Eduard Fuchs; Zuzana Voglová
Otakar Borůvka, grafové algoritmy a teorie matroidů

Rozpravy Národního technického muzea v Praze, sv. 200, Praha, 2006, 77-87

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/500417`

Otakar Borůvka, grafové algoritmy a teorie matroidů

Eduard Fuchs, Zuzana Voglová

Úvod

Vývoj každé vědecké disciplíny je pozoruhodným procesem. Řadu proudů, z nichž se tento proces skládá, lze alespoň s jistou dávkou pravděpodobnosti předvídat a mnohé tendence lze alespoň v hrubých rysech vytušit. Jsou však oblasti, kam ani ten nejpronikavější duch nedohlédne; bouřlivý rozvoj překvapivě nastane v oblasti, kde nebylo téměř žádných náznaků těchto trendů. Jedním z takových případů se budeme v tomto příspěvku zabývat.

Když na 2. světovém matematickém kongresu v Paříži v srpnu roku 1900 rekapituloval David Hilbert[1] ve své slavné přednášce o 23 problémech stav matematiky na sklonku 19. století, podal plastický a jasnozřivý obraz vývoje matematiky v nastupujícím století dvacátém. Drtivá většina jeho prognóz se téměř bezezbytku naplnila a ještě dnes, po více než sto letech, jsou mnohé jeho tehdejší úvahy pro současnou matematiku inspirativní.

Ani génius Hilbertova formátu však nepostihnul — a ani nemohl postihnout — jednu obsáhlou součást matematiky 20. století, nazývanou nejčastěji *diskrétní matematika.*

Prvotní impulzy, které posléze lidstvo přivedly k vybudování matematiky, byly bezpochyby dvojího druhu: *početní* a *geometrické.* Tyto impulzy také předznamenaly jeden z centrálních protikladů, které lze vypozorovat v celé dosavadní historii matematiky – vztah *diskrétního* a *spojitého.*

Typickými reprezentanty matematických objektů, které se nacházejí na straně diskrétního proudu, jsou *přirozená*, respektive *celá* čísla, *konečné množiny*, *konečné geometrie* apod., spojitý směr reprezentují objekty jako *množina všech reálných čísel*, *přímka*, *eukleidovská rovina*, *spojitá funkce* apod.

Jak již název napovídá, zabývá se diskrétní matematika první z výše uvedených stránek našich modelů reality.

Je svým způsobem paradoxní, že poté, co matematika na sklonku 19. století zvládla v Cantorově teorii množin problematiku matematického nekonečna, patří mezi matematické disciplíny, které se ve 20. století rozvíjely nejdynamičtěji, právě diskrétní matematika, jejíž značná část se zabývá studiem konečných množin.

Mezi centrální disciplíny moderní diskrétní matematiky patří především *kombinatorika* a *teorie grafů.* Na sklonku 19. století, v době Hilbertova vystoupení, samozřejmě kombinatorika patřila mezi standardní matematické partie. Její postavení v komplexu disciplín nazývaných souhrnně *matematika* však bylo víceméně nevýznamné. S jistou dávkou nadsázky lze říci, že to byla především podpůrná složka klasické teorie pravděpodobnosti. (Takové ostatně počátky kombinatoriky byly.) Nic přitom nenasvědčovalo tomu, že by v nejbližší budoucnosti mohla ve vývoji matematiky sehrávat významnější roli. A teorie grafů se jako vědní disciplína konstituovala teprve ve 20. století, jak se o tom podrobněji zmíníme později.

To, že zejména v poslední třetině 20. století prodělala diskrétní matematika přímo bouřlivý rozvoj, bylo způsobeno řadou faktorů. Mezi klíčové patřily následující:

- neustále se rozšiřující škála aplikací nejen v matematice samotné, především však mimo ni, a to nejen v „tradičních“ přírodovědných oblastech, ale zejména v nových a mnohdy nečekaných souvislostech;
- intenzívní rozvoj výpočetní techniky, která umožnila provádět výpočty a analýzy, které se ještě před několika desetiletími zdály nemožné a přesahující hranice lidských možností.

