Borůvka, Otakar: Scholarly works

Otakar Borůvka; Ferdinand Herčík
Matematické vyjádření celostního principu

Práce Moravskoslezské akademie věd přírodních, 19, 1948, spis 2, 1-17

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500178

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

PRÁCE
MORAVSKOSLEZSKÉ AKADEMIE VĚD PŘÍRODNÍCH
SVAZEK XIX., SPIS 2. 1948 SIGNATURA: F 200.
BRNO, ČESKOSLOVENSKO.

ACTA ACADEMIAE SCIENTIARUM NATURALIUM MORAVO-SILESIACAE.
TOMUS XIX.; FASCICULUS 2.; SIGNATURA F 200.; BRNO, ČECHOSLOVAKIA; 1948.

O. BORŮVKA a F. HERČÍK:

Matematické vyjádření celostního principu.

Mathematical expression of the wholeness principle.

1. Uvažujeme-li o nějaké věci, kterou ze zkušenosti považujeme za celek, pozorujeme na ní dvě složky. Jedna jest souhrn prvků, z nichž se ona věc skládá a druhá jest dána jistými vztahy mezi prvky, které z onoho souhrnu tvoří celek. Na př. budova jako celek se skládá ze souhrnu cihel, z nichž jest vystavěna, a mezi jednotlivými cihlami jsou jisté prostorové vztahy, které z tohoto souhrnu činí budovu. Celky, s nimiž se v denním životě setkáváme, jsou obvykle složitější, a to tím, že mezi jednotlivými prvky, z nichž se skládají, existují vztahy několika druhů, tedy systémy vztahů. Při tom mohou býti vztahy různých druhů na sobě nezávislé, t. j. vztahy jednoho druhu nejsou v žádné souvislosti se vztahy druhu jiného, nebo mohou býti na sobě závislé, na př. tak, že vztahy jednoho druhu jsou podmíněny vztahy druhu jiného. Všimneme-li si na př. nějakého podniku, jsou mezi jeho členy jisté vztahy psychické a dále jisté vztahy týkající se organisace podniku; vztahy obou druhů mohou býti na sobě zcela nezávislé. Naproti tomu v nějakém pletivu buněk máme jisté vztahy prostorové a dále na př. vztahy chemické, související s difusí mezi jednotlivými buňkami a tyto dva druhy vztahů jsou na sobě závislé. V konkretních případech mohou tedy vztahy mezi jednotlivými prvky celku býti nejrozmanitější povahy. Vlastnosti prvků celku, jakožto součástí celku, jsou pak důsledkem těchto vztahů, při čemž ovšem určitá vlastnost nezávisí nutně na všech druzích vztahů, nýbrž jenom na jistých vztazích specifických.

Položili jsme si tyto otázky:

a) Jaké jsou společné vlastnosti vztahů mezi prvky celku, které by mohly sloužiti k definici celku a jaká jest definice celku?

b) Je-li dán celek a jistá vlastnost jeho prvků jako součástí celku, dá se definovati jakýsi celostní činitel nebo několik celostních činitelů, kteří by mohli sloužiti k vyjádření kvantitativní stránky oné vlastnosti?

Úvahy, které následují, nepovažujeme ovšem za definitivní a úplné vyřešení obou těchto otázek, jak jest přirozené vzhledem k nesmírné složitosti problému, nýbrž spíše jenom za ukazatele cesty, která by mohla vésti k jejich zvládnutí. Dospěli jsme k výsledkům, které se v konkretním případě daly ověřiti pokusně a z toho čerpáme důvěru, že naše cesta může býti užitečná.

2. Všimněme si podrobněji na př. pletiva buněk a vztahů chemického rázu. Značí-li a, b dvě buňky v pletivu, pak buňka a může nebo nemusí ovlivňovati buňku b, na př. tím, že v každém okamžiku jest koncentrace určité chemické látky v buňce b závislá na koncentraci v buňce a. Buňka a může b ovlivňovati buď přímo, jestliže obě buňky v pletivu spolu sousedí, nebo prostřednictvím jiných buněk. V druhém případě buňka a ovlivňuje některou sousední buňku a_1, tato pak působí na další sousední buňku a_2, tato pak opět na další sousední buňku a_3, atd., až konečně jistá buňka $a_{\alpha-1}$, ke které se ovlivnění dostalo, působí na buňku b. Všimněme si, že v tomto případě ovlivnění buňky b buňkou a prostřednictvím jiných buněk, jest zahrnut i případ přímého ovlivnění a sice tak, že buňka a_1 jest již buňkou b. Vidíme tedy, že v pojmu působení buňky a na buňku b jest obsažen pojem „řetězce od a do b“, t. j. uspořádané skupiny buněk

$$a, a_1, a_2, \ldots, a_{\alpha-1}, b,$$

jejíž první buňkou jest a a poslední b, jakožto cesty, po níž se působení šíří. Buňka a může na b působiti i po několika řetězcích. Mysleme si, že působí celkem po řetězcích

$$A_1, A_2, \ldots, A_m$$

a označme

$$v_1, v_2, \ldots, v_m$$

míry vlivů po jednotlivých řetězcích, takže v_1 jest číslo vyjadřující vliv buňky a na b po řetězci A_1, atd. Součet $v_1 + v_2 + \ldots + v_m$ jest pak měrou celkového vlivu buňky a na b. Když si všimneme jiných konkretních případů celků, shledáme, že jsou tam poměry podobné.

3. Dříve než použijeme této úvahy k tomu, abychom podali definici celku, vysvětlíme, co se v matematice rozumí pojmem množiny a podmnožiny, neboť tyto pojmy budeme potřebovati.

