

Borůvka, Otakar: Scholarly works

Otakar Borůvka

Sur les transformations simultanées de deux équations différentielles linéaires du deuxième ordre dans elles-mêmes

Applicable Anal. 15, 1983, 187-200

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/500170>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Sur les Transformations Simultanées de Deux Équations Différentielles Linéaires du Deuxième Ordre dans Elles-mêmes

O. BORŮVKA

*L'Institut des Mathématiques, de l'Académie tchécoslovaque des
Sciences, succursale de Brno, 662 95 Brno, Janáčkovo nám. 2a,
Tchécoslovaquie, Czechoslovakia*

**Hommage à mon illustre Collègue M. G. Fichera pour son
60^e anniversaire**

Communicated by R. P. Gilbert

Dedicated to Gaetano Fichera on his 60th birthday

(Received in final form January 20, 1983)

AMS (MOS) Classification 34C20

1. INTRODUCTION

Dans l'article suivant nous considérons les équations différentielles ordinaires linéaires du deuxième ordre de la forme jacobienne

$$y'' = Q(t)y, \quad (Q)$$

aux porteurs continus dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$: $Q \in C^0$. Nous supposons ces équations oscillatoires et donc, jouissant de la propriété que leurs intégrales admettent infiniment beaucoup de zéros qui s'accroissent vers les deux extrémités de j . Nous désignons par M l'ensemble $\{(Q)\}$ ou bien, par occasion, l'ensemble $\{Q\}$.

On sait que toute équation $(Q) \in M$ peut être transformée dans toute équation $(P) \in M$. Cela veut dire qu'il existe de fonctions-phases, X , changeant chaque intégrale $y(x)$ de (Q) dans une intégrale $Y(t)$ de (P) suivant la formule

$$Y(t) = \frac{c}{\sqrt{|X'(t)|}} y[X(t)] \quad (0 \neq c = \text{const.})$$

La fonction X s'appelle *transformateur* de (Q) dans (P) . Ces transformateurs sont précisément les intégrales de l'équation de Kummer

$$-\{X, t\} + Q(X)X'^2(t) = P(t) \quad (QP)$$

et donc, leur ensemble est l'intégrale générale de (QP) .

Rappelons qu'on appelle *fonction-phase* toute fonction

$$A: j \xrightarrow{\text{sur}} j, \quad A \in C^3, \quad A' \neq 0$$

(dans j). L'ensemble des fonctions-phases, muni de la loi de multiplication définie par composition de fonctions, est un groupe, \mathcal{G} , appelé le *groupe des phases*. On désigne par \mathcal{G}^+ le sous-groupe de \mathcal{G} formé des fonctions-phases constamment croissantes: $\mathcal{G} \supset \mathcal{G}^+$.

On appelle *dispersion* de (Q) (ou bien de Q) tout transformateur X de l'équation (Q) dans elle-même. Les dispersions de (Q) sont donc les intégrales de "l'équation des dispersions" (QQ) . Leur ensemble muni de la loi de multiplication définie par composition de fonctions est le *groupe des dispersions* de (Q) , \mathcal{L}_Q . On désigne par \mathcal{L}_Q^+ le sous-groupe de \mathcal{L}_Q formé des dispersions constamment croissantes: $\mathcal{L}_Q \supset \mathcal{L}_Q^+$.

II. ENONCÉ DU PROBLÈME

Nous allons nous occuper du problème suivant: Déterminer les dispersions constamment croissantes qui transforment simultanément deux équations $(Q_1), (Q_2) \in \tilde{M}$ dans elles-mêmes. En d'autres termes, il s'agit de la recherche des intégrales constamment croissantes qui vérifient à la fois les équations $(Q_1Q_1), (Q_2Q_2)$.