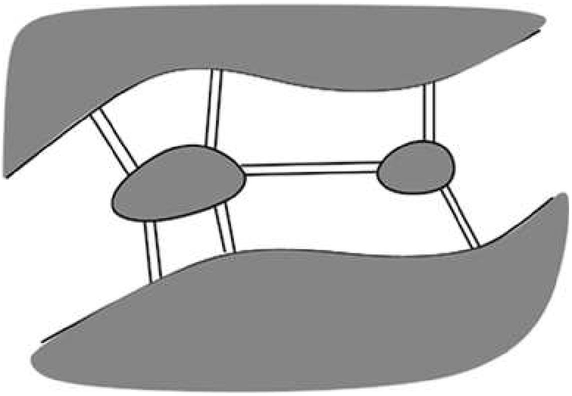
Není proto překvapující, že tyto faktory nebylo možno v roce 1900 předvídat.

Teorie grafů

Chceme-li stručně popsat vývoj teorie grafů, nelze se nezmínit o známé *úloze o sedmi mostech města Královce*, neboť v souvislosti s touto úlohou se v matematice pojem „graf“ objevil poprvé. Připomeňme si její znění.

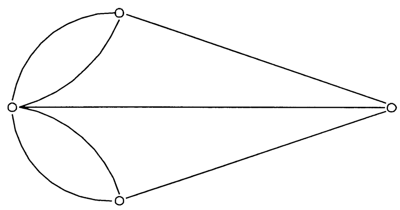
Městem Königsberg (česky Královec, dnešní Kaliningrad v Rusku) teče řeka Pregel. V této řece jsou dva ostrovy, které byly s pevninou a vzájemně propojeny sedmi mosty. Schéma této situace je na následujícím obrázku.

[1] David Hilbert (1862–1943), německý matematik.

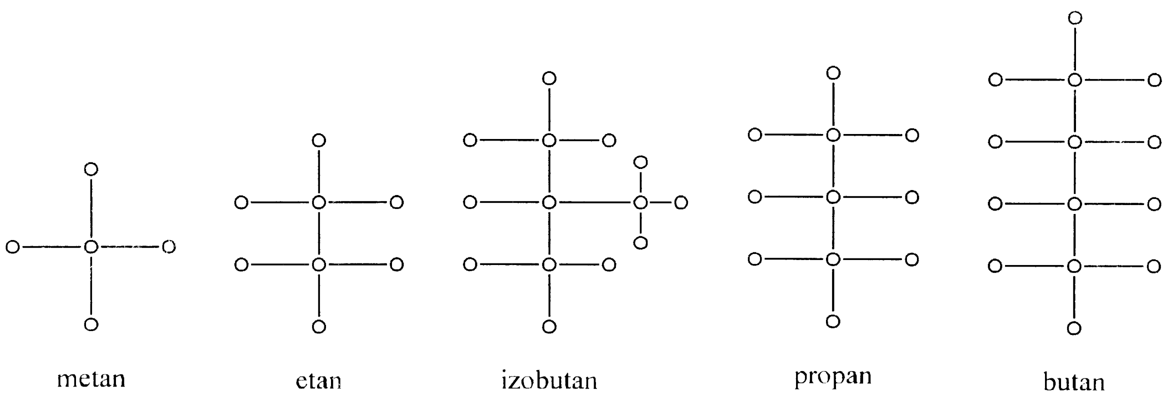


Úkolem je zjistit, zda je možné vyjít z jednoho místa, projít po každém mostě právě jednou a skončit procházku ve výchozím bodě.

