Otakar Borůvka
O analytické geometrii

Věda a život II, 1936, 171-177

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500295

O analytické geometrii.

OTAKAR BORŮVKA.

V článku o euklidovské geometrii*) jsem vyložil, že *body* po př. *přímkami* euklidovské geometrie se rozumějí dvě skupiny jakýchkoli objektů, mezi nimiž jsou definovány vztahy, vyznačující se určitými vlastnostmi. Těchto vztahů je čtvero a vyjadřují se slovy *„prochází"*, *„mezi"*, *„shodný"*, *„kongruentní"*. Jejich vlastnosti jsou popsány v 15 axiomech, a soustava těchto axiomů s důsledky odvozenými z nich logickými úsudky jest *euklidovská geometrie.* Vyložil jsem, že euklidovská geometrie jest soustava abstraktní, jejíž jednou realisací je geometrie kreslených obrazců – říkejme jí v dalším *geometrie deskriptivní* — a to takovou, že body po př. přímkami se rozumějí tečky a přímé čáry a slovy *„prochází"*, *„mezi"*, *„shodný"*, *„kongruentní"* příslušné názorné vztahy mezi nimi. Aby výklad byl co nejsrozumitelnější a snad i zábavnější, podal jsem jej tak, že jsem se stanoviska pozorovatele popisoval myšlenkový vývoj člověka (jemuž jsem pro pohodlnější vyjadřování dal jméno pan Um), jak z jednoduchých poznatků získaných zkušeností si euklidovskou geometrii vybudoval. Nyní budeme sledovati pan Uma dále na cestě za geometrií analytickou.

Je pochopitelné, že pan Um počne pátrati po tom, zda může svou abstraktní euklidovskou geometrii realisovati i jinak než geometrií deskriptivní — od níž ostatně vyšel. Jeho práce v tomto směru jest nyní daleko obtížnější než když mu šlo o to vymysliti realisaci bodů a přímek a jenom takového vztahu mezi nimi, aby platil *jediný* axiom

a) *Každými dvěma body prochází jedna a ne více než jedna přímka.* Tehdy snadno našel řadu takových realisací na př. třemi koulemi a třemi dráty anebo tóny a dvojzvuky a v obou případech vhodnou definicí vztahu *„prochází"*. Nyní však se snaží mezi dvěma skupinami vhodných objektů definovati vztahy *čtvero* druhu a ty mají míti celou řadu vlastností, totiž vlastnosti popsané v 15 axiomech! Tak na př. nyní jistě již nemůže realisovati body a přímky třemi koulemi a třemi dráty. Vskutku, jednak jest mezi 15 axiomy euklidovské geometrie jeden, který výslovně požaduje, aby body byly *alespoň* tři (a dokonce takové, že jimi neprochází táž přímka). Jednak jest mezi nimi axiom

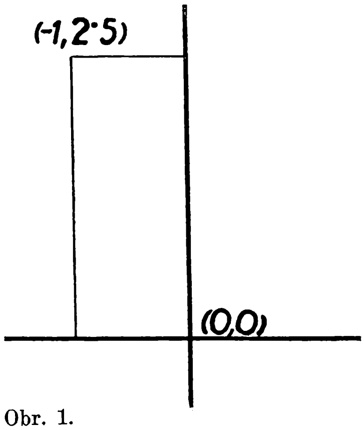
Pro každé dva body A, C platí, že existuje alespoň jeden bod B mezi body A, C a alespoň jeden bod D takový, že C jest mezi A, D a při tom body A, B, C, D prochází táž přímka

a tento axiom spolu s dalším axiomem

b) *Pro každé tři body, jimiž prochází táž přímka, platí, že jeden a jen jeden z nich jest mezi druhými dvěma*

vyžaduje, aby body byly alespoň čtyři. Vskutku, jsou-li pouze tři body

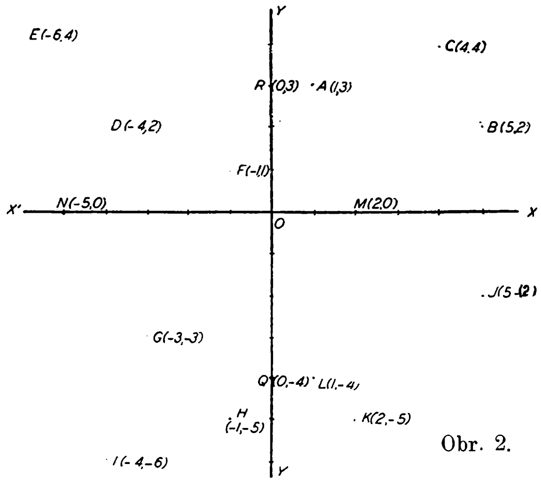
*) Věda a život II., str. 64 až 70.