Notre méthode employée pour résoudre ce problème est fondée sur le fait que les transformateurs correspondant au problème en question forment un groupe, \mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+ , qui est l'intersection des groupes $\mathcal{L}_{Q_1}^+, \mathcal{L}_{Q_2}^+$:

$$\mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+ = \mathcal{L}_{Q_1}^+ \cap \mathcal{L}_{Q_2}^+.$$

III. ETUDE DU PROBLÈME

1. Considérons les équations $(Q_1), (Q_2) \in M$, $Q_1 \neq Q_2$, et désignons

$$\mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+ = \mathcal{L}_{Q_1}^+ \cap \mathcal{L}_{Q_2}^+.$$

\mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+ est donc un sous-groupe de \mathcal{G}^+ formé des intégrales constamment croissantes, X , qui vérifient simultanément les équations

$$-\{X, t\} + Q_i(X)X'^2(t) = Q_i(t) \quad (\forall t \in j; i = 1, 2) \quad (Q_i Q_i)$$

2. Soient $\mathbb{A}, \mathbb{B} (\subset j)$ les ensembles

$$\mathbb{A} = E_t[t \in j; Q_1(t) - Q_2(t) \neq 0],$$

$$\mathbb{B} = E_x[x \in j; Q_1(x) - Q_2(x) = 0].$$

L'ensemble $(\emptyset \neq) \mathbb{A}$ résulte, manifestement, ouvert. Donc, \mathbb{A} est la réunion d'un ensemble dénombrable des intervalles ouverts et disjoints, $i_\alpha: \mathbb{A} = \cup i_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots$). L'ensemble \mathbb{B} , à son tour, est le complément de \mathbb{A} dans j : $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = j$; donc \mathbb{B} (vide ou non) est fermé.

Un point $(t, y) \in j \times j$ est dit de la *première espèce* si les deux coordonnées t, y sont à la fois éléments de \mathbb{A} ou de \mathbb{B} . Il est dit de la *seconde espèce* dans le cas contraire.

1. Pour $\xi \in \mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+$ tout point $(t, \xi(t))$ ($t \in j$) est de la première espèce.

En effet, pour $\xi \in \mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+$ on a

$$[Q_1(\xi(t)) - Q_2(\xi(t))] \xi'^2(t) = Q_1(t) - Q_2(t) \quad \forall t \in j$$

et, par hypothèse, $\xi'(t) > 0$. Il en résulte la proposition.

COROLLAIRE *Aucune fonction $\xi \in \mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+$ ne passe par un point de la seconde espèce.*

3. Radicaux.

Nous appelons *radical* des équations $(Q_1), (Q_2)$ par rapport à e la fonction définie dans j :

$$R_e(t) = \int_e^t \sqrt{|Q_1(\tau) - Q_2(\tau)|} d\tau,$$

$e (\in j)$ étant un nombre fixe quelconque. Pour simplifier, nous écrivons souvent R au lieu de R_e .

Les formules suivantes sont évidentes:

$$R(e) = 0, \quad R(t) \geq 0 \text{ pour } t > e, \quad R(t) \leq 0 \text{ pour } t < e,$$

$$R \in C^1, \quad R'(t) = \sqrt{|Q_1(t) - Q_2(t)|} \geq 0 \text{ pour } t \in \mathbb{A}$$

Pour $t_1, t_2 \in j, t_1 < t_2$ on a, manifestement,

$$R(t_2) - R(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{|Q_1(\tau) - Q_2(\tau)|} d\tau \geq 0$$

La fonction $\sqrt{|Q_1 - Q_2|}$ étant continue dans j , la relation $R(t_1) < R(t_2)$ subsiste précisément dans le cas s'il existe un nombre $t \in [t_1, t_2] \cap \mathbb{A}$.

Il en résulte, en particulier, la proposition suivante:

2. a. Pour $t_1, t_2 \in \mathbb{A}, t_1 < t_2$ on a $R(t_1) < R(t_2)$.

b. Pour $t_1, t_2 \in j, t_1 < t_2$ on a $R(t_1) = R(t_2)$ précisément dans le cas $[t_1, t_2] \subset \mathbb{B}$.

