Otakar Borůvka

O klasických matematických problémech

Věda a život VI, 1939, 98-101

svém vyhlášení. Mluvíme o této mezitímní době jako o vakaci zákona. V normálních dobách bývá tato doba zpravidla jednotně určena, jako na př. v bývalé čs. republice — pokud nebylo stanoveno jinak — bylo zapotřebí 30 dnů od uveřejnění zákona v úřední Sbírce zákonů a nařízení, než publikovaný zákon počal platiti. V mimořádných dobách není ovšem taková lhůta možná a zákon tu nabývá platnosti přímo svým vyhlášením. Také jen z mimořádnosti doby lze pochopiti, jsou-li vydány zákony se zpětnou platností, t. j. vztahující se ke skutečnostem, vzniklým před vyhlášením takového zákona a proto bez zřetele k němu. — Druhá otázka by byla, do kdy zákon platí. Na ni by mohlo býti mnoho odpovědí, jež by však již překročovaly rámec našeho článku. Zhruba můžeme říci: dokud není změněn anebo zrušen přímo či nepřímo jiným zákonem pozdějším a — konec konců — dokud nevejde v zapomnění.

Je jisto, že v dnešní době těžkých mezinárodních konfliktů zdá se zvláštním a málo přiléhavým mluviti o všem tom, co souvisí s právním řádem. Není však přece jen na škodu uvědomiti si ve víře v lepší budoucnost mírového pořádku, že je to v první řadě právě právní řád, od jehož zachování celá stavba tohoto pořádku závisí. Neboť chce-li společnost lidská žíti ve spořádaném prostředí, musí býti vždy pamětliva a říditi se zásadou, raženou Římany, avšak platící pro všechny národy a pro každou dobu: LEX CIVIUM DUX — zákon je vůdcem občanů.

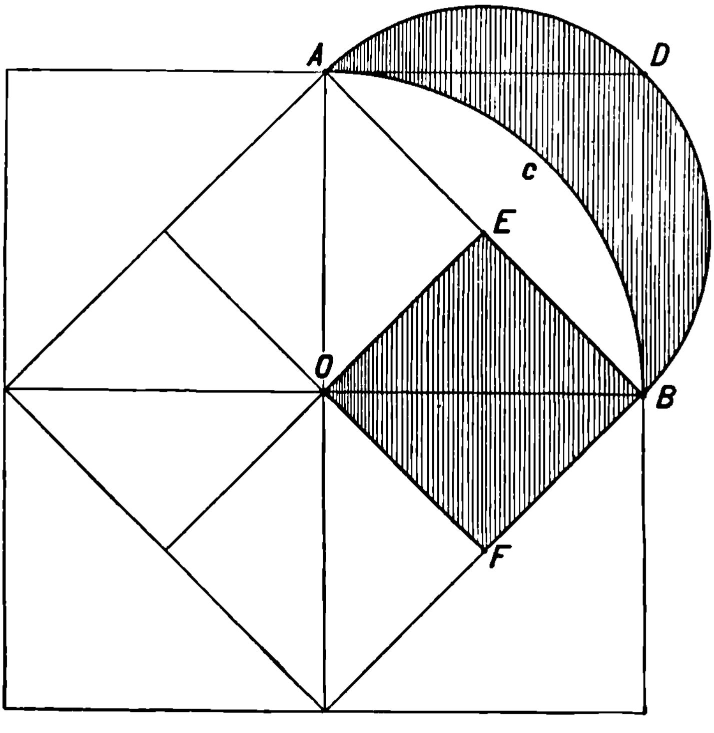
# O klasických matematických problémech.

OTAKAR BORŮVKA.

Z matematických problémů jistě nejpopulárnějšími jsou tři klasické problémy: kvadratury kruhu, trisekce úhlu a zdvojení krychle. Tyto problémy, již přes padesát let po každé stránce rozřešené, lákají dodnes neodborníky vzdělanějších vrstev, jak o tom svědčí tu a tam se objevující brožurky, novinářské články a neveřejné, avšak tím častější přípisy a dotazy matematickým ústavům universit.

