Otakar Borůvka
O neeuklidovské geometrii

Věda a život II, 1936, 244-250

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500191

Právo vysoké školy na obsazování profesur, tento zbytek vysokoškolské autonomie, je tedy malý a omezený; jestli si ho i přes to vysoké školy hájí, činí tak z důvodů hlubších než jsou pouhé důvody prestiže, a s nimi ho musí hájiti každý, komu opravdu záleží na vědecké úrovni našeho vysokého školství. Vysoké školy jsou místem vědecké práce a musí jim být vyhrazeno, aby prvním, základním a nepominutelným předpokladem každého jmenování člena jejich sborů byla kvalifikace vědecká. Nemohou připustiti, aby o kandidátech rozhodovaly důvody jiné, zvláště pak ne momenty stranické, jak by tomu nepochybně bylo, kdyby se navrhovací právo přesunulo na činitele politické. Zde je jádro celé otázky a zde je skryto nebezpečí povahy pro naše vysoké školství tak osudové, že není hlasu dosti silného, jenž by měl zvednouti výstražné volání. Příklad Německa, Ruska a Italie nám ukazuje, kam vede ve vysokém školství vláda jedné politické strany: nechtějme dáti světu odstrašující příklad vysokého školství, v němž se stolice vědních disciplin budou rozdělovati podle politického klíče mezi kandidáty, které budou politické strany chtít odměniti za služby jiné povahy než je vědecká práce a zásluhy badatelské. Je-li spravedlnost základem státu, je svoboda životní podmínkou opravdové vědecké práce; a vedla-li prvá věta k zásadě nezávislosti soudcovské, musí vést druhá k zásadě nezávislosti badatelské.

Vysoké školy žádají pro sebe spravedlnosti: chtějí být místem vážné vědecké práce, a jest na veřejnosti, aby je podporovala v tomto jejich poslání. Dejte vysokým školám, co jim osvobozený národ zaručil zákonem, nesvalujte na ně vinu za něco, zač odpovědnost padá na jiné, zejména však nedopusťte, aby se staly kořistí politického stranictví!

O neeuklidovské geometrii.

OTAKAR BORŮVKA.

Od euklidovské geometrie a geometrie analytické, o nichž jsem pojednal v předcházejících článcích*), vede přímá cesta ke geometrii neeuklidovské. Abychom ji poznali a pochopili obsah této geometrie, budeme sledovati, podobně jako ve zmíněných článcích, další myšlenkový vývoj pana Uma.

Pan Um se zamyslí nad axiomy abstraktní euklidovské geometrie. Jak víme, jest jich patnáct, avšak to není podstatné, neboť pochopitelně počet axiomů závisí na tom, jak se formulují, a bylo by na př. možné dva

* Věda a život II., str. 64 až 70, str. 171 až 177.

z nich vysloviti jako axiom jeden. Podstatný jest jejich obsah, a jím se určuje – to jsme již také v dřívějších článcích vyložili –, jaké vlastnosti musí míti vztahy, definované mezi dvěma skupinami objektu a vyjadřované slovy *„prochází“*, *„mezi“*, *„shodný“*, *„kongruentní“*, aby ty objekty byly body a přímkami euklidovské geometrie. Axiomy jsou základem, z něhož vyrustá celá logická stavba euklidovské geometrie, ostatně znamenitě rozložitá, a s tohoto hlediska skutečně vyžaduje bedlivé pozornosti.

Nuže, pana Uma napadnou dvě otázky. Jedna, která se dotýká přímo podstaty euklidovské geometrie, kdežto druhá spíše jenom její krásy. První otazka jest tato: *Neobsahuje euklidovská geometrie sporu?* Anebo podrobněji řečeno: *Není možno odvoditi z axiomu euklidovské geometrie logickými úsudky dvě tvrzení, která si odporují,* t. j. taková, že jedno z nich jest záporem druhého? Kdyby takové spory existovaly, byla by euklidovská geometrie bezcenná, alespoň se stanoviska logiky, neboť by její výroky odporovaly logické zásadě, že ze dvou výroku, z nichž jeden jest záporem druhého, jeden a jenom jeden jest správný.