Obr. 1.

A, B, C, může první z obou axiomů býti splněn jenom tak, že bod D jest totožný s bodem B. Pak ale pro body A, B, C platí, že bod B jest mezi body A, C a současně C mezi body A, B a při tom body A, B, C prochází táž přímka — a to jest vyloučeno axiomem b).

Podstatným pokrokem k poznání další realisace abstraktní euklidovské geometrie jest, když si pan Um uvědomí, že může tečky a přímé čáry kotovati podobně jako značí polohu míst, a tok řek a běh cest na mapě. Na listu papíru nakreslí si dvě přímé čáry procházející středem listu; jednu vodorovnou od levého okraje papíru k pravému a druhou svislou, od horního okraje k dolnímu. Pan Um říká těmto čarám *osy* a tečce, v níž se protínají *počátek*. Když si nyní nakreslí kdekoli na listu tečku, má tato tečka od každé z os určitou vzdálenost. Poznačme písmenem x míru vzdálenosti tečky od osy svislé a písmenem y míru její vzdálenosti od osy vodorovné, takže měří-li se vzdálenosti třeba v centimetrech, jest x (nebo y) nezáporné číslo udávající počet cm připadajících na vzdálenost tečky od svislé (vodorovné) osy. Je-li tedy na př. tečka na ose svislé, jest číslo x nula, je-li na vodorovné, je y nula. Nuže pan Um přiřadí tečce jako *kotu* dvojici čísel $\pm x$, $\pm y$, při čemž vezme znaménko $+$ u prvního čísla, když je tečka napravo od osy svislé a u druhého čísla, když je tečka nad osou vodorovnou, a znaménko — v opačných případech, tedy u prvého čísla když tečka jest nalevo od svislé osy, a u druhého když je pod osou vodorovnou*). Takto je každé tečce přiřa-



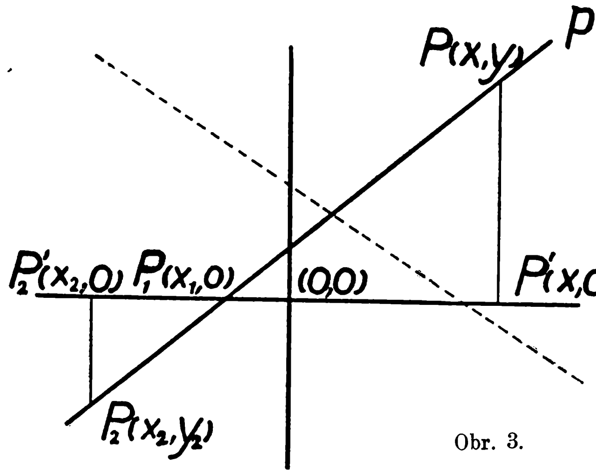
Obr. 2.

Pro ty, kterým je nový tento způsob kotování bodů, přinášíme diagram s 16 body, které nechť si kotují na čtverečkovaném papíře na němž si nakreslili obě osy, a pak srovnají s diagramem. Jsou to body: A (1, 3), B (5,2), C (4, 4), D (— 4, 2), E (— 6, 4), F (— 1, 1), G (— 3, — 3), H (— 1, — 5), I (— 4, — 6), J (5, — 2), K (2, — 5), L (1, — 4), M (2, 0), N (— 5, 0), Q (0, — 4), R (0, 3).