M n o ž i n o u rozumíme souhrn nějakých věcí, které nazýváme prvky množiny. Slovo množina má tedy po jazykové stránce týž smysl jako slovo množství, ale jest výhodnější, protože na rozdíl od slova množství se liší jeho jednotlivé pády různými koncovkami. Všimněme si nesmírné obecnosti tohoto pojmu, který nikterak nezávisí na podstatě věcí, které množinu tvoří, tedy na podstatě jejích prvků. Můžeme tedy v konkretních případech hovořiti na př. o množině buněk v nějakém pletivu, o množině slov otištěných v některé knize nebo vyslovených v určité přednášce, o množině celých čísel, atd. Dalším pojmem jest pojem podmnožiny. Když máme nějaké množiny A, B a když každý prvek v A jest současně prvkem v B, pak pravíme, že A jest p o d m n o ž i n a v B. Na př. jest množina všech slov napsaných na této stránce podmnožinou v množině všech slov napsaných v tomto článku; množina všech sudých čísel je podmnožinou v množině všech celých čísel, atd.

Nyní můžeme přistoupiti k definici celku.

C e l k e m rozumíme konečnou množinu prvků, C, t. j. množinu skládající se jenom z konečného počtu prvků, v níž jsou dány řetězcové vztahy mezi jejími prvky. To znamená, že k některým uspořádaným dvojicím prvků a, b v C, t. j. dvojicím, v nichž záleží na pořádku obou prvků, jsou dány řetězce od a do b, t. j. uspořádané skupiny prvků v C,

$$a, a_1, a_2, \ldots, a_{\alpha-1}, b,$$

z nichž první jest a a poslední b. Mimo to jest ke každému takovému řetězci, A, dáno jisté číslo, $V_{a, b; A}$, které nazveme v l i v p r v k u a n a b p o ř e t ě z c i A. C e l k o v ý m v l i v e m p r v k u a n a b, stručněji: v l i v e m p r v k u a n a b, $V_{a, b}$, rozumíme pak součet vlivů prvku a na b po jednotlivých řetězcích od a do b, tedy číslo

$$V_{a, b} = V_{a, b; A_1} + V_{a, b; A_2} + \ldots + V_{a, b; A_m},$$

při čemž $A_1, A_2, \ldots, A_m$ jsou jednotlivé řetězce od a do b v celku C.

Obvykle označujeme celek týmže symbolem, na př. C, jímž jsme označili množinu prvků, z nichž se skládá.

Podle této definice celku se tedy může státi, že pro některé prvky a, b v C není dán vůbec žádný řetězec od a do b. Pak pravíme, že celkový vliv prvku a na b jest 0, anebo, že prvek a nepůsobí na b. Zejména máme tedy v naší definici zahrnut i případ, že mezi prvky množiny C, z nichž se celek skládá, nejsou vůbec žádné vztahy, nebo jenom vztahy, o které se nezajímáme nebo které zanedbáváme, takže celek jest souhrnem svých prvků. Ovšem tento případ jest triviální a nezajímavý. Dále si všimněme, že celkový vliv určitého prvku a na jistý prvek b může býti rozdílný od celkového vlivu prvku b na prvek a. To nastane na př. tehdy, když existuje právě jeden řetězec od a do b a vliv prvku a na b po tomto řetězci není nula a když současně neexistuje řetězec od b do a. Řetězcové vztahy, které jsme popsali, tvoří tedy ono „víc", které se vyskytuje v Drieschově definici biologického celku.

Nechť nyní C značí nějaký celek a x nějaký prvek v C! Jednotlivé prvky $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$, z nichž se skládá celek C, působí na prvek x jistými celkovými vlivy $V_{c_1, x}$, $V_{c_2, x}$, $V_{c_3, x}$, a součet těchto vlivů

$$V_{C, x} = V_{c_1, x} + V_{c_2, x} + V_{c_3, x} + \ldots + V_{c_n, x}$$

nazýváme v l i v c e l k u C n a p r v e k x. V konkretních případech, kdy jde o studium vlivu celku na jeho jednotlivé prvky, nezáleží zpravidla na tom, jaký jest vliv celku na zcela určitý prvek, nýbrž spíše na průměrné hodnotě vlivu na některý prvek celku. Tato průměrná hodnota může pak sloužiti k měření všech vlastností prvků celku, které závisí na uvažovaných vztazích, jimiž jest onen celek charakterisován, a to v tom smyslu, že kvantitativní stránka každé takové vlastnosti jest určitou funkcí této průměrné hodnoty. V souhlase s tím definujeme především v l i v c e l k u C n a s e b e, $V_{C, C}$, jako součet vlivů celku C na jeho jednotlivé prvky.

$$V_{C, C} = V_{C, c_1} + V_{C, c_2} + \ldots + V_{C, c_n}$$

a dále průměrný vliv celku C na každý jeho prvek, W_C, jako aritmetický střed vlivů celku C na jeho jednotlivé prvky, tedy vzorcem

$$W_C = \frac{V_{C, c_1} + V_{C, c_2} + V_{C, c_3} + \ldots + V_{C, c_n}}{n}.$$

Tento průměrný vliv, který má zřejmě povahu statistickou, nazýváme také c e l o s t n í m č i n i t e l e m c e l k u C.

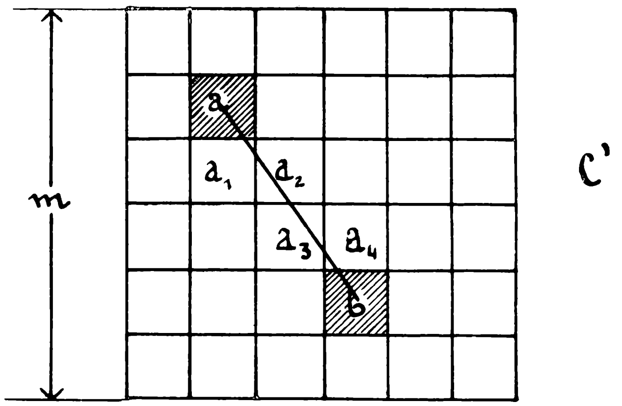
Těmito definicemi jest dán první krok k řešení obou otázek, o nichž jsme se výše zmínili. Ovšem jest třeba zdůrazniti, že se hořejší úvahy musí v konkretních případech aplikovati s rozumem. Neboť podstatnou částí našich definic jest to, že se vlivy jednoho prvku na druhý po jednotlivých řetězcích sečítají, aby vznikl celkový vliv prvního prvku na druhý. Zdá se přirozené souditi, že tomu tak zpravidla bude v případě, když vztahy definující celek jsou jenom jednoho druhu, čili když jde, jak říkáme, o celek jednoduchý. Avšak i v těchto případech jest vždycky zkoumati, zda celkový vliv jednoho prvku na druhý není složitější funkcí vlivů prvního prvku na druhý po jednotlivých řetězcích než jejich součet.