Tuto úlohu řešil (a dokázal, že řešení neexistuje) v roce 1736 L. Euler[2]. Znázorníme-li si jednotlivé části města jako kroužky v rovině a mosty jako spojnice příslušných částí, je okamžitě zřejmé, že vyřešit uvedenou úlohu znamená, názorně řečeno, *namalovat jedním tahem* „graf“ na následujícím obrázku:



Po uvedeném Eulerově výsledku se více než 100 let „grafová“ problematika v matematice neobjevila. Až v polovině 19. století se A. Cayley[3] zabýval otázkou, kolik existuje izomerů uhlovodíku C_nH_{2n+2}. (Jak čtenář patrně ví, první tři členy uhlovodíkové řady, tj. metan, etan, propan, mají jediný izomer, čtvrtý člen již má izomery dva – butan a izobutan). Cayley udělal v podstatě tutéž abstrakci jako Euler. Když si znázornil jednotlivé atomy jako kroužky v rovině a spojil „hranou“ kroužky znázorňující ty atomy, mezi nimiž je chemická vazba, převedl „chemický“ problém na problém nalezení počtu „různých grafů“ předepsaného typu, jak je uvádíme na následujícím obrázku.



Kroužky, z nichž „vycházejí“ čtyři hrany, odpovídají atomům uhlíku, kroužky, z nichž vychází jediná hrana, odpovídají atomům vodíku.

2 Leonhard Euler (1707–1783), švýcarský matematik působící v Petrohradě a v Berlíně. Jeden z největších matematiků všech dob.

3 Arthur Cayley (1821–1895), anglický matematik.

Analogicky se přirozeným způsobem k pojmu „graf“ dostal G. Kirchhoff[4] ve svých pracích o elektrických obvodech.

V téže době, tj. zhruba v polovině 19. století, začíná historie jednoho z nejslavnějších problémů nejen teorie grafů, tzv. *problému čtyř barev*. Tento problém byl vyřešen až v roce 1973.

Za rok faktického zrodu teorie grafů bývá obvykle považován rok 1936, kdy vyšla první monografie o teorii grafů, kterou napsal D. König[5] [Kon36]. Jeho kniha *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* byla vpravdě průkopnická a po dlouhá desetiletí ve světě prakticky jediná.

Doslova bouřlivý rozvoj prodělává teorie grafů od druhé poloviny dvacátého století. Hlavní příčinou je nepředstavitelně široké využití této teorie v aplikacích. I čtenář bez hlubšího matematického vzdělání si jistě dovede představit řadu situací, které lze pomocí grafů popsat.

Grafem je například automapa ČR. Vrcholy jsou jednotlivé obce, hrany jsou příslušné silnice. Tento graf je navíc tzv. *ohodnocený* – jednotlivým hranám jsou připsána kladná čísla (vzdálenosti). Grafy jsou schéma zapojení barevného televizoru i plán vodovodní sítě města Brna. Pomocí grafů lze popsat výrobní procesy i vztahy mezi pracovníky v daném závodě, lze jimi charakterizovat strukturu programu pro počítač i rozpis sportovní soutěže atd. Za grafy lze rovněž považovat každou množinu, na níž je definována binární relace.

Grafové algoritmy

Mimořádně důležitou roli ve vývoji diskrétní matematiky hrají tzv. *grafové algoritmy*. Chceme-li například v konečném, ohodnoceném grafu najít „nejkratší cestu“ z jednoho vrcholu do druhého, mohlo by se zdát nejjednodušší všechny cesty vypsat (je jich přece pouze konečně mnoho), a pak mezi nimi vybrat tu nejkratší.

Nemožnost tohoto postupu vyplývá z toho, že již pro poměrně „malé“ grafy — jak zanedlouho ukážeme — je všech možností tak mnoho, že ani pomocí počítačů není uvedený postup realizovatelný. Analogickou se na první pohled zdá i úloha tradičně nazývaná *problém obchodního cestujícího*: Obchodní cestující má projít danou množinou měst a vrátit se tam, odkud vyšel. Náklady na jeho cestu přitom mají být co nejmenší. (Samozřejmě se předpokládá, že jsou známy náklady na cestu mezi každou dvojicí daných měst.) Je zřejmé, že tuto situaci lze popsat ohodnoceným grafem, v němž vrcholy jsou jednotlivá města, hranou spojíme města mezi nimiž je přímé dopravní spojení a každé hraně přiřadíme náklady spojené s cestováním mezi danými vrcholy.

Konečně uveďme ještě jeden velmi podobný příklad, jenž bude v dalším výkladu hrát centrální roli.