Nous allons continuer par établir d'autres propriétés de la fonction R .

3. Soit $X \in \mathcal{G}^+$ un transformateur de l'équation (Q_i) dans (\tilde{Q}_i) ($i = 1, 2$). On a alors

$$\tilde{R} = R(X),$$

\tilde{R} étant le radical des équations $(\tilde{Q}_1), (\tilde{Q}_2)$ par rapport à $\tilde{e} = X^{-1}(e)$.

Démonstration. On a, par hypothèse,

$$\sqrt{|Q_1(X) - Q_2(X)|} X'(t) = \sqrt{|\tilde{Q}_1(t) - \tilde{Q}_2(t)|}$$

et donc

$$R'(X)X'(t) = \sqrt{|\tilde{Q}_1(t) - \tilde{Q}_2(t)|} \quad \forall t \in j.$$

Il en résulte facilement l'achèvement de la démonstration.

Toute fonction $\xi \in \mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+$ transforme l'équation (Q_i) dans elle-même. Par conséquent, le radical R jouit, d'après 3, de la propriété suivante:

4. Pour $\xi \in \mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+$ on a

$$R\xi(t) = R(t) + R\xi(e) \quad \forall t \in j. \quad (1)$$

Nous écrivons, pour simplifier, $R\xi$ au lieu de $R(\xi)$.

La formule (1) entraîne à son tour les formules suivantes valables pour d'arbitraires fonctions $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+$:

$$R\xi_1(t) - R\xi_2(t) = R\xi_1(e) - R\xi_2(e), \quad (2)$$

$$R\xi_2\xi_1(t) = R(t) + R\xi_1(e) + R\xi_2(e) \quad \forall t \in j. \quad (3)$$

5. Soient $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+$. La relation $R\xi_1(t) = R\xi_2(t) \quad \forall t \in j$ entraîne $\xi_1(t) = \xi_2(t) \quad \forall t \in j$.

Démonstration. Soit i_α ($\subset j$) l'un des intervalles ci-dessus formant l'ensemble A . S'il existe un nombre $x \in i_\alpha$ tel que $\xi_1(x) \neq \xi_2(x)$, on a d'après 2b: $\xi_1(x) \in \mathbb{B}$, et encore, d'après 1: $\xi_1^{-1}\xi_1(x) = x \in \mathbb{B}$, ce qui est absurde. Il en résulte $\xi_1(t) = \xi_2(t) \quad \forall t \in i_\alpha$. Or, les fonctions ξ_1, ξ_2 étant intégrales de l'équation (Q_1, Q_2) et dont les valeurs coïncident dans i_α , le théorème sur l'existence et l'unicité des intégrales de l'équation (Q_1, Q_2) [1] entraîne l'égalité $\xi_1(t) = \xi_2(t) \quad \forall t \in j$.

6. Le groupe \mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+ est abélien.

En effet, on a pour $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+$, d'après (3), $R\xi_2\xi_1(t) = R\xi_1\xi_2(t) \quad \forall t \in j$ et donc, d'après 5, $\xi_2\xi_1 = \xi_1\xi_2$.

4. Ordre du groupe $\mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+$.

7. Soient $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+$; $t_0 \in j$. L'égalité $\xi_1(t_0) = \xi_2(t_0)$ entraîne $\xi_1(t) = \xi_2(t) \forall t \in j$.

En effet, l'égalité en question entraîne, d'après (2), la relation $R\xi_1(t) = R\xi_2(t) \forall t \in j$. Il en résulte la proposition.

D'après 7 on a sur $\mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+$ un ordre appelé *naturel* dont la relation d'ordre, $<$, est définie de la façon suivante:

Pour $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+$, le symbole $\xi_1 < \xi_2$ signifie $\xi_1(t) < \xi_2(t) \forall t \in j$.

On a, évidemment, pour $\xi; \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{P}_{Q_1 Q_1}^+, \xi_1 < \xi_2: \xi_1 \xi < \xi_2 \xi, \xi \xi_1 < \xi \xi_2$, ce qui montre que l'ordre en question est linéaire.