O kvadratuře kruhu. Kvadraturou kruhu v širším smyslu se rozumí určení plošného obsahu kruhu. Každému jest známo, že se jednoduchým rovinným obrazcům, jako jsou trojúhelníky, obdélníky, po př. čtverce a obecněji mnohoúhelníky, přiřazují jakási kladná čísla, t. zv. plošné obsahy, jež jsou měrou pro část roviny takovým obrazcem vymezenou. Tato čísla se počítají podle jednoduchých pravidel. Tak na př. čtverec, jehož každá strana má určitý počet — řekněme $a$ — jednotek délky, na př. cm, má plošný obsah $a \times a$, t. j. $a^2$. — Také kruh jest jednoduchý rovinný obrazec a přiřazuje se mu plošný obsah. Avšak pravidlo pro jeho výpočet není tak bezprostřední a jednoduché, jako v předcházejících případech; jest to pochopitelné vzhledem k tomu, že kruh jest zakřivený, kdežto na př. čtverec jest obrazec přímočarý. Udati pravidlo, podle něhož by bylo možno vypočítati plošný obsah každého kruhu, když známe délku jeho poloměru, jest problém, který se právě označuje jako problém kvadratury kruhu v širším smyslu. Jak uslyšíme, byl rozřešen již dávno před Kristem. Naproti tomu kvadraturou kruhu v užším smyslu se rozumí geometrická konstrukce, vedoucí od poloměru daného kruhu ke straně čtverce, který má týž plošný obsah jako kruh; a sice geometrická konstrukce pomocí jenom pravítka a kružidla. To znamená, že se při ní konstruují jenom průsečíky přímých čar a kružnic. Právě k nalezení takové konstrukce směřují dodnes snahy neodborníků — avšak marně. Taková konstrukce neexistuje; jinými slovy, problém kvadratury v užším smyslu není řešitelný.

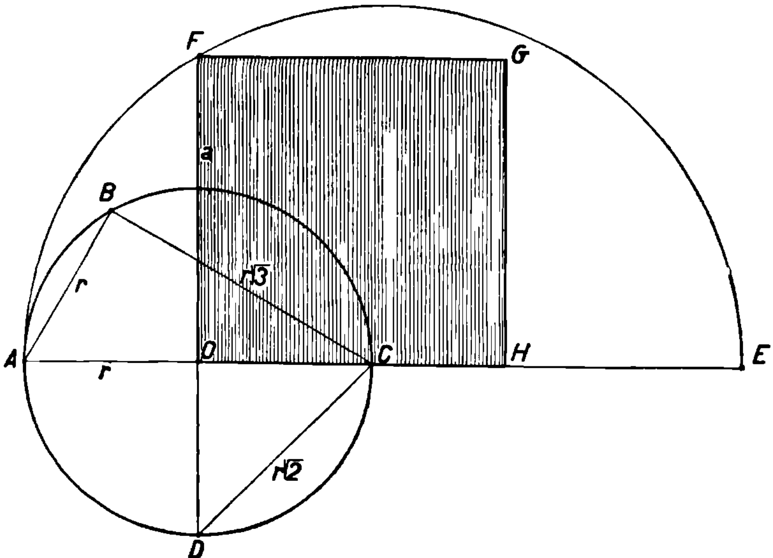
Dějiny problému kvadratury kruhu jsou slavné. O kvadratuře kruhu jest psáno v jednom z nejstarších známých matematických dokumentů vůbec, v t. zv. Papyrus Rhind asi z r. 2000 př. Kr., jenž jest dnes uložen v Britském museu. V něm se udává toto pravidlo pro výpočet plošného obsahu kruhu: Plošný obsah kruhu jest stejně velký, jako plošný obsah čtverce, jehož každá strana jest $\frac{8}{9}$ průměru toho kruhu. Ku podivu jest toto pravidlo dobré, neboť udává plošný obsah kruhu jenom asi o 6 desetin procenta větší než ve skutečnosti jest. V starověké řecké matematice zaujímal problém kvadratury kruhu vedle druhých dvou uvedených klasických problémů čelné místo a pokud se týče kvadratury v širším smyslu, byl také již tehdy úplně rozřešen. Hippokrates z Chia v 5. stol. př. Kr. dokázal, že plošné obsahy dvou kruhů mají týž poměr jako plošné obsahy čtverců, jejichž strany jsou průměry těchto kruhů. Bezprostřední důsledek této Hippokratovy věty jest, že poměr plošného obsahu každého kruhu ku plošnému obsahu čtverce, jehož každá strana jest poloměr toho kruhu, jest pro všechny kruhy totéž číslo; podrobněji řečeno, ať jest kruh velký nebo malý, jeho plošný obsah jest vždy stejněkráte větší než plošný obsah čtverce, jehož každá strana má délku poloměru toho kruhu. Stejněkráte větší; avšak kolikrát? Číslo, které udává kolikrát větší, se značí řeckým písmenem $\pi$, takže vychází pravidlo, že plošný obsah každého kruhu jest