Máme vybudovat kabelovou síť mezi několika městy tak, aby každá dvě města byla propojena. Známe náklady na propojení každé dvojice měst a požadujeme, aby vybudování sítě bylo co nejlevnější.

Stejně jako v minulém případě jednotlivá města znázorníme jako uzly grafu, hrany tohoto grafu budou představovat kabelová spojení. Náklady na vybudování kabelové sítě mezi jednotlivými městy budou odpovídat ohodnocení hran. V terminologii teorie grafů nyní hledáme tzv. *minimální kostru* v daném grafu.

Na první pohled by se mohlo zdát, že je daná úloha triviální. Bude-li daných měst například deset, je počet koster v grafu na 10 uzlech jistě konečný. Probereme tedy všechny kostry a mezi nimi vybereme „minimální“. Skutečnost je však mnohem komplikovanější. Již v roce 1889 dokázal již zmíněný A. Cayley [Cay89], že počet koster v úplném grafu (což je graf, kdy je každý uzel propojen hranami se všemi ostatními) na n uzlech je roven číslu n^{n-2}. V našem případě tedy dostáváme 100 milionů různých koster. V případě 100 měst bychom již museli probrat 100^{98} koster, což přesahuje možnosti i těch nejvýkonnějších počítačů. I kdybychom měli počítač, který projde milión koster za sekundu, vyhledání všech koster by mu trvalo 10^{190} sekund. Vzhledem k tomu, že stáří našeho vesmíru je přibližně 10^{17} sekund, je zřejmé, že úlohy popsaného typu jsou neřešitelné bez vyvinutí vhodných algoritmů.

Mimořádnost algoritmu pro hledání minimální kostry nespočívá pouze v tom, že škála jeho aplikací zasahuje do řady oblastí. Jak uvidíme, spočívá jeho dominantní postavení mezi grafovými algoritmy v mnohem hlubším a závažnějším důvodu.

Algoritmů pro hledání optimálních řešení zadaných úloh na grafech nejrozmanitějších typů existují stovky. Jejich složitost a vhodnost pro řešení problémů lze hodnotit z nejrůznějších hledisek. Mimořádně důležitou roli hraje fakt, kolik operací je nutno provést k nalezení řešení podle daného algoritmu. To, že tato informace je mimořádně důležitá a pro řešení konkrétních problémů mnohdy fatální, je zřejmé

[4] Gustave-Robert Kirchhoff (1824–1887), německý fyzik a mechanik.

[5] Dénes König (1884–1944), maďarský matematik.

z následující tabulky, v níž demonstrujeme, jak dlouho by pracoval počítač provádějící milión operací za sekundu, kdyby při vložení n vstupních údajů bylo nutno provést $f(n)$ operací:

		n		
		10	100	1000
	25	25×10^{-6} s	25×10^{-6} s	25×10^{-6} s
	$\log_2 n$	$3,3 \times 10^{-6}$ s	$6,6 \times 10^{-6}$ s	$1,2 \times 10^{-6}$ s
	n	10^{-5} s	10^{-4} s	5×10^{-3} s
$f(n)$	$n \log_2 n$	$3,3 \times 10^{-5}$ s	$6,6 \times 10^{-6}$ s	$6,1 \times 10^{-2}$ s
	n^2	10^{-4} s	$0,01$ s	25 s
	$2n^2 + 5n$	$3,5 \times 10^{-4}$ s	$0,21$ s	50 s
	$n^3/100$	10^{-5} s	$0,01$ s	21 min
	2^n	10^{-3} s	4×10^{16} roků	$4,5 \times 10^{1491}$ roků

Povšimněme si například, že algoritmus vyžadující n^2 kroků by při 100 údajích potřeboval setinu sekundy, zatím co algoritmus s 2^n kroky by nezpracoval tytéž údaje ani za dobu trvání našeho vesmíru. Z tohoto hlediska jsou za „dobré“ považovány tzv. *polynomiální algoritmy*, což jsou algoritmy, u nichž lze potřebný počet operací omezit vhodným polynomem. (Jejich rychlost je vidět na prvních sedmi řádcích uvedené tabulky.)