5. Paramétrisation du groupe $\mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+$.

Un nombre $e \in j$ étant choisi, nous définissons l'application $\mathcal{A}_e: \mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+ \rightarrow j$ de la manière suivante: Pour $\xi \in \mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+$ on a $\mathcal{A}_e \xi = \xi(e)$. Cette application prend le nom *paramétrisation* de $\mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+$ par rapport à la base e , et nous écrivons, par occasion, \mathcal{A} au lieu de \mathcal{A}_e . Le nombre $\xi(e)$ est dit le *paramètre* de ξ en \mathcal{A}_e . Evidemment, e est le paramètre de l'élément-unité du groupe $\mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+$, *id.* Une paramétrisation de $\mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+$ étant donnée, on parle du groupe *paramétrisé*. Dans la suite nous supposons généralement que $\mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+$ soit paramétrisé.

Désignons par P_e (plus brièvement: P) l'ensemble des paramètres des éléments du groupe $\mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+$ paramétrisé par rapport à e . On a, manifestement, $e \in P$ et la formule $a \in P$ entraîne $a = \xi(e)$ pour un $\xi \in \mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+$.

D'après 7, l'application \mathcal{A} est une bijection de $\mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+$ sur P .

D'après 1, on a $P \subset \mathbb{A}$ ou $P \subset \mathbb{B}$ suivant que $e \in \mathbb{A}$ ou $e \in \mathbb{B}$.

8. Le radical R_e va constamment en croissant sur P_e .

Démonstration. Soient $\xi_1(e), \xi_2(e) \in P, \xi_1(e) < \xi_2(e)$. On a, manifestement, $R\xi_1(e) \leq R\xi_2(e)$. L'égalité $R\xi_1(e) = R\xi_2(e)$ entraîne en vertu de (2) et 5, la contradiction $\xi_1(e) = \xi_2(e)$.

6. Le groupe \mathcal{P}_e .

Soit \mathcal{P}_e (ou \mathcal{P}) le groupoïde (P, \circ) dont l'opération binaire, \circ , est

définie de la manière suivante:

Pour $\xi_1(e), \xi_2(e) \in \mathcal{P}$ on a $\xi_1(e) \circ \xi_2(e) = \xi_2 \xi_1(e)$.

9. \mathcal{P} est un groupe à l'unité e .

Démonstration. a. On démontre facilement l'associativité de \mathcal{P} .

b. On a pour

$$\xi(e) \in \mathcal{P}: e \circ \xi(e) = \xi(\text{id}(e)) = \xi(e); \quad \xi(e) \circ e = \text{id}\xi(e) = \xi(e)$$

et l'on voit que e est l'élément neutre de \mathcal{P} .

c. Pour $\xi(e) \in \mathcal{P}$ on a $\xi^{-1}(e) \in \mathcal{P}$ et l'on démontre que $\xi^{-1}(e)$ est l'élément inverse de $\xi(e)$ dans \mathcal{P} .

Le groupe \mathcal{P}_e prend le nom *groupe des paramètres* du groupe $\mathcal{P}_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2}^+$ par rapport à la base e , ou bien, plus brièvement, *groupe des paramètres*.

10. *Le groupe \mathcal{P} est abélien.*

En effet, le groupe $\mathcal{P}_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2}^+$ étant abélien, \mathcal{P} jouit, manifestement, de la même propriété.

11. *L'ordre classique du groupe \mathcal{P} résulte linéaire.*

Démonstration. Nous avons à montrer qu'on a, pour $\xi_1(e), \xi_2(e), \xi(e) \in \mathcal{P}$, $\xi_1(e) < \xi_2(e)$:

$$\xi(e) \circ \xi_1(e) < \xi(e) \circ \xi_2(e); \quad \xi_1(e) \circ \xi(e) < \xi_2(e) \circ \xi(e)$$

ou bien, en d'autres termes:

$$\xi_1 \xi(e) < \xi_2 \xi(e); \quad \xi \xi_1(e) < \xi \xi_2(e).$$

Or, l'inégalité $\xi_1(e) < \xi_2(e)$ entraîne $\xi_1 < \xi_2$ et il en résulte la première formule; la validité de la seconde résulte de ceci que la fonction ξ va constamment en croissant dans j .