Plošný obsah měsíčku *ACBD* jest roven plošnému obsahu čtverce *OFBE*. To plyne snadno z toho, že plošné obsahy dvou kruhů mají týž poměr jako plošné obsahy čtverců, jejichž strany jsou pruměry těch kruhu. — Kromě tohoto měsíčku znal Hippokrates ještě další dva měsíčky, jejichž kvadratura se dá provésti jenom pravítkem a kružidlem.

$\pi \times r^2$, při čemž $r$ značí délku poloměru toho kruhu. Tímto pravidlem jest problém kvadratury kruhu v širším smyslu po theoretické stránce rozřešen. Pro praktickou stránku zbývá ukázati, jak se číslo $\pi$ vypočte a jaká jest jeho hodnota. To ukázal po prvé Archimedes v 3. stol. př. Kr., jenž vypočetl hodnotu čísla $\pi$ na dvě desetinná místa a sice $\pi = 3,14\ldots$ Mnohem později, kolem r. 1600 po Kr., methodou podobnou Archimedově, vypočetl Ludolf van Ceulen číslo $\pi$ na 35 desetinných míst. Po něm se číslu $\pi$ říká číslo Ludolfovo. Ještě později, v 18. stol., po objevení infinitesimálního počtu, byly nalezeny mnohem vhodnější methody než Archimedova k výpočtu čísla $\pi$, jež bylo jimi vypočteno na více než 100 desetinných míst.

Avšak i problém kvadratury kruhu v užším smyslu má své proslulé dějiny. Také tímto problémem zabývali se již řečtí matematikové dávno př. Kr. Týž Hippokrates v 5. stol. př. Kr. při pokusech o rozřešení tohoto problému objevil své proslulé obrazce, t. zv. Hippokratovy měsíčky, t. j. určité dvojúhelníky, ohraničené kruhovými oblouky, jejichž kvadraturu lze skutečně provésti jenom pravítkem a kružidlem. Během dlouhých dob pokusy o rozřešení problému se hromadily, avšak nedařily, problém odolával a stával se proslulým. Nezdařených pokusů bylo tolik, že se pařížská Akademie r. 1775 usnesla, že v budoucnu dalších předložených řešení problému kvadratury kruhu — rozumí se v užším smyslu —, trisekce úhlu, zdvojení krychle a perpetua mobile už zkoumati nebude.



Z daného poloměru $r$ kruhu $ABCD$, jehož kvadratura se má *přibližně* provésti, sestrojí se nejprve úsečky $\overline{CD}$, $BC$ o délkách $r\sqrt{2}$, $r\sqrt{3}$ a jejich součet $OE$. Kruh nad $\overline{AE}$ protne kolmici v $O$ na $\overline{AE}$ v bodě $F$ a úsečka $\overline{OF}$, délky $a$, jest stranou čtverce $AFGH$, jenž má přibližně týž plošný obsah jako kruh $ABCD$.