Typickým příkladem polynomiálních algoritmů jsou právě algoritmy pro hledání minimální kostry. Existují však i problémy, pro něž nejen že není žádný polynomiální algoritmus znám, ale dokonce převládá přesvědčení, že pro ně ani žádný polynomiální algoritmus neexistuje. Typickým příkladem je již zmíněný problém obchodního cestujícího.

Nyní již můžeme také vysvětlit, v čem spočívá výjimečnost algoritmu pro hledání minimální kostry. Lze totiž dokázat, že v jistém slova smyslu lze všechny polynomiální grafové algoritmy odvodit z tzv. *hladového algoritmu*, což je jedna z verzí algoritmu pro minimální kostry a z algoritmu známého pod označením *lineární programování*.

Jedním z velkých výsledků české matematiky je skutečnost, že objevitelem prvního algoritmu pro nalezení minimální kostry byl v r. 1926 český matematik Otakar Borůvka.

Otakar Borůvka

O. Borůvka se narodil na sklonku 19. století, 10. 5. 1899, v malém jihomoravském městečku Uherském Ostrohu. Aby se vyhnul možnému odchodu na frontu, přerušil v době 1. světové války studium na gymnáziu a odešel studovat na Vyšší vojenskou reálku v Hranicích a poté na vojenskou technickou akademii do rakouského Mödlingu. Po skončení války se přihlásil ke studiu na brněnskou techniku.

Na jeho další životní dráhu měly v té době zásadní vliv dvě okolnosti. První z nich bylo to, že v r. 1919, po řadě let zápasů o zřízení druhé české univerzity, byla v Brně, druhém největším městě nově vzniklého Československa, založena univerzita, která byla pojmenována po prvním československém prezidentovi, T. G. Masarykovi. Druhou ze zmíněných okolností byl fakt, že prvním profesorem matematiky na Masarykově univerzitě byl jmenován Matyáš Lerch, který přivedl O. Borůvku k matematice a na něhož po celý život O. Borůvka vzpomínal s úctou a vděčností jako na svého prvního a „celoživotního“ učitele.

Matyáš Lerch (1860–1922) byl prvním českým matematikem světového jména. V r. 1900 získal Velkou cenu pařížské akademie za práci *Essais sur le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires aux coefficients entiers*. České poměry na sklonku 19. století svým způsobem charakterizuje skutečnost, že přes jeho mimořádné vědecké výsledky pro něho na českých vysokých školách nebylo místo, které získávali mnohem průměrnější adepti. A tak na přímluvu a doporučení svého dobrého přítele a příznivce Ch. Hermitea[6], se stal profesorem matematiky ve švýcarském Fribourgu. Na české školy se vrátil až v r. 1906, kdy byl jmenován profesorem na české technice v Brně. O. Borůvka si víceméně náhodou zapsal matematickou přednášku u Lercha, jemuž se většina studentů snažila vyhnout. Lerchovy přednášky totiž rozhodně pro svou náročnost nepatřily k těm oblíbeným.

[6] Charles Hermite (1822–1901), francouzský matematik.

O. Borůvka v r. 1981

Setkání profesora Lercha a mladého studenta Borůvky se pro Borůvku stalo osudové. Jak sám s oblibou říkával, stala se matematika jeho životním posláním proto, že ji neuměl. Začátky u Lercha rozhodně nebyly snadné. Borůvka se však s usilovností sobě vlastní začal matematice věnovat natolik, že když se Lerch stal profesorem na Masarykově univerzitě, nabídl svému studentovi, aby se stal jeho asistentem. A tak Borůvka, stále ještě posluchač techniky, začal na univerzitě mimořádně studovat a současně i pracovat jako Lerchův asistent.