12. *La paramétrisation \mathcal{A} réalise un o -isomorphisme du groupe $\mathcal{P}_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2}^+$ sur \mathcal{P} .*

Démonstration. Nous savons que l'application \mathcal{A} est une bijection de $\mathcal{P}_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2}^+$ sur \mathcal{P} . De plus, on a pour $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{P}_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2}^+$:

$$\mathcal{A}\xi_1\xi_2 = \xi_1\xi_2(e) = \xi_2(e) \circ \xi_1(e) = \mathcal{A}\xi_2 \circ \mathcal{A}\xi_1 = \mathcal{A}\xi_1 \circ \mathcal{A}\xi_2,$$

et encore, pour $\xi_1 < \xi_2$: $\xi_1(e) < \xi_2(e)$ et donc $\mathcal{A}\xi_1 < \mathcal{A}\xi_2$.

Nous désignons par \mathcal{R} le groupe additif des nombres réels.

7. Application R^* .

Désignons par R^* la fonction partielle de R , définie sur l'ensemble P :

$$R^*(t) = R(t) \quad \forall t \in P.$$

D'après 8. La fonction R^* va constamment en croissant sur P .

Soit $R^*(P) = H$. L'application $R^*: P \rightarrow H$ qui fait associer à tout élément $\xi(e) \in P$ le nombre $R^*\xi(e) \in H$ est manifestement une bijection de P sur H .

13. L'ensemble H est clos par rapport à l'addition $+$.

En effet, pour $a, b \in H$ on a

$$a = R^*\xi_1(e), \quad b = R^*\xi_2(e); \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{P}_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2}^+$$

et donc, en vertu de (3): $a + b = R^*\xi_2\xi_1(e) \in H$.

14. Le groupoïde $\mathcal{Y} = (H, +)$ est un sous-groupe de \mathcal{R} , $\mathcal{Y} \subset \mathcal{R}$, et l'application R^* réalise un o -isomorphisme de \mathcal{P} sur \mathcal{Y} .

Démonstration. La première partie de la proposition est évidente. Il est encore clair que l'application R^* de \mathcal{P} sur \mathcal{Y} est biunivoque. Pour $\xi_1(e), \xi_2(e) \in \mathcal{P}$ on a

$$R^*[\xi_1(e) \circ \xi_2(e)] = R^*\xi_2\xi_1(e) = R^*\xi_1(e) + R^*\xi_2(e)$$

et cela montre que l'application R^* est homomorphe. Finalement, $\xi_1(e) < \xi_2(e)$ entraîne $R^*\xi_1(e) < R^*\xi_2(e)$, étant donné que R^* va constamment en croissant sur \mathcal{P} .

THÉORÈME (fondamental) *Le groupe \mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+ est o-isomorphe au groupe \mathcal{Y} .*

Démonstration. L'application \mathcal{A} réalise, d'après 12, un o-isomorphisme de \mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+ sur \mathcal{P} et, en vertu de 14, R^* est un o-isomorphisme de \mathcal{P} sur \mathcal{Y} . Il en résulte que l'application $\mathcal{F} = R^* \mathcal{A} : \mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+ \rightarrow \mathcal{Y}$ est un o-isomorphisme de \mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+ sur \mathcal{Y} .

COROLLAIRE *Le groupe \mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+ est image o-isomorphe d'un sous-groupe de \mathcal{R} .*

8. Conséquences du théorème fondamental.

L'importance du théorème en question pour nos recherches consiste en ceci que, toute propriété du groupe \mathcal{Y} , qui reste inaltérée par des o-isomorphismes, se trouve transférée, par l'application \mathcal{F}^{-1} , au groupe \mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+ .