Tuto zlou pochybnost pomuže panu Umovi překonati znalost analytické geometrie. Mysleme si, že z axiomů euklidovské geometrie lze odvoditi logickými úsudky dvě tvrzení, která si odporují. Pak jest možno při každé realisaci těch axiomu, t. j. dáme-li slovům *bod, přímka* jakýkoli konkretní obsah, a definujeme-li ve shodě s těmi axiomy mezi body a přímkami čtyři uvedené vztahy logickými úsudky stejného složení a sledu, jako jsou zmíněné úsudky, odvoditi dvě tvrzení, která si odporují. Tedy zvláště při číselné realisaci axiomu euklidovské geometrie, jak jsme ji poznali na modelu, danem analytickou geometrií, je možno odvoditi logickými úsudky dvě tvrzení, která si odporují. Avšak jednak v analytické geometrii body jsou dvojice a přímky trojice čísel, a základní vztahy *„prochází“* a ostatní jsou definovány pomocí obvyklých aritmetických operací. Vzpomeňme na př. definice vztahu *„prochází“: Výrok, že přímka* a, b, c *prochází bodem* x, y , *má ten smysl, že číslo* (získané operacemi sečítáním a násobením) ax by + c *jest nula.* Jednak v analytické geometrii logicke úsudky a tvrzení jsou logické úsudky a tvrzení o číslech. Je-li tedy možno odvoditi z axiomu euklidovské geometrie logickými usudky dvě tvrzení, která si odporují, vedou obvyklé aritmetické operace ke dvema tvrzením o číslech, která si odporují. Tedy i aritmetika obsahuje spor. Není-li naopak sporu v aritmetice, nemuže býti sporu v euklidovske geometrii. – Pan Um jest přesvědčen, že v aritmetice sporu není, a povazuje tím svou otázku, zda euklidovská geometrie neobsahuje sporu, za vyřízenu v příznivém t. j. zápornem smyslu. –

Druhá otázka, která při hloubání o axiomech pana Uma napadla, jest, jak jsem již podotkl, spíše jenom estetického rázu, vede však ve svých dusledcích k duležitému objevu — k objevu *neeuklidovské geometrie.* Je to tato otázka: *Není soustava 15 axiomu euklidovské geometrie zbytečně* *složitá v tom smyslu, že některý z těchto axiomů je již logickým důsledkem axiomů ostatních?*

Aby měl o axiomech přehled, roztřídil si je pan Um do skupin — celkem pěti — a to tak, že vždy do téže skupiny dal axiomy obsahově blízké. Axiomy první skupiny — celkem tři — popisují vlastnosti vztahu *„prochází"*; nazývají se *axiomy incidence* a patří mezi ně na př. axiom **a**, uvedený na str. 70. Axiomy druhé skupiny — jsou čtyři — popisují vlastnosti vztahu *„mezi"*; nazývají se *axiomy uspořádání* a jest mezi nimi na př. axiom **b**, uvedený na str. 70. Axiomy třetí skupiny — je jich pět — popisují vlastnosti vztahu *„shodný"* a *„kongruentní"*; nazývají se *axiomy shody* anebo *axiomy kongruence* a patří mezi ně na př. axiomy **c** a **d**, uvedené na str. 70. Axiomy čtvrté skupiny jsou dva a říká se jim *axiomy spojitosti.* A konečně v páté skupině jest jenom jeden axiom a to t. zv. *euklidovský axiom o rovnoběžkách.* Tento axiom zní takto: *Ke každému bodu* A *a každé přímce* a, *která jím neprochází, existuje nejvýše jedna přímka* a′ *taková, že prochází bodem* A, *a neexistuje bod, jímž obě přímky* a, a′ *procházejí.* Pro pohodlnější vyjadřování nazývá pan Um dvě přímky, k nimž neexistuje bod, jímž obě procházejí, *rovnoběžnými,* takže euklidovský axiom o rovnoběžkách se dá pohodlněji vysloviti takto: *Ke každému bodu* A *a každé přímce* a, *která jím neprochází, existuje nejvýše jedna přímka* a′ *taková, že prochází bodem* A, *a přímky* a, a′ *jsou rovnoběžné.*