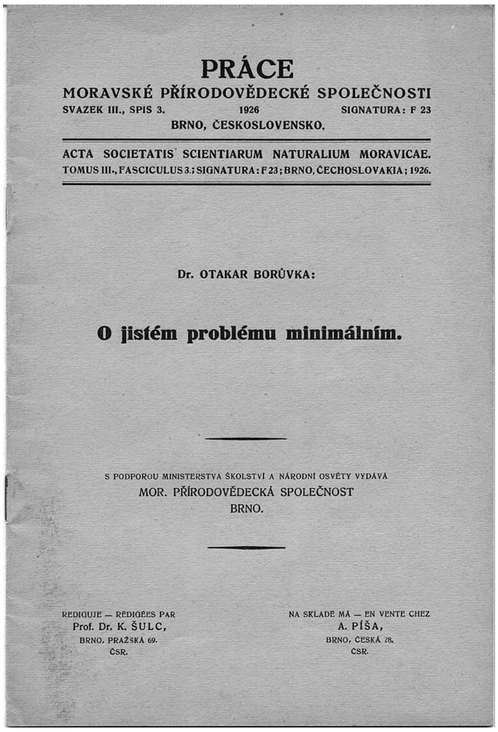
Na Masarykově univerzitě pak Borůvka působil 50 let. Zabýval se matematickou analýzou, diferenciální geometrií, v algebře vybudoval teorii rozkladů, po druhé světové válce založil moderní školu diferenciálních rovnic. Vychoval celé generace moravských a slovenských matematiků (po řadu let po 2. světové válce kromě plného úvazku v Brně bezplatně přednášel i na bratislavské univerzitě). Po ruské okupaci v r. 1968 byl po 50 letech práce z univerzity doslova vyhozen beze slova uznání natož díků. Dožil se však návratu demokracie do své vlasti a byť fyzicky ne zcela v pořádku, tak duševně naprosto svěží se dočkal i všestranného uznání za své celoživotní dílo, které se definitivně završilo 22. 7. 1995, kdy ve svých 96 letech v Brně zemřel.

Vraťme se však do zmíněného roku 1926. Tehdy se totiž udála zajímavá příhoda, která bezprostředně souvisí s jinou oblastí Borůvkova díla, s výsledkem, jímž navždy vstoupil do historie matematiky.

Jak to často bývá, v první chvíli si ani sám Borůvka zřejmě nebyl plně vědom mimořádné důležitosti tohoto výsledku. Na jeho genezi sám vzpomínal takto (viz [Bor96]): *Studium na školách technického směru mně velmi přiblížilo inženýrské vědy a způsobilo, že jsem měl pro technické a jiné aplikace matematiky vždycky plné porozumění. Brzy po skončení 1. světové války, na začátku 20. let, prováděly Západomoravské elektrárny v Brně elektrifikaci jižní Moravy. V rámci přátelských styků, které jsem měl s některými jejich pracovníky, jsem byl požádán, abych z hlediska matematického řešil otázku co nejúspornějšího provedení elektrovodní sítě. Podařilo se mně najít konstrukci ....*

Uvedený výsledek Borůvka uveřejnil v práci *O jistém problému minimálním* v r. 1926 ([Bor26]). V té době, jak víme, ještě teorie grafů neexistovala. V celé Borůvkově práci se ostatně pojem „graf“ ani jednou nevyskytuje. Fakticky však Borůvka objevil první a v jistém smyslu dodnes nejlepší algoritmus pro nalezení minimální kostry konečného souvislého grafu.

Jak tomu již bývá, byl tento výsledek v následujících desetiletích ještě několikrát znovu „objeven“, Borůvkova priorita je však naprosto nezpochybnitelná.


PRÁCE
MORAVSKÉ PŘÍRODOVĚDECKÉ SPOLEČNOSTI
SVAZEK III., SPIS 3. 1926 SIGNATURA: F 23
BRNO, ČESKOSLOVENSKO.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM MORAVICAE.
TOMUS III., FASCICULUS 3.; SIGNATURA: F 23; BRNO, ČECHOSLOVAKIA; 1926.

Dr. OTAKAR BORŮVKA:

O jistém problému minimálním.

S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY VYDÁVÁ
MOR. PŘÍRODOVĚDECKÁ SPOLEČNOST
BRNO.