Or, \mathcal{Y} étant un sous-groupe de \mathcal{R} , seuls les trois cas suivants peuvent se présenter: 1° $\mathcal{Y} = \{0\}$; 2° $\mathcal{Y} = \{vc\}$, v entier, $c > 0$; 3° \mathcal{Y} est dense en \mathcal{R} . On sait encore que, si \mathcal{Y} est borné on a $\mathcal{Y} \sim \{0\}$.

A. $\mathbb{B} \neq \emptyset$.

15. *Dans le cas $\mathbb{B} \neq \emptyset$ le groupe \mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+ coïncide avec le groupe $\{id\}$ ou bien résulte monogène infini.*

Démonstration. Il suffit, évidemment, de montrer que le groupe \mathcal{Y} n'est pas dense en \mathcal{R} .

Or, supposons la contraire et donc que l'ensemble H résulte dense en \mathcal{R} .

Choisissons pour base de la paramétrisation \mathcal{A} un nombre quelconque $e \in \mathbb{B}$; nous avons alors $P \subset \mathbb{B}$.

Soit $i_\alpha \subset \mathbb{A}$ l'un quelconque des intervalles ouverts dont \mathbb{A} est la réunion.

Soient $x_1, x_2 \in i_\alpha, x_1 < x_2$, et donc $[x_1, x_2] \subset i_\alpha \subset \mathbb{A}$. La fonction R ($= R_e$) allant constamment en croissant dans i_α nous avons $R(x_1) < R(x_2)$. Or, H étant dense en \mathcal{R} , par hypothèse, il existe un $y \in H$ tel que $R(x_1) < y < R(x_2)$. Il en résulte, pour un $z \in P \subset \mathbb{B}$:

$$y = R^*(z) = R(z)$$

et donc $R(x_1) < R(z) < R(x_2)$. On a, par conséquent, $x_1 < z < x_2$ ce qui est absurde en vue de $[x_1, x_2] \subset \mathbb{A}$.

Les propositions 16, 17 indiquent de suffisantes conditions sous lesquelles \mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+ coïncide avec le groupe $\{id\}$ ou bien résulte monogène infini.

16. *Le groupe \mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+ coïncide avec $\{id\}$ si l'ensemble \mathbb{B} ($\neq \emptyset$) est borné.*

Démonstration. L'hypothèse en question étant remplie, il existe un élément-maximum de \mathbb{B} , $a \in \mathbb{B}$.

Soit $\xi \in \mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+$. On a, d'après 1, $\xi(a) \in \mathbb{B}$ et donc $a \geq \xi(a)$. Or, $\xi^{-1} \in \mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+$ étant l'inverse de ξ on a, évidemment,

$$\xi^{-1}(a) \geq \xi^{-1}\xi(a) = a,$$

et encore $\xi^{-1}(a) \in \mathbb{B}$, $\xi^{-1}(a) \leq a$. Il en résulte $\xi^{-1}(a) = a$, $\xi(a) = a = id(a)$ et cela entraîne d'après 7: $\xi = id$.

17. *Supposons que les fonctions Q_1, Q_2 soient périodiques avec c (> 0) et qu'il existe un nombre $x \in j$ tel que $Q_1(x) = Q_2(x)$ tandis que*

$$Q_1(t) \neq Q_2(t) \quad \forall t \in (x, x+c)$$

On a alors

$$\mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+ = \{id + vc\},$$

v entier.

Démonstration. On a par hypothèse

$$\mathbb{A} = \cup (x + vc, \overline{x + v + 1c}), \quad \mathbb{B} = \{x + vc\},$$

v entier.

Toute fonction $id + vc$ vérifie les équations $(Q_i Q_i)$, $i = 1, 2$, ce qui entraîne $\mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+ \supset \{id + vc\}$, v entier.