Nuže. právě tento poslední axiom se zdá panu Umovi podezřelý, že je logickým důsledkem axiomů prvních čtyř skupin. Podezření vzniklo v něm hlavně ze dvou příčin. Jednak proto, že se mu euklidovský axiom o rovnoběžkách zdá vedle velmi jednoduchých axiomu prvních čtyř skupin příliš složitý, a jednak proto, že seznal, že logickým důsledkem axiomů jenom prvních tří skupin jest následující věta, velmi podobná axiomu o rovnoběžkách: *Ke každému bodu* A *a každé přímce* a, *která jím neprochází, existuje alespoň jedna přímka* a′ *taková, že prochází bodem* A, *a přímky* a, a′ *jsou rovnoběžné.*

Pod tlakem svého podezření pokouší se pan Um odvoditi euklidovský axiom o rovnoběžkách logickými úsudky z axiomů prvních čtyř skupin. Pokouší se znovu a znovu, avšak vždy marně. A tyto neúspěchy oslabují čím dále tím více jeho podezření a otázka: *Kterými logickými úsudky lze euklidovský axiom o rovnoběžkách odvoditi z ostatních čtrnácti axiomů,* mění se mu znenáhla v otázku: *Jest možné, logickými úsudky tento axiom odvoditi z ostatních čtrnácti?* Po mnoha marných pokusech jest pan Um již přesvědčen, *že to možné není.*

Muže to však dokázati? Skutečně po dlouhém přemýšlení to dokáže a sice analysou toho, že se mu podařilo realisovati slova *bod, přímka* určitými pojmy euklidovské geometrie (totiž pojem bodu uvnitř kružnice a tětivy kružnice) a realisovati vztahy *„prochází". „mezi", „shodný", „kon-*

gruentní“ tak, že jsou splněny všechny axiomy prvních čtyř skupin, kdežto euklidovský axiom o rovnoběžkách splněn není a naopak jest splněn axiom opačný. Jinými slovy, že se mu podařilo nalézti model geometrie, v níž platí všechny axiomy prvních čtyř skupin, kdežto euklidovský axiom o rovnoběžkách jest nahrazen axiomem opačným. O tom ještě uslyšíme.

Ta analysa jest obsažná a proto ji neuvádím. Její výsledek jest tento: Je-li euklidovský axiom o rovnoběžkách logickým důsledkem axiomů prvních čtyř skupin, pak euklidovská geometrie obsahuje spor. Avšak víme s jistotou, jakou dnes může dáti aritmetika, že euklidovská geometrie sporu neobsahuje, takže s touže jistotou platí, že euklidovský axiom o rovnoběžkách logickým důsledkem ostatních čtrnácti axiomů není.

Tímto znamenitým výsledkem otvírají se úvahám pana Uma možnosti před tím netušené. Euklidovská geometrie jest, jak víme, soustava 15 axiomů a dusledků odvozených z nich logickými úsudky (str. 70. 15 axiomů popisuje vlastnosti vztahu předpokládaných mezi body a přímkami. Pochopitelně mužeme se zajímati, když chceme, o to, jak se změní soustava našich úsudku a výsledku, když se změní jeden po př. i více axiomů; jinými slovy, jaké budou logické úsudky a výsledky těchto úsudků o dvou skupinách objektu, mezi nimiž předpokládáme vztahy, které mají jiné vlastnosti než ty, které jsou popsány v 15 axiomech euklidovské geometrie.

Abych smysl této poznámky objasnil, užiji této analogie: Ve státě máme dvě skupiny objektu, totiž osoby dospělé a nedospělé, a mezi objekty obou skupin jisté vztahy určené zákony. Tyto zákony vedou k určitým, třeba praktickým, dusledkum. Mysleme si, že některé z těchto dusledků jsou ještě zvláště vysloveny v určitém zákonu *a*. Pochopitelně, můžeme se zajímati, když chceme, o to, jak se změní dusledky, když bychom změnili jeden anebo i více našich zákonu. Taková změna bude však zcela jistě nerozumná, když bychom všechny zákony ponechali beze změny s výjimkou zákona *a*, který bychom nahradili zákonem opačným *non a*. Neboť pak dusledky zákonu nezměněných budou v kolisi s novým zákonem *non a*.