V případě celků složených, které na rozdíl od celků jednoduchých jsou charakterisovány nikoliv jedním, nýbrž několika druhy vztahů, jsou poměry složitější. V tomto případě je v množině C dáno několik podmnožin C', C'', ..., které mohou eventuálně splývati s množinou C, a ke každé z nich je dán jistý druh vztahů, vzhledem k němuž je příslušná podmnožina jednoduchým celkem. Tyto jednoduché celky mají jisté celostní činitele, které považujeme za celostní činitele složeného celku C. Předpokládáme, že každá vlastnost prvků složeného celku C jako součástí celku jest pak po kvantitativní stránce jistou funkcí těchto celostních činitelů. Jakou funkcí, to záleží ovšem na konkretních případech a zajímavé budou zejména ty případy, kdy tato funkce bude pokud možno jednoduchá, tedy na př. lineární, t. j. součtem celostních činitelů násobených konstantními koeficienty a zvětšeným o nějakou konstantu.

4. Předcházející úvahy budeme nyní aplikovati na biologickou realitu. Máme na mysli ozařovací pokusy s epidermálními buňkami Allium cepa. Tyto pokusy budou v dalším podrobně popsány. Prozatím jenom podotkněme, že ozařováno bylo jednovrstevné pletivo s protáhlými buňkami, a to paprsky alfa. Každý pokus se konal s pletivem ve tvaru čtverce určité plošné velikosti, z něhož jistá střední část, rovněž čtvercová, byla ozářena. Výsledkem pokusů byl zajímavý zjev, že buňky v pletivu zmíraly při stejné ozařovací dávce různě podle toho, jaký byl poměr plochy ozářené k celkové ploše pletiva. Při malém poměru byly buňky odolnější, t. j. počet usmrcených buněk byl poměrně menší, kdežto při velkém poměru plochy pletiva ozářeného k celkovému byly buňky na ozáření citlivější, t. j. počet usmrcených buněk byl poměrně větší.

Pokusné pletivo jest jistým celkem skládajícím se z buněk, mezi nimiž jsou rozmanité vztahy prostorové, chemické, fysikální a snad i jiné. Ozářením přistupují pak k těmto vztahům vztahy další. Výsledkem všech těchto vztahů jest odolnost nebo naopak citlivost buněk vůči záření, jejíž kvantitativní stránka se dá měřiti na př. t. zv. koeficientem přežití, t. j. poměrem počtu buněk, které po ozáření zůstaly na živu k celkovému počtu buněk ozářených. Máme tedy co činiti se složeným celkem a chceme se pokusiti o výpočet příslušných celostních činitelů a o stanovení funkce vyjadřující koeficient přežití pomocí těchto celostních činitelů.

K vůli jednoduchosti si představme, že pokusné pletivo, C', se skládá z buněk čtvercových, takže máme síť čtverců, jak jest naznačena na následujícím obrázku. Jednotlivé čtverce sítě zná-

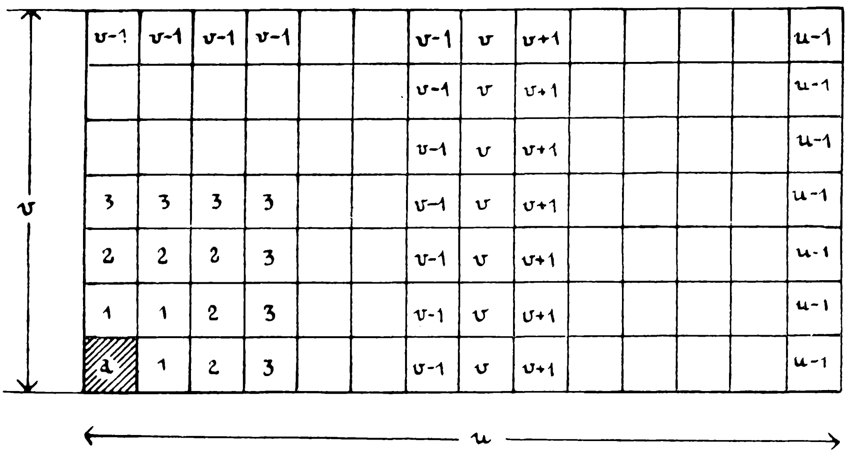


zorňují tedy buňky pletiva; počet buněk v jedné řadě, vodorovné nebo svislé, označíme písmenem m a celkový počet buněk v pletivu p, takže jest $m^2 = p$. Uvažujeme o libovolné buňce a a další buňce b. Buňka a působí na b vlivy rozmanitého druhu po rozmanitých řetězcích, které jednotlivě nedovedeme rozlišiti. Naše pokusné pletivo jest tedy složeným celkem závislým na několika druzích vztahů. Pokusíme se zavésti jakousi výslednici všech těchto vlivů a sice tak, že budeme předpokládati, že buňka a působí na b po jediném řetězci, a to t. zv. m i n i m á l n í m, a že velikost tohoto výsledného vlivu jest nepřímo úměrná délce tohoto řetězce. Při tom jest minimální řetězec od a do b definován takto: Střed čtverce a spojíme úsečkou se středem čtverce b. Tato úsečka vycházejíc ze čtverce a protne nejprve jistý čtverec a_1, pak další čtverec a_2, pak další a_3 atd., až konečně jistý předposlední čtverec $a_{\alpha-1}$ a pak poslední čtverec b. Uspořádaná skupina buněk