D'autre part, soit $\xi \in \mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+$. L'hypothèse $x \in \mathbb{B}$ entraîne $\xi(x) \in \mathbb{B}$; il en résulte $\xi(x) = x + mc$, m étant un entier. On voit que les fonctions

ξ , $id + mc$ prennent au point x la même valeur et cela entraîne leur coïncidence. Il en résulte $\mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+ \subset \{id + vc\}$, v entier, et cela achève la démonstration.

B. $\mathbb{B} = \emptyset$.

Dans ce cas les fonctions Q_1, Q_2 n'ont pas des valeurs communes et l'on peut supposer sans restreindre la généralité, $Q_1(t) - Q_2(t) > 0 \forall t \in j$. Le radical correspondant $R (= R_e, e \in j$ étant choisi arbitrairement) va constamment en croissant dans j et l'on a $R'(t) > 0 \forall t \in j$.

18. Si R est borné on a $\mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+ = \{id\}$.

Démonstration. Si R est borné le groupe \mathcal{Y} en est aussi; par conséquent $\mathcal{Y} = \{0\}$ et donc $\mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+ = \{id\}$.

Si R n'est pas borné, deux cas peuvent se présenter, suivant que $R \notin \mathcal{G}^+$ ou bien $R \in \mathcal{G}^+$.

Dans le premier cas nos méthodes ne donnent pas au sujet du groupe \mathcal{P}_{Q_1, Q_2}^+ d'informations allant au delà du théorème fondamental.

Nous considérons dans la suite l'autre cas où le radical est une fonction-phase. Cette hypothèse s'exprime, évidemment, par la formule $Q_1 - Q_2 \in C^2$.

L'hypothèse en question, $R \in \mathcal{G}^+$, entraîne $R^{-1} \in \mathcal{G}^+$.

Or, la fonction R^{-1} transforme la fonction Q_i ($i = 1, 2$) dans

$$P_i = -\{R^{-1}, \cdot\} + Q_i(R^{-1})R^{-1'2}$$

et l'on a, évidemment,

$$R^{-1'2} = \frac{1}{R'^2(R^{-1})} = \frac{1}{Q_1(R^{-1}) - Q_2(R^{-1})}$$

et donc

$$P_i = -\{R^{-1}, \cdot\} + \frac{Q_i(R^{-1})}{Q_1(R^{-1}) - Q_2(R^{-1})}.$$

Cette formule entraîne, en particulier,

$$P_1 - P_2 = 1. \quad (4)$$

On voit que les fonctions P_1, P_2 résultent simultanément non-périodiques ou bien elles admettent la même période (primitive) c (>0) ou bien elles gardent des valeurs constantes. On a, manifestement, $(P_i) \in M$.

Or, l'équation (P_i) étant la transformée de (Q_i) par R^{-1} , on a ([2])

$$\mathcal{L}_{P_i}^+ = R \mathcal{L}_{Q_i}^+ R^{-1}$$

et cette formule entraîne

$$\mathcal{P}_{P_1 P_2}^+ = R \mathcal{L}_{Q_1}^+ R^{-1} \cap R \mathcal{L}_{Q_2}^+ R^{-1} = R(\mathcal{L}_{Q_1}^+ \cap \mathcal{L}_{Q_2}^+) R^{-1} = R \mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+ R^{-1}$$

et donc

$$\mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+ = R^{-1} \mathcal{P}_{P_1 P_2}^+ R. \quad (5)$$

Nous entendons pour le moment sous *période* de la fonction P_i ($i=1, 2$) tout nombre $k \in j$ tel que $P_i(t+k) = P_i(t) \quad \forall t \in j$. Nous conservons le nom *période primitive* de P_i pour la plus petite période positive de P_i , $c > 0$, de sorte que, s'il en existe, la fonction P_i résulte périodique avec c .

Soit K l'ensemble des périodes de P_i . On a, évidemment, $K \neq \emptyset$, et le groupoïde $\mathcal{K} = (K, +)$ est un sous-groupe de \mathcal{R} : $\mathcal{K} \subset \mathcal{R}$.