Nuže, vraťme se opět ke dvěma skupinám jakýchkoliv objektů a vztahům mezi nimi, kteréžto vztahy mají vlastnosti popsané v 15 axiomech euklidovské geometrie. Mysleme si, že změníme tuto soustavu axiomů jenom tak, že z ní odstraníme euklidovský axiom o rovnoběžkách a nahradíme jej axiomem právě opačným. Tento nový axiom, který pro pohodlné vyjadřování budeme nazývati *neeuklidovský axiom o rovnoběžkách*, zní takto: *Ke každému bodu* A *a každé přímce* a, *která jím neprochází, existují alespoň dvě přímky* a′, a″ *takové, že procházejí bodem* A *a jsou rovnoběžné s přímkou* a (t. j. neexistuje bod, jímž procházejí obě přímky *a*, *a′*, ani neexistuje bod, jímž procházejí obě přímky *a*, *a″*). Tato změna systému 15 axiomů, spočívající, jak jsem řekl, jenom v nahrazení euklidovského axiomu o rovnoběžkách neeuklidovským axiomem o rovnoběžkách, může býti rozumná jenom v případě, že euklidovský axiom o rovnoběžkách není logickým důsledkem ostatních čtrnácti axiomů. Neboť jinak by ta nová, změněná soustava 15 axiomů – říkejme jí *soustava axiomů neeuklidovské geometrie* – vedla ke sporu a byla by, alespoň se stanoviska logiky, bezcenná. Avšak to jsem zdůraznil jako znamenitý výsledek, když pan Um ukázal, že euklidovský axiom o rovnoběžkách logickým důsledkem ostatních čtrnácti axiomů není.

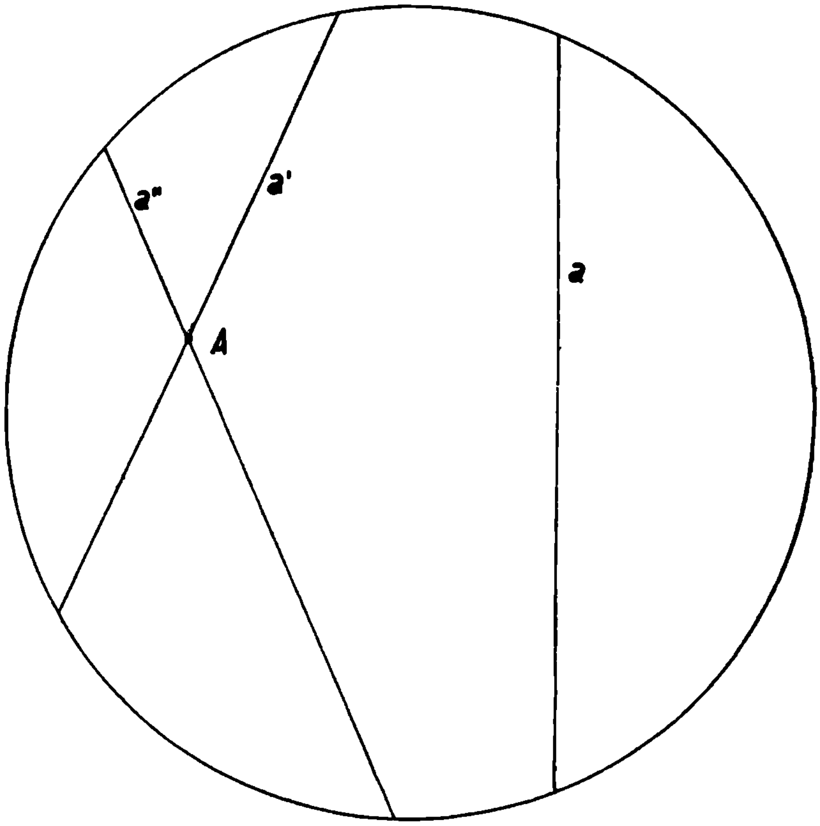
Pan Um vezme nyní v úvahu dvě skupiny objektů a předpokládá mezi nimi vztahy – opět vyjadřované slovy „*prochází*“, „*mezi*“, „*shodný*“, „*kongruentní*“ – ,které mají vlastnosti popsané v 15 axiomech neeuklidovské geometrie. Pro stručnost nazývá pan Um opět objekty jedné skupiny *body* a objekty druhé skupiny *přímkami*, avšak na rozdíl od dřívějších *neeuklidovskými*. Je si však velmi dobře vědom toho, že nyní již nemůže tyto body a přímky a uvažované vztahy mezi nimi realisovati obvyklými obrazci skládajícími se z teček a přímých čar a to proto, že při této realisaci není splněn právě poslední axiom, totiž neeuklidovský axiom o rovnoběžkách. Neboť, ať pan Um nakreslí jakoukoli tečku a jakoukoli přímou čáru, která tou tečkou neprochází, může nakresliti jenom jednu přímou čáru – alespoň se mu to zdá evidentní –, která tou tečkou prochází a tu přímou čáru neprotne, t. j. jest k ní rovnoběžná. Naproti tomu nic nestojí v cestě, aby pan Um podobně jako dříve v případě geometrie euklidovské logickými úsudky neodvozoval z axiomů neeuklidovské geometrie nové a nové důsledky.