Již tehdy bylo zřejmo, že se problém nerozřeší pokusy amatérů a že naopak vyžaduje mnohem hlubších úvah a mocnějších method. A skutečně předcházelo ještě mnoho slavných jmen, mnoho hlubokých myšlenek a mnoho práce, než r. 1882 proslulý německý matematik Lindemann dokázal tento konečný výsledek: Problém kvadratury kruhu v užším smyslu není řešitelný. Podrobněji řečeno: Geometrická konstrukce pomocí jenom pravítka a kružidla, vedoucí od poloměru daného kruhu ke straně čtverce, který má týž plošný obsah jako ten kruh, neexistuje. Vedlo by příliš daleko, kdybych chtěl i jenom naznačiti, jak se tento výsledek dokáže; tak hluboko tkví v moři matematických pojmů a method. Spokojíme se proto jenom s poznámkou, že podstatná část důkazu záleží v tom, že se dokáže, že číslo $\pi$ nehoví žádné algebraické rovnici, jejíž koeficienty jsou celá čísla. — Poznamenejme ještě, že jest známa celá řada konstrukcí jenom pravítkem a kružidlem řešících úlohu o kvadratuře kruhu *přibližně*. Na př. jedna z nejjednodušších spočívá na skutečnosti, že se úsečky délky $r\sqrt{2}$, $r\sqrt{3}$ z dané úsečky délky $r$ pravítkem a kružidlem snadno sestrojí a jejich součet má délku přibližně $\pi r$.

O trisekci úhlu a zdvojení krychle. Problémem trisekce úhlu se rozumí úloha rozděliti daný úhel na tři stejné díly. Problémem zdvojení krychle se rozumí úloha, k dané úsečce sestrojiti novou úsečku takovou, aby krychle, jejíž každá hrana má délku této nové úsečky, měla objem právě dvakráte tak velký jako krychle, jejíž hrana má délku úsečky dané. Oba problémy se chápou buď v širším smyslu, totiž, že jde o rozdělení daného úhlu po př. sestrojení hledané úsečky pomocí vhodných prostředků, jejichž volba jest zcela na naší vůli; anebo se chápou v užším smyslu, že jde o geometrické konstrukce opět pomocí jenom pravítka a kružidla. Řešení obou problémů v širším smyslu neskýtá vůbec žádných obtíží a již ze starověku pochází řada způsobů řešení na př. od Hippia, Platona, Archimeda a jiných. Mimo pravítka a kružidla užívá se při nich jednodušších nebo složitějších přístrojů, na př. t. zv. konchoidního kružidla. Naproti tomu oba problémy v užším smyslu jsou opět neřešitelné, t. j. hledané geometrické konstrukce pomocí jenom pravítka a kružidla neexistují.

Podobně jako problém kvadratury kruhu, oba problémy mají slavné dějiny. Problém zdvojení krychle prý nabyl na významu, když se Délští zlou nemocí týraní obrátili do věštírny o radu a věšteckým výrokem byli vyzváni, aby kterýsi oltář, v podobě krychle, zdvojili. Tehdy prý byli vysláni poslové k matematikům akademie Platonovy, aby si rozřešení problému vyžádali. Odtud se také problému zdvojení krychle říká délský problém. Problémy trisekce úhlu i zdvojení krychle v širším smyslu byly již starověkými matematiky skvěle rozřešeny a zdá se, že tito již také tušili neřešitelnost obou problémů ve smyslu užším. Nicméně snahy o rozřešení těchto obou problémů pokračovaly, přenášejíce se — jako epidemická nemoc — se století na století, vyvolávajíce záplavu pojednání. Početnost nepodařených pokusů o rozřešení obou problémů v užším smyslu spolupůsobila k usnesení pařížské Akademie z r. 1775, výše připomenutému. Avšak na rozdíl od kvadratury kruhu bylo v té době již známo, že geometrická konstrukce pro trisekci úhlu a zdvojení krychle pomocí jenom pravítka a kružidla neexistuje. Dnes známe velmi elegantní methody, jimiž se tato skutečnost dá dokázati. V podstatné části záleží v tom, že se dokáže, že délka žádné úsečky, kterou z dané jednotkové úsečky jest možno sestrojiti pomocí jenom pravítka a kružidla, nehoví irreducibilní algebraické rovnici třetího stupně. — *Přibližné* konstrukce ovšem opět existují.

S hlediska moderní matematiky nejeví se nám klasické problémy, o nichž jsem hovořil, zajímavými. Jednak proto, že jejich řešení již dlouho známe; avšak i proto, že proti cílům, které sleduje dnešní matematika, mají nepatrný rozsah. Tím méně zajímavé ovšem mohou býti všechny pokusy amatérů o jejich rozřešení a zejména takové, které sledují cíl, o němž bezpečně víme, že neexistuje.