: $a = 0$, $b = \pi/2$, $c = \pm 1$; ν *entier*.

BIBLIOGRAPHIE

[1] O. Borůvka, *Linear differential transformations of the second order*, The English Universities Press, London, 1971.
[2] F. Neuman, *Geometrical approach to linear differential equations of the n-th order*, Rend. Mat., (6) **5** (1972), pp. 579-602.
[3] O. Borůvka, *Foundations of the theory of groupoids and groups*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (GDR), 1974.
[4] O. Borůvka, *Sur la périodicité de la distance des zéros des intégrales de l'équation différentielle* $y'' = q(t)y$, Tensor, **26** (1972), pp. 121-128.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 15 settembre 1976

„Monograf" - Bologna - Via Collamarini 5