REDIGUJE — RÉDIGÉES PAR
Prof. Dr. K. ŠULC,
BRNO, PRAŽSKÁ 69.
ČSR.

NA SKLADĚ MÁ — EN VENTE CHEZ
A. PÍŠA,
BRNO, ČESKÁ 28.
ČSR.

Ačkoliv je Borůvkova práce psána česky, řešení samotné bylo v závěru práce kompletně přeloženo do němčiny, takže bylo přístupné i zahraničním matematikům.

Historie algoritmů pro nalezení minimální kostry je natolik zajímavá a pro vývoj matematiky typická, že se o ní stručně zmíníme.

Historie algoritmů pro hledání minimální kostry

Algoritmů pro nalezení minimální kostry v konečném ohodnoceném grafu existují desítky. Většina z nich je však modifikací jedné ze tří základních variant, které stručně popíšeme.

Mnohé z těchto algoritmů, včetně Borůvkova, byly přitom „objeveny" několikrát a i v seriozní literatuře lze o jejich historii nalézt řadu nepřesností a zásadních omylů.

Většina prací popisujících vznik těchto algoritmů začíná u prací J. B. Kruskala ([Kru56] z roku 1956 a R. C. Prima ([Pri57] z roku 1957. U řady autorů lze přitom pochybovat, zda tyto práce vůbec měli v ruce, protože Kruskal i Prim Borůvku korektně citují. Především Kruskal však měl nepochybně zásluhu na tom, že problematika vešla ve všeobecnou známost a podstatně přispěl i k prvním počítačovým implementacím.

Všechny algoritmy mají jisté společné jádro. Začínají od izolovaných uzlů, tj. od grafu z daných uzlů, jenž na začátku neobsahuje žádné hrany. Tyto uzly pracovně označme jako „triviální fragmenty". V každém kroku se pak k již sestrojeným fragmentům připojí „vhodná" množina hran, čímž se fragmenty zvětšují. Algoritmus končí, když není možné žádný fragment zvětšit.

Algoritmus 1

Původní Borůvkův algoritmus z roku 1926 je nejstarší a historicky nejzajímavější. Mimořádně zajímavá je skutečnost, že ze všech známých algoritmů je dodnes nejrychlejší. (V zájmu spravedlnosti je však nutno dodat, že některé jiné algoritmy lze snáze popsat a pracují „průhledněji".)

Algoritmus lze stručně popsat následovně:

1. Spoj KAŽDÝ triviální fragment s nejbližším
2. Spoj KAŽDÝ takto vzniklý fragment s nejbližším.
3. Postup opakuj, dokud se všechny fragmenty nepropojí.

Jak jsme již uvedli, je Borůvkova priorita nezpochybnitelná. Kromě již zmíněné publikace z roku 1926 o něm navíc v roce 1927 přednášel v Paříži. V akademickém roce 1926–27, kdy se Borůvka zabýval především diferenciální geometrií, byl na studijním pobytu u E. Cartana[7]. V rámci tohoto pařížského pobytu Borůvka navštěvoval, kromě jiných, i seminář prof. Coolidge[8], který v té době v Paříži působil. Na jaře 1927 byl Borůvka Coolidgem vyzván, aby na semináři promluvil o svých výsledcích. Ačkoliv Borůvka víceméně samozřejmě předpokládal, že bude hovořit o svých výsledcích z diferenciální geometrie, nabídl v podstatě formálně Coolidgeovi výběr ze tří témat, z nichž jedno se týkalo onoho „minimálního problému“. K Borůvkovu nesmírnému překvapení si Coolidge právě ono téma pro seminář okamžitě vybral. A tak Borůvka na semináři referoval na tu dobu o věru netradiční problematice.

Poněkud pikantní je následující skutečnost: ačkoliv se uvedené přednášky zúčastnil i Elie Cartan[9], zřejmě na téma přednášky časem zapomněl, neboť v r. 1938 doporučil pro *Comptes Rendus* práci G. Choqueta [Cho38], v níž je Borůvkův algoritmus bez citace zopakován.