Le groupe \mathcal{K} coïncide avec $\{0\}$ ou bien il résulte monogène infini, (c) , ou bien se trouve confondu avec \mathcal{R} , suivant que les fonctions P_i résultent non-périodiques ou bien périodiques avec c ou bien qu'elles sont des constantes.

Or, grâce à la relation (4) le groupe $\mathcal{P}_{P_1 P_2}^+$ peut être déterminé par un calcul direct. En effet, tout élément $X \in \mathcal{P}_{P_1 P_2}^+$ vérifiant simultanément les équations $(P_i P_i)$ ($i=1, 2$), on a

$$[P_1(X) - P_2(X)]X'^2 = P_1 - P_2,$$

et donc, en vertu de (4), $X(t) = t + k \quad \forall t \in j$, $k = \text{const}$. La fonction X

étant intégrale de l'équation $(P_i P_j)$, on a $k \in K$. Il en résulte facilement

$$\mathcal{P}_{P_1 P_2}^+ = \{id + k\} \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (6)$$

Les considérations précédentes permettent de caractériser le groupe $\mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+$.

19. Le groupe $\mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+$ coïncide avec le groupe $\{id\}$ ou bien il résulte monogène infini ou bien planaire, suivant que les fonctions P_i sont non-périodiques ou bien périodiques ou bien sont des constantes.

Démonstration. Les formules (5), (6) entraînent

$$\mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+ = R^{-1}[R + k] \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (7)$$

i) Si les fonctions P_i sont non-périodiques, on a $\mathcal{K} = \{0\}$ et la formule (7) entraîne $\mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+ = \{id\}$.

ii) Si les fonctions P_i sont périodiques avec $c (> 0)$, on a $\mathcal{K} = \{vc\}$, v entier, et, d'après (7), $\mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+$ consiste en fonctions $\xi_v = R^{-1}(R + vc)$. Donc $\mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+$ est le groupe monogène infini (ξ_1).

iii) Si les fonctions P_i sont des constantes, on a $\mathcal{K} = \mathcal{R}$. D'après (7), le groupe $\mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+$ consiste en fonctions $\xi = R^{-1}[R + k] \quad \forall k \in j$. On voit qu'il passe, par tout point $(t_0, y_0) \in j \times j$ précisément un élément $\xi_0 \in \mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+$, à savoir la fonction ξ_0 déterminée par la valeur $k = R(y_0) - R(t_0)$. Il en résulte que le groupe $\mathcal{P}_{Q_1 Q_2}^+$ est planaire ([3]).

Remarquons que dans le cas $Q_1 - Q_2 = 1$, $e = 0$, on a $R = R^{-1} = id$, $P_i = Q_i$ ($i = 1, 2$) et la proposition 19 subsiste pour $P_i = Q_i$.

Remarque. En ce qui concerne les équations différentielles linéaires d'ordre $n \geq 3$, de fondements d'une théorie algébrique des transformations de ces équations ont été considérés par F. Neuman ([4], [5]).

Bibliographie

- [1] O. Borůvka, *Linear Differential Transformations of the Second Order*, The English Universities Press, London, 1971.
- [2] O. Borůvka, Algebraic methods in the theory of global properties of the oscillatory equations $y'' = Q(t)y$. Equadiff IV Proceedings, Prague, 1977. *Lecture Notes in Mathematics* 703, 355-45.

- [3] O. Borůvka, Sur une classe de groupes continus à un paramètre formés des fonctions réelles d'une variable. *Ann. Polon. Math.* **XLII** (1982), 27–37.
- [4] F. Neuman, Categorical approach to global transformations of the n -th order linear differential equations. *Čas. pro pěst. mat.* **107** (1982), 350–355.
- [5] F. Neuman, On solutions of the vector functional equation $y(\xi(x)) = f(x) \cdot A \cdot y(x)$, *Aequationes Math.* **16** (1977), 245–257.