*) Představíme-li si, že jde o kotování míst na mapě, představuje nám osa vodorovná *rovník*, a osa svislá *nultý* (Greenwichský) *poledník*; polohu každého místa lze určiti dvěma čísly, z nichž prvé udává jeho vzdálenost od základního poledníku, a nese znaménko +, když je od tohoto poledníku na východ, a znaménko —, když je od něho na západ, a druhé udává vzdálenost od rovníku, která je + na sever a — na jih od rovníku.

děna jedna dvojice čísel, z nichž každé může býti buď kladné nebo nula nebo záporné; a naopak, ke každé dvojici čísel existuje — anebo alespoň zdá se přirozené připustiti, že existuje —, právě jedna tečka, jejíž kotou jest právě ta dvojice. Tak na př. počátek má kotu $(0, 0)$; kotu $(-1, 2{\cdot}5)$ má tečka nalevo od osy svislé ve vzdálenosti 1 cm od ní a nad osou vodorovnou ve vzdálenosti 2·5 cm od ní (obr. 1).

Jak jest tomu nyní s kotováním přímých čar? Pan Um nakreslí především přímou čáru — poznačme ji p —, která není rovnoběžná se žádnou z obou os ani se žádnou nesplývá; tedy buď stoupá jako na obr. 3. anebo klesá, jako přímá čára čárkovaně vyznačená na obr. 3. Aby výklad byl konkretní, mysleme si především, že p stoupá. Tečku, v níž p protne vodorovnou osu, poznačme na př. písmenem P_1 a její kotu $(x_1, 0)$. Pan Um vyznačí libovolnou další tečku P, různou od P_1, kterou p prochází; poznačme její kotu (x, y). Od tečky P nakreslí kolmici na vodorovnou osu a všimne si trojúhelníku $P_1P'P$. Zde P' značí tečku, v níž kolmice protne vodorovnou osu, takže kota tečky P' jest $(x, 0)$. Jedna odvěsna P_1P' toho trojúhelníka jest na ose vodorovné, druhá $P'P$ jest svislá. Je-li situace pro tečky P_1, P' taková, jako na obr. 3., t. j. tečka P' napravo od P_1, jest délka odvěsny P_1P' patrně $x - x_1$ a délka odvěsny $P'P$ jest y; je-li však tečka P' nalevo od P_1, jest délka odvěsny P_1P' patrně $-x + x_1 = -(x - x_1)$ a délka odvěsny $P'P$ jest $-y$. V obou případech jest tedy poměr délek odvěsny svislé a vodorovné číslo $y : (x - x_1)$. Pan Um vyznačí na přímé čáře p ještě další tečku P_2, různou od P_1 i od P a její kotu poznačí (x_2, y_2). Obdobně jako dříve nakreslí trojúhelník $P_1P'_2P_2$, jehož jedna odvěsna $P_1P'_2$ jest na ose vodorovné, druhá P'_2P_2 svislá a poměr délek odvěsny svislé a vodorovné jest číslo $y_2 : (x_2 - x_1)$. Oba trojúhelníky $P_1P'P$ a $P_1P'_2P_2$ jsou v tom vztahu, že dvě strany P_1P' a P_1P jednoho jsou na těchže přímých čarách jako dvě strany $P_1P'_2$ a P_1P_2 druhého a zbývající strany $P'P$ a P'_2P_2 jsou rovnoběžné. Avšak o takových dvou trojúhelnících pan Um ví — jest to jedna z vět, kterou získal empiricky —, že poměr délek kterýchkoli dvou stran v jednom trojúhelníku jest týž jako poměr délek stejnolehlých dvou stran v druhém. Při tom



Obr. 3.

se *stejnolehlou* k některé straně jednoho trojúhelníka nazývá ta strana druhého, která jest s ní na téže přímé čáře anebo jest s ní rovnoběžná. Podle této věty tedy platí rovnice $y:(x-x_1)=y_2:(x_2-x_1)$ a z ní plyne (násobením společným jmenovatelem a převedením všech členů na jednu stranu)

$$y_2 x + (x_1 - x_2) y - x_1 y_2 = 0. \tag{1}$$

Tato rovnice byla odvozena se zřetelem k okolnosti, že přímá čára p stoupá. Tato okolnost jest však nepodstatná. Vskutku nakreslí-li pan Um přímou čáru, která klesá, dojde analogickými úvahami k poznatku, že i pro koty $(x_1, 0)$, (x, y), (x_2, y_2) tří různých teček na této přímé čáře, platí rovnice (1). — V rovnici (1) x, y značí obě čísla koty libovolné tečky P na přímé čáře p, pokud ta tečka jest různá od P_1 i od P_2. Avšak rovnice (1) jest patrně splněna i když písmena x, y značí obě čísla x_1, 0 po př. x_2, y_2 koty tečky P_1 po př. P_2.