Jeho práce je tentokráte obtížnější, protože o svých úsudcích nemá tak bezprostřední realisace na obrazcích, jako měl v případě geometrie euklidovské. Naproti tomu pan Um ustavičným přemýšlením vysoce zdokonalil své rozumové schopnosti a mimo to, jak jsem se již zmínil, přece jenom dovedl nalézti pro své úsudky realisaci – model – ,který mu pomohl, a to podstatně, při znamenitém důkazu, že euklidovský axiom o rovnoběžkách není logickým důsledkem ostatních čtrnácti.

Pan Um si nakreslí kružnici a vezme v úvahu tyto dvě skupiny objektů: tečky uvnitř kružnice a tětivy kružnice (t. j. úsečky spojující vždy dva body na kružnici) a definuje vztahy „*prochází*“, „*mezi*“, „*shodný*“, „*kongruentní*“. Na př.: O určité tětivě pravím, že *prochází* určitou tečkou, když ta tětiva byla nakreslena podle pravítka těsně přiloženého k té tečce. Nebo: Jsou-li *A*, *B*, *C* tři různé tečky, jimiž prochází táž tětiva, pravím o tečce *A*, že jest *mezi* tečkami *B*, *C*, když jedna z teček *B*, *C* jest jednomu konci tětivy blíže než *A* a druhá druhému konci tětivy blíže než *A*. Vztahy vyjadřované slovy *shodný*, *kongruentní* jsou složitěji definovány a proto jich neuvádím. Jenom zdůrazňuji, že vztah „*shodný*“ *není* definován tak, že se dvě úsečky prohlásí za shodné, jestliže jejich délky získané odměřením vzdálenosti koncových bodu jsou stejné, nýbrž jest definován jinak.

A nyní pan Um konstatuje, že při této realisaci jest splněno všech 15 axiomů neeuklidovské geometrie, takže obě skupiny objektů, totiž tečky uvnitř kružnice a tětivy kružnice realisují neeuklidovské body a přímky. Tak jest na př. zřejmě splněn axiom ze skupiny axiomů incidence: *Každými dvěma neeuklidovskými body prochází jedna a ne víc než jedna neeuklidovská přímka.* Zřejmě jest také splněn neeuklidovský axiom o rovnoběžkách: *Ke každému bodu* A *a každé přímce* a, *která jím neprochází, existují alespoň dvě přímky* a′, a″ *takové, že procházejí bodem* A *a jsou rovnoběžné s přímkou* a.

Nuže, pan Um odvozuje z 15 abstraktních axiomů neeuklidovské geometrie nové a nové věty, a tato realisace je mu při tom názornou pomůckou. Vybuduje tak opět logickou soustavu úsudků a výsledku, spočívající na 15 axiomech neeuklidovské geometrie, a tato soustava spolu s axiomy jest t. zv. *neeuklidovská geometrie.* Některé věty této geometrie a úsudky k nim vedoucí neliší se při vyslovení vůbec od vět a příslušných úsudků geometrie euklidovské, leč že se snad místo *bod, přímka* vysloví *neeuklidovský bod* a *neeuklidovská přímka.* Na př. věta: *Ke každým dvěma ruzným přímkám existuje nejvýše jeden bod, kterým obě procházejí,* jest správná i v geometrii euklidovské i v geometrii neeuklidovské. Jest zřejmé, proč. Proto, že obě soustavy po 15 axiomech, totiž soustava axiomů geometrie euklidovské a soustava axiomů geometrie neeuklidovské mají 14 axiomu společných, totiž všechny axiomy prvních čtyř skupin. Proto všechny věty v jedné geometrii anebo druhé, které jsou logickými důsledky axiomů jenom prvních čtyř skupin, znějí docela stejně, ať jde o geometrii euklidovskou nebo neeuklidovskou. Naproti tomu věty, při jejichž odvození se užilo podstatně axiomu o rovnoběžkách, znějí jinak v geometrii euklidovské a jinak v geometrii neeuklidovské. Tak na př. v geometrii neeuklidovské platí tato věta: *Součet úhlu v každém trojúhelníku jest menší než úhel přímý.*