$$a, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{\alpha-1}, b$$

jest pak minimální řetězec od a do b. Délkou tohoto řetězce rozumíme počet jeho členů zmenšený o jedničku, tedy číslo α. Podle našeho předpokladu jest tedy velikost vlivu buňky a na b rovna $\frac{\text{konst}}{\alpha}$. Pro zjednodušení dalších počtů, což však není nějakým omezením obecnosti, zvolíme konstantu úměrnosti, kterou jsme označili konst., rovnu 1, takže vliv buňky a na b po minimálním řetězci jest $\frac{1}{\alpha}$. Podotkněme, že konstanta úměrnosti by se mohla měniti od řetězce k řetězci. My ji však předpokládáme pro všechny řetězce stejnou, rovnu 1, čímž vyjadřujeme jakousi homogenitu pokusného pletiva. Těmito úvahami máme definován jistý celek C', který jest ovšem jednoduchý, a prvním naším úkolem jest vypočísti jeho celostního činitele.

5. Za tím účelem uvažujeme o části našeho pletiva, X, která má tvar obdélníku a skládá se z u řad svislých a v vodorovných, při čemž jest na př. u > v, jak jest naznačeno na následujícím obrázku.



X

Vypočteme vliv částečného celku X na buňku a, která jest v levém dolním rohu. Jsou celkem tři buňky (označené 1), které působí na buňku a po řetězci délky 1, tedy vlivem $\frac{1}{1}$; součet jejich vlivů na buňku a jest tedy $3 \cdot \frac{1}{1}$. Dále jest celkem 5 buněk (označených 2), které působí po řetězcích délky 2, tedy vlivem $\frac{1}{2}$ a součet jejich vlivů na buňku a jest $5 \cdot \frac{1}{2}$. Dále jest celkem 7 buněk (označených 3), které působí po řetězcích délky 3, tedy vlivem $\frac{1}{3}$ a součet jejich vlivů jest $7 \cdot \frac{1}{3}$. Atd. Jest celkem 2v—1 buněk, které na buňku a působí po řetězci délky v—1, tedy vlivem $\frac{1}{v-1}$ a součet jejich vlivů jest $(2v-1) \cdot \frac{1}{v-1}$. Konečně jest vždycky v buněk (ve svislých řadách v+1-ou počínajíc), které na buňku a působí po řetězcích délky v, v+1, ..., u—1, tedy vlivy $\frac{1}{v}, \frac{1}{v+1}, \ldots, \frac{1}{u-1}$ a součty těchto vlivů jsou $v \cdot \frac{1}{v}, v \cdot \frac{1}{v+1}, \ldots, v \cdot \frac{1}{u-1}$. Vliv částečného celku X na buňku a jest tedy

$$V_{X,a} = 3 \cdot \frac{1}{1} + 5 \cdot \frac{1}{2} + 7 \cdot \frac{1}{3} + \ldots + (2v-1) \cdot \frac{1}{v-1} + v \cdot \frac{1}{v} + \\ + v \cdot \frac{1}{v+1} + \ldots + v \cdot \frac{1}{u-1},$$

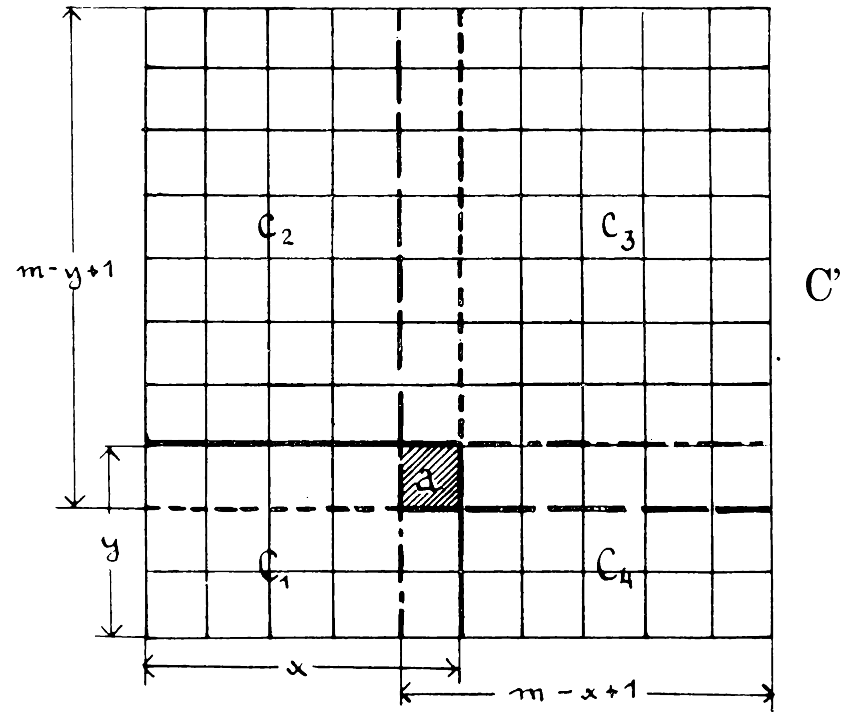
a tento vzorec se dá stručněji psáti ve tvaru

$$V_{X,a} = (v-1)\,(2 - \sum_{\mu=1}^{v-1} \frac{1}{\mu}) + v \sum_{\mu=1}^{u-1} \frac{1}{\mu}, \tag{1}$$

při čemž ovšem na př. symbol $\sum_{\mu=1}^{v-1} \frac{1}{\mu}$ znamená, že za μ se klade postupně 1, 2, ..., v—1 a výsledky se sečtou.