Pan Um tak došel k tomuto názoru: Ke každé přímé čáře p, která není rovnoběžná se žádnou z obou os ani se žádnou nesplývá, existují tři čísla a $(=y_2)$, b $(=x_1-x_2)$, c $(=-x_1 y_2)$, která mají tuto vlastnost: Obě čísla koty (x, y) každé tečky, kterou ta přímá čára prochází, splňují rovnici

$$ax + by + c = 0;$$

a žádné z obou čísel a, b není nula.

Než hořejší čísla a, b, c nejsou jediná, která mají tuto vlastnost. Vskutku, poznačíme-li písmenem ϱ libovolné číslo různé od nuly, také čísla ϱa, ϱb, ϱc mají vlastnost, že obě čísla koty (x, y) každé tečky, kterou ta přímá čára prochází splňují rovnici

$$(\varrho a) x + (\varrho b) y + (\varrho c) = \varrho(ax + by + c) = \varrho . 0 = 0$$

a žádné z obou čísel (ϱa), (ϱb) není nula. Tedy — stručně řečeno — mimo trojici čísel a, b, c každá trojice čísel jim úměrných má tu vlastnost. Naopak, jestliže nějaká trojice a', b', c', má tu vlastnost, platí pro obě čísla koty (x, y) každé tečky, kterou ta přímá čára prochází obě rovnice

$$ax + by + c = 0,$$
$$a'x + b'y + c' = 0,$$

a žádné z obou čísel a, b ani z a', b' není nula. Poznačíme-li $(x_1, 0)$ po př. $(0, y_1)$ kotu tečky, v níž přímá čára p protíná vodorovnou po př. svislou osu, platí obě rovnice jednou pro x_1, 0, po druhé pro $0, y_1$. Tedy jest

$$x_1 = -c:a = -c':a'; \qquad y_1 = -c:b = -c':b',$$

a snadno vychází $a':b':c' = a:b:c$, takže obě trojice (a, b, c) a (a', b', c') jsou úměrné. Tedy trojice (a, b, c) jest *až na trojice úměrné* jediná, která má uvedenou vlastnost. Nuže, pan Um přiřadí přímé čáře p jako *kotu* právě trojici (a, b, c) anebo kteroukoliv jinou trojici této úměrnou. Tímto pravidlem jest každé přímé čáře, která není rovnoběžná se žádnou z obou os ani se žádnou nesplývá, přiřaděna jako kota právě jedna trojice čísel — až na trojice úměrné —, při čemž žádné z prvních dvou čísel trojice není nula. A naopak, ke každé takové trojici $(a, b, c,)$ existuje právě jedna přímá čára, jejíž kotou jest právě ta trojice; totiž ta přímá čára, která prochází oběma tečkami, jejichž koty jsou $(-c:a, 0)$ a $(0, -c:b)$, v případě, že číslo c není nula a oběma tečkami, jejichž koty jsou $(0,0)$, $(-b, a)$ v případě, že číslo c jest nula.

Jak se nyní mají věci u přímých čar, které jsou rovnoběžné s některou osou po př. s některou z nich splývají? Lze hořejší pravidlo kotování rozšířiti i na tyto přímé čáry? Snadno se zjistí, že ano. Vskutku, pan Um nakreslí nějakou přímou čáru p rovnoběžnou na př. s osou vodorovnou a třeba *nad* ní. Každá tečka P (x, y), kterou přímá čára p prochází, má pak od vodorovné osy tutéž vzdálenost; poznačme míru této vzdálenosti písmenem c. Ježto p jest nad vodorovnou osou, jest druhé číslo y koty takové tečky rovno c. Obě čísla koty (x, y) každé tečky, kterou přímá čára p prochází, splňují tedy rovnici