A nyní k uzavření úvah o neeuklidovské geometrii chybí panu Umovi už jenom jistota, že neeuklidovská geometrie neobsahuje sporů. Důkaz pro tento fakt se povede snadno podle obdobného důkazu v případě euklidovském.

Vybudovav takto neeuklidovskou geometrii dospěl pan Um tam, kde byl po prvé kolem r. 1816 slavný německý matematik *C. F. Gauss*, který v té době neeuklidovskou geometrii již znal, avšak – obávaje se nepochopení svých vrstevníků – jí neuveřejnil. O slávu vybudování neeuklidovské geometrie dělí se dva matematikové: Rus *N. I. Lobačevsky* a Maďar *J. Bolyai*, kteří nezávisle a téměř současně neeuklidovskou geometrii poznali a okolo r. 1830 uveřejnili.

★

Čtenář, který není odborníkem a který pozorně přečetl předcházející články, neshledá patrně v objevení neeuklidovské geometrie tak vynikající počin, jakým ve skutečnosti byl. To proto, že jsem se od počátku snažil výklad podati tak, aby přechod od geometrie euklidovské k neeuklidovské se zdál co nejpřirozenější. Avšak i matematikové, v duchu moderních metod odchovaní a tudíž jako detektivové podezírající všechno a nevěřící ničemu, co není dokázáno, chápou velikost toho objevu už jenom při zpětném pohledu na obrovskou a při tom marnou práci, kterou během tisíciletí lidé vykonali ve snaze odvoditi euklidovský axiom o rovnoběžkách z axiomů ostatních. Zástupci snad všech kulturních národů, kteří se v této souvislosti uvádějí, defilují před našimi zraky. Řekové: *Posidonius*, *Geminus*, *Ptolemaeus*, *Proclus*; Arabové *Al Nairizi*, *Nasir Eddin*; Italové: *Commandino*, *Borelli*, *Vitale*, *Saccheri*; Angličan *Wallis*; Švýcar *J. H. Lambert*; Francouzi: *D'Alembert*, *Lagrange*, *Carnot*, *Laplace*, *Fourrier*, *Monge*, *Legendre*. Pokusů, odvoditi euklidovský axiom o rovnoběžkách, o nichž se dočítáme v dějinách matematiky, bylo strašlivě mnoho. „Jako písku u moře" stojí v jednom díle o neeuklidovské geometrii. Je-li toto přirovnání přepiaté, jisté jest, že v jednom seznamu literatury jest takových pokusů jenom za 17., 18., 19. století uvedeno na dvaceti kvartových stranách. Všechny tyto pokusy shodují se v tom, že nahrazují euklidovský axiom o rovnoběžkách nějakým jiným, jemu co do důsledku ekvivalentním axiomem, který však často není vysloven (na př.: každým bodem v ostrém úhlu prochází přímka, která protne obě ramena úhlu). Patrně proto, že tehdejší matematikové byli příliš v zajetí názorné realisace kreslenými obrazci a takové obrazce je sváděly k úsudkům, v nichž byly logické mezery. Jest možno říci, že problém euklidovského axiomu o rovnoběžkách byl jedním z nejslavnějších problémů v dějinách exaktních přírodních věd a jména Gausse, Lobačevského a Bolyaie zůstanou na věčné časy vryta do pomníku vývoje lidského poznání.

Geometrie o nichž jsem psal, jsou t. zv. geometrie *rovinné* anebo *dvojrozměrné*. Rozšířením těchto geometrií jsou t. zv. geometrie euklidovská, analytická a neeuklidovská *trojrozměrná* a geometrie *vícerozměrné*.