6. Vraťme se nyní k našemu celku C' a k výpočtu jeho celostního činitele, $W_{C'}$. Podle své definice jest celostní činitel průměrný vliv celku C' na každý jeho prvek. Abychom tedy vypočetli $W_{C'}$, musíme nejprve vypočísti vliv celku C' na buňku *a* mající l i b o v o l n é „souřadnice" x, y, t. j. na buňku, která leží v x-té řadě svislé a y-té řadě vodorovné, při čemž jest ovšem $1 < x < m$, $1 \leq y < m$, pak všechny tyto výsledky sečísti, čímž obdržíme vliv celku C' na sebe, a konečně tento součet děliti počtem buněk v našem pletivu, tedy číslem m^2 (=p). Tyto výpočty jsou značně složité, avšak dají se zvládnouti a co jest zajímavé, i se stanoviska počtářského, vedou k velmi jednoduchému výsledku. V tomto článku se omezíme jenom na naznačení cesty a povahy výpočtů vedoucích k tomuto výsledku.

Nuže, jde především o výpočet vlivu celku C' na buňku a mající libovolné souřadnice x, y, jak jest naznačeno na následujícím obrázku. Tento vliv označíme symbolem $V_{C',(x,y)}$.



Při výpočtu postupujeme tak, že celek C' si myslíme rozdělen na čtyři celky částečné, na obrazci označené C_1, C_2, C_3, C_4, z nichž každý má buňku a v jednom rohu. Na tyto částečné celky pak aplikujeme hořejší vzorec (1), volíce za částečný celek X postupně C_1, C_2, C_3, C_4 a výsledky sečteme, majíce zřetel k tomu, že vlivy buněk, v nichž se celky C_1, C_2, C_3, C_4 překrývají, na buňku a, jsou v součtu obsaženy dvakrát a tudíž se musí jednou odečísti. Výsledek jest pak dán vzorcem

$$V_{C', (x, y)} = 2(m + 2y - 3) + (\quad 2y + 1) \sum_{\mu=1}^{y-1} \frac{1}{\mu} + (y \quad x) \sum_{\mu=1}^{x-1} \frac{1}{\mu} +$$

$$+ (y + x \quad m \quad 1) \sum_{\mu=1}^{m-x} \frac{1}{\mu} \qquad (2)$$

a to v případě, že $y \leq x$, $x \leq m - y + 1$, kdežto v případě $y \geq x$, $x < m - y + 1$ je dán vzorcem (3), který ze vzorce (2) vznikne, když na pravé straně vyměníme x a y. Vzorec (3) zvláště neuvádíme.

Dalším krokem ve výpočtu celostního činitele jest, jak jsme řekli, utvoření součtu všech čísel $V_{C', (x, y)}$, pro $x, y = 1, 2, \ldots, m$,

t. j. výpočet vlivu celku C' na sebe. Také tento výpočet, při němž se ovšem podstatně používá vzorců (2) a (3), jest složitý a zdlouhavý, avšak výsledek je jednoduchý a jest dán vzorcem

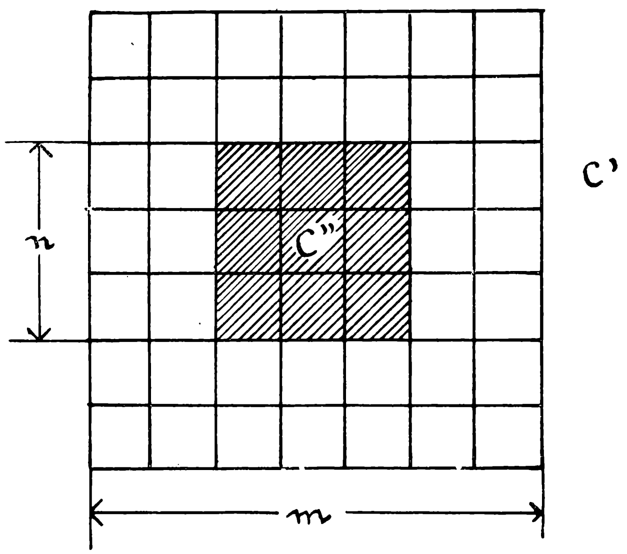
$$V_{C', C'} = \frac{2}{3} (5m^3 - 6m^2 + m).$$

Odtud obdržíme celostního činitele celku C', $W_{C'}$, když číslo $V_{C', C'}$ dělíme počtem buněk v našem pletivu, tedy číslem m^2 $(=p)$. Celostní činitel celku C' jest tedy

$$W_{C'} = \frac{2}{3} (5\sqrt{p} - 6 + \frac{1}{\sqrt{p}}), \tag{4}$$

při čemž ovšem p značí počet buněk v pletivu.

7. Nyní předpokládejme, že nějakou střední část pletiva, rovněž čtvercovou, ozáříme. Množinu ozářených buněk označme C'', dále počet ozářených buněk q a počet svislých a vodorovných řad pletiva, obsahujících ozářené buňky, n, takže $n^2 = q$, jak je naznačeno na následujícím obrázku:



Mezi ozářenými buňkami jsou opět rozmanité vztahy (prostorové, chemické, atd.). Tyto vztahy závisí ovšem i na buňkách neozářených, jestliže jsou takové buňky, a změní se, když neozářené buňky z pokusného pletiva odstraníme. Vzhledem k těmto změněným vztahům, kterých je ovšem zase několik druhů, je množina buněk C'' složeným celkem. Myslíme si opět všechny vlivy, jimiž libovolná ozářená buňka a působí na jinou ozářenou buňku b nahrazeny jakýmsi výsledným vlivem, jehož velikost je úměrná reciproké hodnotě délky minimálního řetězce od a do b. Pak vzhledem k těmto výsledným vlivům je množina C" jednoduchým celkem, jehož celostní činitel jest až na konstantu úměrnosti dán vzorcem podobným vzorci (4),

$$W_{C''} = \frac{2}{3}\left(5\sqrt{q} - 6 + \frac{1}{\sqrt{q}}\right). \tag{5}$$