$$0 \cdot x + 1 \cdot y - c = 0.$$

Nuže, právě trojici čísel $(0, 1, -c)$ anebo kteroukoli jinou jí úměrnou t. j. trojici $(0, \varrho, -\varrho \cdot c)$, kde ϱ značí nějaké od nuly různé číslo, přiřadí pan Um jako kotu přímé čáře p. Podobně přiřadí přímé čáře rovnoběžně s vodorovnou osou a *pod* ní ve vzdálenosti, jejíž míra jest c, jako kotu trojici čísel $(0, 1, c)$ anebo kteroukoli jinou této úměrnou; a ose vodorovné trojici $(0, 1, 0)$ anebo kteroukoli jinou této úměrnou. A konečně, každé přímé čáře svislé a ve vzdálenosti míry c od osy svislé přiřadí trojici $(1, 0, \mp c)$ anebo kteroukoli trojici jinou jí úměrnou; při tom vezme znaménko — když ta přímá čára jest napravo od osy svislé anebo s ní splývá a znaménko $+$, když jest nalevo. Tímto pravidlem, jest každé přímé čáře, která jest rovnoběžná s některou z obou os anebo s některou splývá, přiřaděna jako kota právě jedna trojice čísel — až na trojice úměrné —, při čemž právě jedno z prvních dvou čísel trojice není nula. A naopak, ke každé takové trojici existuje právě jedna přímá čára, která jest rovnoběžná s některou z obou os anebo s některou splývá, jejíž kotou jest ta trojice. — Nyní přehlédne pan Um svou dosavadní práci o kotování přímých čar tímto výsledkem: *Každé přímé čáře jsem přiřadil podle určitého pravidla jako kotu trojici čísel, z nichž každé může býti buď kladné anebo nula anebo záporné avšak alespoň jedno z prvních dvou čísel trojice není nula. Každá taková trojice jest kotou určité přímé čáry a dvě trojice úměrné jsou kotami téže přímé čáry.*

Nuže, zdá se přirozené, že pan Um si nyní položí tuto otázku: Existuje snad taková realisace abstraktní euklidovské geometrie, že se body rozumějí dvojice a přímkami trojice čísel takové, že alespoň jedno z prvních dvou čísel trojice není nula a dvě trojice úměrné se považují za stejné?

— Tomu tak jest když a jen když lze mezi takovými dvojicemi a trojicemi čísel definovati vztahy čtvero druhu, vyjadřované slovy „*prochází*", „*mezi*", „*shodný*", „*kongruentní*", tak, aby měly vlastnosti popsané v 15 axiomech euklidovské geometrie. A takové vztahy se skutečně podaří panu Umovi definovati. Nebudu unavovati čtenáře podrobným výkladem, jak se k definici takových vztahů dojde. Definice vztahu „*prochází*" zdá se ostatně na základě hořejšího výkladu jistě přirozenou a snad také pro definice ostatních vztahů, které uvedu, najde si čtenář názorný podklad — Nuže, vztahy, o něž jde, definuje pan Um takto:

Vztah „*prochází*". Výrok, že určitá trojice (a, b, c) *prochází* dvojicí (x, y) má ten smysl, že číslo $ax + by + c$ jest nula.

Vztah „*mezi*". Výrok, že určitá dvojice (x, y) jest *mezi* dvěma různými dvojicemi (x_1, y_1) a $(x_2\ y_2)$ má tento smysl: 1. Dvojicemi (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y) prochází táž trojice, 2. Jsou-li obě čísla x_1, x_2 různá, jest x větší než menší z nich a menší než větší z nich; jsou-li obě čísla x_1, x_2 stejná, jest y větší než menší z obou čísel y_1, y_2 a menší než větší z nich.

Vztah „*shodný*". Výrok, že určitá úsečka (x_1, y_1), (x_2, y_2) jest *shodná* s úsečkou $(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2)$ má ten smysl, že obě čísla (kladná nebo nuly) $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ $\sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2}$ sou si rovna.

Vztah „*kongruentní*" jest definován složitěji a proto jej neuvádím.