8. Pokusné pletivo spolu s ozářenou částí tvoří složený celek, který označíme C. V množině C máme dvě podmnožiny C', C", z nichž první splývá s množinou C, a ke každé z nich je dán jistý druh vztahů, vzhledem k němuž je příslušná podmnožina jednoduchým celkem. Příslušní celostní činitelé $W_{C'}$, $W_{C''}$, jsou dáni vzorci (4) a (5) a podle našich definic jsou to celostní činitelé složeného celku C. Podle předpokladu, který jsme dříve učinili, jest každá vlastnost prvků celku C jako součástí celku po kvantitativní stránce jistou funkcí těchto celostních činitelů. Zejména se tedy dá koeficient přežití, označme jej P, vyjádřiti jako funkce těchto činitelů. Pokusíme se vyjádřiti reciprokou hodnotu koeficientu přežití jako lineární funkci celostních činitelů $W_{C'}$, $W_{C''}$, tedy vzorcem

$$\frac{1}{P} = k_1\left(5\sqrt{p} + \frac{1}{\sqrt{p}}\right) - k_2\left(5\sqrt{q} + \frac{1}{\sqrt{q}}\right) + k_3 \tag{6}$$

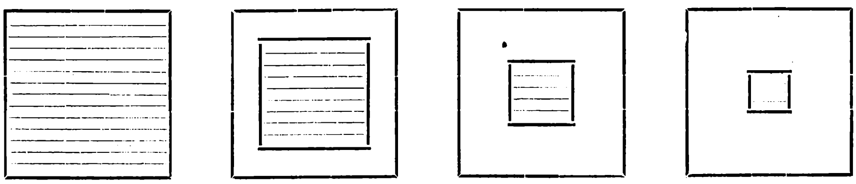
kde k_1, k_2, k_3 značí jisté konstanty. Je-li tento vzorec správný, pak lze určiti hodnoty konstant k_1, k_2, k_3 tak, že závislost koeficientu přežití na různých hodnotách počtu buněk p a q vypočtená podle vzorce (6) souhlasí se závislostí určenou experimentálně a v tom případě jsou i ostatní předpoklady, které jsme při odvození vzorce (6) učinili, oprávněné, v tom smyslu, že vedou ke správnému výsledku. Tento souhlas skutečně existuje, jak nyní ukážeme.

9. Zvolili jsme ozařovací pokusy s epidermálními buňkami cibule Allium cepa. Jde o jednovrstevné pletivo, jehož protáhlé buňky lze dobře ozařovati zářením různého druhu. Při svých pokusech jsme použili paprsků alfa a záření ultrafialového. Za 24 hod. po ozáření bylo zjišťováno, které buňky zůstaly na živu a které zahynuly, podle toho, zda se barvily zředěným roztokem erythrosinu. Mrtvé buňky se barvily intensivně červeně, živé buňky se nebarvily.

Pokusy s alfa paprsky byly provedeny s poloniovým zářičem a dávkou 30—40.10^7 alfa částic na mm^2. Pokusy s ultrafialovým světlem byly provedeny s Heraeusovým zářičem G5 ve vzdálenosti 31 cm při napětí 60 V stejnosměrného proudu. Exposiční doby byly

3 a 5 minut. Intensita obnášela 1,2 . 10^7 erg. cm^{-2} . min^{-1} (měřeno Mollovým termosloupcem cejchovaným Hefnerovou lampou).

Jak jsme se již zmínili, byl výsledkem pokusů zajímavý zjev, na který bylo ostatně již dříve upozorněno (Herčík 1938, Herčík—Klusáková 1938, 1939, Herčík 1941, 1946). Buňky v pletivu zmíraly při stejné plošné dávce různě podle toho, jak velká plocha byla ozářena. Největší část pokusů byla provedena tím způsobem, že z pletiva o ploše 10×10 mm byly pomocí clonek ozařovány různě veliké části (násl. obrazec). Při tom byl plošný poloniový zářič oddělen jen tenkou vrstvou slídy (0,1 mm tloušťky) od pletiva. Tato okolnost jest pro podobné pokusy velmi důležitá, protože kdyby byl zářič položen do větší vzdálenosti od pletiva, dostalo by pletivo při větších ozářených plochách přídatné záření z plochy zářiče, která neležela přímo nad plochou pletiva. Je-li však zářič nad pletivem, mohou se na dávce uplatniti jenom paprsky, které vstupují do pletiva kolmo, kdežto šikmé paprsky jsou vyloučeny nebo velmi rychle pohlceny, aniž zasáhly jádro buněk, které je pro reakci rozhodující. Jest tedy plošná dávka za těchto okolností vždycky stejná.



Ježto se při těchto pokusech počet buněk pokusného pletiva, p, nemění, jest ve vzorci (6) první člen konstantní a můžeme psáti

$$\frac{1}{P} = K \quad k_2 \, (5\sqrt{q} + \frac{1}{\sqrt{q}}),$$

kde K značí vhodnou konstantu. Dále je druhý člen v závorce zanedbatelný (počet ozařovaných buněk, q, je v mezích 3 až 3500 a tudíž $\frac{1}{\sqrt{q}}$ je v mezích 0,58 až 0,02). Předcházející vzorec můžeme tedy zjednodušiti na tvar

$$\frac{1}{P} = K - C \,.\, \sqrt{q}, \tag{7}$$

kde K, C značí vhodné konstanty.