O takto definovaných vztazích pan Um zjistí, že mají všechny vlastnosti popsané v 15 axiomech euklidovské geometrie. Ukažme na př. že mají vlastnost popsanou axiomem:

a) *Každými dvěma různými body prochází jedna a ne více než jedna přímka*

anebo jinými slovy: Pro každé dvě různé dvojice (x_1, y_1) a (x_2, y_2) platí, že existuje jedna a — až na trojice úměrné — ne více než jedna trojice (a, b, c) taková, že alespoň jedno z obou čísel a, b není nula a že jest

$$ax_1 + by_1 + c = 0,$$
$$ax_2 + by_2 + c = 0.$$

To však plyne bezprostředně z toho, že tyto dvě rovnice v neznámých a, b, c mají — až na trojice úměrné — jediné řešení

$$a = y_1 - y_2,\ b = x_2 - x_1,\ c = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

a ježto obě dvojice (x_1, y_1), (x_2, y_2) jsou různé, alespoň jedno z obou čísel $y_1 - y_2$, $x_2 - x_1$ není nula. Snadno se také zjistí, že ty vztahy mají vlastnost popsanou na př. axiomem

b) *Pro každé tři body, jimiž prochází táž přímka, platí, že jeden a ne více než jeden z nich jest mezi druhými dvěma;*

zjistí se to na základě fakta, že ze tří různých čísel právě jedno jest větší než menší z druhých dvou a menší než větší z nich. A že mají také vlastnost popsanou na př. axiomem

c) *Jestliže úsečka AB jest shodná s úsečkou A'B' i s úsečkou A''B'', pak úsečka A'B' jest shodná s úsečkou A''B''*

na základě fakta, že dvě čísla rovna třetímu jsou si rovna. A podobně pro ostatní axiomy. Pan Um našel takto další a to číselnou realisaci euklidovské geometrie. V této realisaci každému axiomu, každému logickému úsudku a každé větě abstraktní euklidovské geometrie odpovídá axiom, logický úsudek a věta s číselným obsahem. Euklidovská geometrie v této realisaci nazývá se *analytická* anebo podrobněji *euklidovská analytická geometrie.* Někdy také *Cartesiova geometrie*, podle slavného Descartesa, který první k ní položil základy ve své *Geometrii*, vyšlé r. 1637.

Význam analytické geometrie není snad v tom, že jest příkladem realisace, modelem, abstraktní euklidovské geometrie. Jest v tom, že se na tomto modelu mohou získati poznatky o vlastnostech vztahů mezi body a přímkami analysou *číselných* vztahů. Osvětleme tuto poznámku důkazem této věty abstraktní euklidovské geometrie:

Každá kružnice a přímka se protnou v nejvýše dvou bodech.

Pro každý bod (t. j. objekt první skupiny) O rozumí se kružnicí o středu v O množina všech takových bodů X, že všechny úsečky OX jsou shodné. Podrobně popsán, jest tedy obsah hořejší věty tento: Zvolím-li kterékoli dva (různé) body O, A a kteroukoli přímku (t. j. objekt druhé skupiny) p, pak množina — poznačme ji M_1 — všech takových bodů X, že úsečka OX jest shodná s úsečkou OA a množina — poznačme ji M_2 — všech bodů, jimiž prochází p, mají společné nejvýše dva body. — Platí-li tato věta, platí zvláště na modelu analytické geometrie; neplatí-li, neplatí ani na tomto. Stačí tedy, když vezmeme v úvahu tento model. Nuže, zvolme kterékoli dvě (různé) dvojice (x_0, y_0), (x_1, y_1) a kteroukoli trojici (a, b, c), v níž alespoň jedno z obou čísel a, b není nula. Podle definice vztahu „*shodný*“, jest kružnice o středu (x_0, y_0) a obsahující dvojici (x_1, y_1) množina M_1 všech takových dvojic (x, y), že obě čísla $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$ a $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ jsou stejná, takže platí pro x, y rovnice

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2, \tag{2}$$

při čemž jsme pro stručnost poznačili písmenem r druhé z těch dvou čísel. Množina M_2 jest podle definice vztahu „*prochází*“ množina všech takových dvojic (x, y), že pro obě čísla x, y platí rovnice

$$ax+by+c=0. \tag{3}$$

Máme ukázati, že existují nejvýše dvě dvojice (x, y) takové, že jsou současně i v M_1 i v M_2 t. j. že čísla x, y hoví současně i rovnici (2) i rovnici (3). Že tomu tak skutečně jest, plyne snadnou analysou obou rovnic (2), (3) na základě fakta, že každé rovnici druhého stupně o jedné neznámé hoví nejvýše dvě čísla.