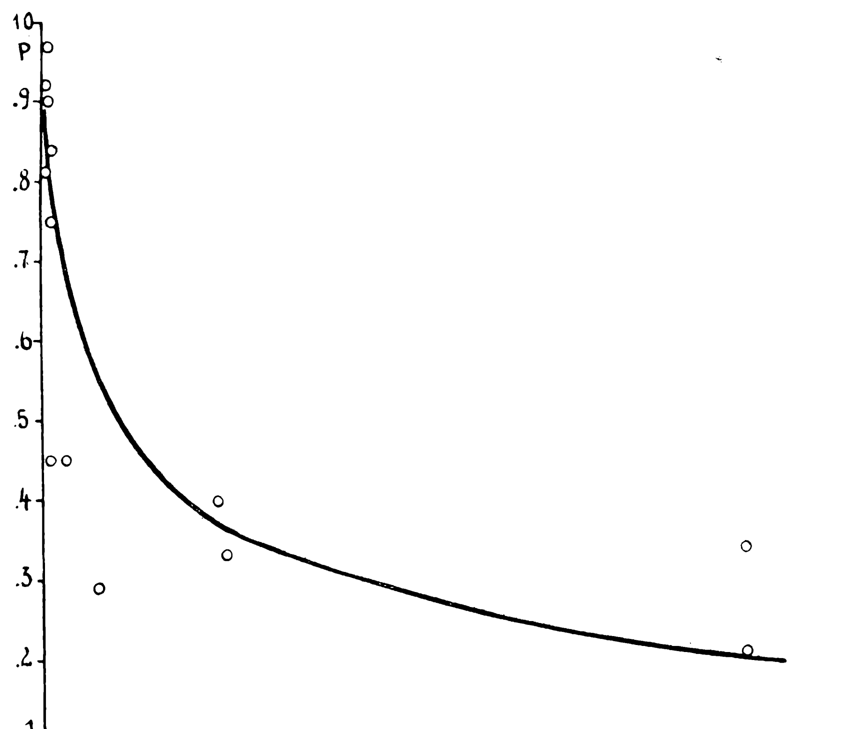
Konstanty K, C určíme tak, že do vzorce (7) dosadíme pokusné hodnoty pro některé dvě dvojice P, q a řešíme vzniklé rovnice o neznámých K, C. Výpočet jsme provedli pro několik pokusných dvojic. Vypočtené hodnoty konstant se poněkud lišily podle toho, kterých pokusných dvojic bylo použito k jejich výpočtu. Vzali jsme z nich aritmetický střed a našli jsme hodnoty:

$$K = 0{,}78, \quad C = -0{,}01$$

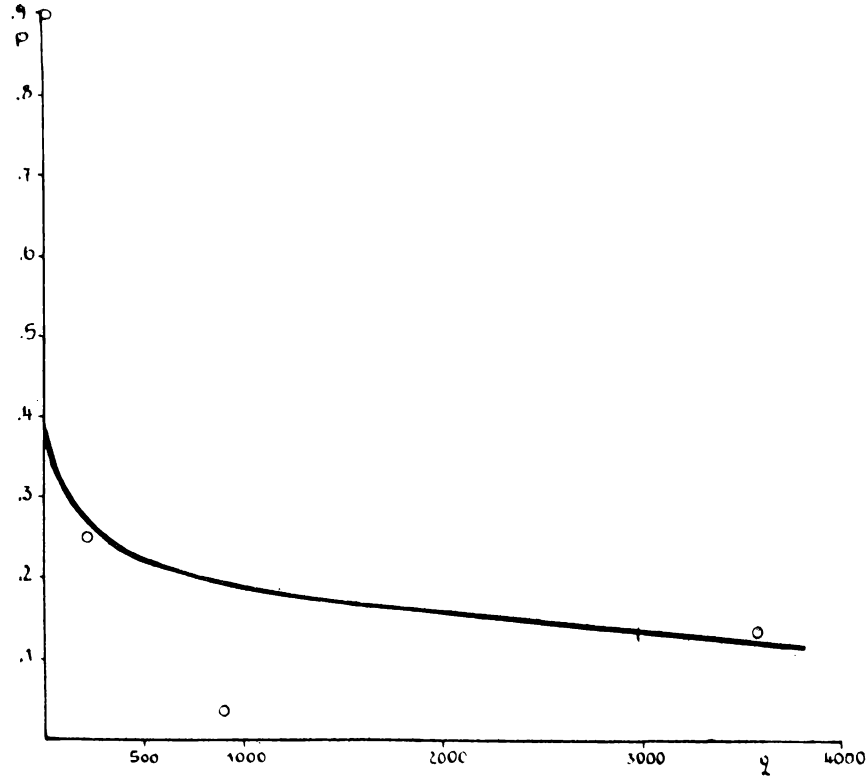
Teoretická závislost koeficientu přežití na počtu ozařovaných buněk, q, je tedy v našem případě dána vzorcem

$$P = \frac{1}{0{,}78 + 0{,}01\sqrt{q}} \tag{8}$$

a je znázorněna graficky na následujícím obrázku. Je patrno, že se průběh této křivky dobře shoduje s pokusnými hodnotami, které byly získány v roce 1938 ozařováním epidermis paprsky alfa. Nedávno (v r. 1946) byly tyto ozařovací pokusy opakovány v biologickém ústavě lékařské fakulty Masarykovy university p. MUC J. Vyskočilem a p. MUC S. Košťálem a dopadly shodně s pokusy z roku 1938.



Stejně přesvědčivě dopadly pokusy, které v poslední době byly konány v biologickém ústavě M. U. s ultrafialovým světlem, jejichž výsledky jsou znázorněny na následujícím obrazci.



Ultrafialovým světlem byly ozařovány různě velké plochy kůže dětí (Dr. Žáček) a kůže dospělých (MUC Vyskočil a Košťál) a byla měřena intensita erythemu. Také v těchto případech se potvrdilo, že velikost ozářené plochy je rozhodující pro intensitu erythemu při stejné dávce záření.

Výtah.

V této práci jsme se pokusili o definici základních pojmů o celku a o aplikace naší teorie.

Celkem rozumíme konečnou množinu prvků, C, v níž jsou dány řetězcové vztahy mezi jejími prvky. To znamená, že k některým uspořádaným dvojicím prvků a, b, v C jsou dány řetězce od a do b, t. j. uspořádané skupiny prvků v C, tvaru

$$a, a_1, a_2, \ldots, a_{\alpha-1}, b.$$

Mimo to je ke každému takovému řetězci, A, dáno jisté číslo, t. zv. vliv prvku a na b po řetězci A. Vlivem prvku a na b rozumíme součet vlivů prvku a na b po jednotlivých řetězcích od a do b. Vlivem celku C na některý prvek a rozumíme součet vlivů jednotlivých prvků v C na prvek a a konečně celostním činitelem celku C rozumíme aritmetický střed vlivů celku C na jeho jednotlivé prvky. Předpokládáme, že každá vlastnost prvků celku, která závisí na daných řetězcových vztazích, je po kvantitativní stránce jistou funkcí celostního činitele celku.

Vedle těchto celků, t. zv. jednoduchých, které jsou charakterisovány jenom jedním druhem vztahů a tudíž mají jenom jednoho celostního činitele, zavádíme pojem celků složených. Složený celek je charakterisován tím, že v množině C je dáno několik podmnožin a ke každé z nich patří jistý druh vztahů, vzhledem k němuž je příslušná podmnožina jednoduchým celkem. Celostní činitelé těchto jednoduchých celků jsou celostními činiteli složeného celku C. Předpokládáme, že každá vlastnost prvků celku, závislá na daných řetězcových vztazích v jednotlivých podmnožinách, je po kvantitativní stránce jistou funkcí těchto celostních činitelů.

Jako aplikaci této teorie jsme vypočetli celostní činitele složeného celku, který se skládá ze čtvercového pletiva protáhlých buněk, jehož střední část, rovněž čtvercová, byla ozářena na př. paprsky alfa. Pokusné pletivo, původně neozářené, je jednoduchým celkem vzhledem k teoretické výslednici všech vlivů, jimiž každá buňka pletiva působí na jinou. Předpokládáme, že tento výsledný vliv působí po jediném, minimálním řetězci a jeho velikost je nepřímo úměrná délce řetězce. Celostní činitel je pak až na multiplikativní konstantu dán výrazem $\frac{2}{3}(5\sqrt{p} - 6 + \frac{1}{\sqrt{p}})$, kde p značí počet buněk v pletivu. Pletivo ozářené tvoří za podobných předpokladů rovněž jednoduchý celek a jeho celostní činitel je opět až na multiplikativní konstantu dán výrazem $\frac{2}{3}(5\sqrt{q} - 6 + \frac{1}{\sqrt{q}})$, kde q značí počet ozářených buněk. Tím jsou nalezeni celostní činitelé našeho složeného celku. Pokusili jsme se vyjádřiti závislost koeficientu přežití ozářených buněk na celostních činitelích vzorcem

$$\frac{1}{p} = k_1 \left(5\sqrt{p} + \frac{1}{\sqrt{p}}\right) - k_2 \left(5\sqrt{q} + \frac{1}{\sqrt{q}}\right) + k_3,$$

v němž k_1, k_2, k_3, značí vhodné konstanty. Tuto závislost jsme ověřili ozařovacími pokusy epidermálních buněk cibule Allium cepa paprsky alfa a zářením ultrafialovým.

Summary.

In this paper we tried to define exactly the basic principles of a whole and to applicate them on some experimental data.

A whole is a finite set of elements, C, in which some chain relations between the elements are given. This means that to certain ordered pairs of elements in C, a, b, chains are given from a to b, i. e. ordered groups of elements in C, of the form

$$a, a_1, a_2 \ldots, a_{\alpha-1}, b$$

Beside that is to each chain, *A*, coordinated a certain number, i. e. the influence of element a on element b over the chain *A*. Under the influence of element a on b we mean the sum of influences of the element a on b over the single chains from a to b. Under the influence of the whole C on some element a we understand the sum of the influences of single elements in C on the element a and under the wholeness-factor of the whole C we understand the arithmetic mean of the influences of the whole C on its single elements. We suppose that each quality of the elements of the whole, which depends on given chain relations, is from the quantitative point of view a certain function of the wholeness-factor (W-F) of the whole.

Beside these wholes, so called simple wholes, which are characterised through only one kind of relations and have therefore only one wholeness-factor, we introduce the notion of complex wholes. A complex whole is characterised by the circumstance, that in a set C several undersets are given and to every of these undersets a certain kind of relations belongs, in relation to which the given underset is a simple whole. The W-F of these simple sets are the W-F of the complex whole C. We suppose that each quality of the elements of the whole, which depends on given chain

relations in single undersets is from the quantitative point of view a certain function of these wholeness-factors.

As a application of this theory we calculated the wholeness-factor of a complex whole, which is composed from a rectangular piece of epidermal tissue (Allium cepa), whose middle part, also rectangular, was irradiated by α-rays. The experimental tissue, before irradiation is a simple whole in regard to the resulting effect of the influences through which every cell of the tissue acts on another cell. We suppose that this resultant action goes over a single, minimal chain and its magnitude is indirectly proportional to the lenght of the chain. The wholeness factor is, with the exception of a multiplicative constant, given by the term $\frac{2}{5}(5\sqrt{p} - 6 + \frac{1}{\sqrt{p}})$, where p is the number of the cells in the tissue. The irradiated tissue forms under the same circumstances also a simple whole a its wholeness factor is, with the exception of a multiplicative constant, given by the term $\frac{2}{3}(5\sqrt{q} - 6 + \frac{1}{\sqrt{q}})$, where q indicates the number of the irradiated cells. In this way the wholeness-factors of our complex whole are formulated. We tried to expres the dependence of the survival rate (ratio) on the wholeness factors through the formula

$$\frac{1}{P} = k_1 (5\sqrt{p} + \frac{1}{\sqrt{p}}) \quad k_2 (5\sqrt{q} + \frac{1}{\sqrt{q}}) + k_3,$$

where k_1, k_2, k_3 denotes the suitable constants and P, is the survival ratio. This dependence was confirmed by the irradiation experiments of the epidermal cells of Allium cepa with α-rays and ultraviolet radiation.

Literatura.

F. HERČÍK, Radiologica 3, 214, 1938.
F. HERČÍK a M. KLUSÁKOVÁ, Spisy lék. fak. Masarykovy univ. 17, čís. 8, 1938.
F. HERČÍK, Čas. lék. českých 80, 858, 1941.
F. HERČÍK, Od atomu k životu. Praha 1946.