Jen pro dokreslení dodejme, že další „objev“ téhož algoritmu provedl v r. 1961 G. Sollin. Rukopis však nepublikoval, ačkoliv práce byla již dokonce citována v knize Berge – Ghoula-Houri: *Programming Games and Transportation Networks*, Wiley 1965.

Algoritmus 2

Autorem je již zmíněný J. B. Kruskal (1956). Popis algoritmu je následující:

1. Uspořádej hrany do posloupnosti tak, že $f(h_1) \leqq f(h_2) \leqq \ldots \leqq f(h_n)$.
2. Utvoř graf $(U, \emptyset)$.
3. Přidávej postupně ty hrany $h_1, h_2, \ldots, h_n$, které neuzavřou kružnici.

Nezávisle na Kruskalovi popsali tento algoritmus v r. 1957 H. Loberman a B. Weinberger, nejvhodnější strukturu dat pro implementaci popsali v r. 1972 J. E. Hopcroft a J. D. Ullman.

Algoritmus 3

Autorství je nejčastěji připisováno již zmiňovanému Primovi. Někdy je uváděno, že již před Primem tento algoritmus popsali Kruskal, H. Loberman a B. Weinberger. Skutečným autorem je však V. Jarník[10]. Ten dne 12. 2. 1929 napsal Borůvkovi dopis, v němž reagoval na původní Borůvkovu práci a navrhoval jednodušší popis algoritmu. Část tohoto dopisu byla o rok později uveřejněna ([Jar30]).

Algoritmus pracuje následovně:

1. Zvol libovolný uzel a spoj ho s nejbližším uzlem.
2. Vzniklý fragment spoj s nejbližším uzlem atd.

První počítačovou implementaci provedl E.W. Dijkstra (1959). Rychlost tohoto algoritmu později vylepšili v roce 1972 A. Kershenbaum a R. Van Slyke a posléze v roce 1975 D. E. Johnson.

Zatím jsme ovšem ponechali stranou jednu zásadní otázku. Při hledání algoritmu pro řešení nějakého typu problémů nejde samozřejmě jen o to, algoritmus nalézt. Stejně důležité a mnohdy mnohem obtížnější je provést důkaz, že popsaný algoritmus opravdu správně funguje.

Důkaz správnosti svého algoritmu popsal Borůvka v řeči teorie matic. V té době, tj. ve dvacátých a třicátých letech 20. století, se však již rodila zcela nová matematická teorie, která se stala v moderní diskrétní matematice mocným nástrojem – *teorie matroidů.* Impulsem k jejímu zrození byly právě některé společné rysy teorie grafů a teorie matic. Pomocí teorie matroidů lze relativně snadno správnost Borůvkova algoritmu dokázat. V žádném případě však není možné tvrdit, že by Borůvka patřil k zakladatelům teorie matroidů, byť se takové názory občas objevují.

Teorie matroidů

Teorie matroidů vznikla ve třicátých letech dvacátého století. V této době docházelo k rychlému rozvoji celé řady dalších matematických disciplín – již zmiňované teorie grafů, algebry, teorie svazů a dalších. Zejména algebra zaznamenala ve dvacátých a třicátých letech velké úspěchy. Ve dvacátých letech napsala

[7] Elie Joseph Cartan (1869–1951), francouzský matematik.

[8] Julian Lowell Coolidge (1873–1954), americký matematik.

[9] Osobní sdělení O. Borůvky spoluautorovi. Borůvka měl fenomenální paměť. A tak po více než 60 letech dovedl o všech svých zahraničních cestách vyprávět neuvěřitelné podrobnosti. Prakticky u všech svých zahraničních přednášek (a byly jich desítky) si pamatoval jejich významné účastníky včetně takových podrobností, kde jednotliví účastníci seděli a jak na problematiku reagovali.

[10] Vojtěch Jarník (1897–1970), český matematik.

E. Noetherová[11] dvě důležité práce o abstraktní algebře: *The theory of ideals in rings* (1921)a *Abstract construction of ideal theory in the domain of algebraic number fields* (1927) — [viz Noe83], které se staly základním kamenem pro další rozvoj tohoto oboru. Na ni potom navázal B. L. Van der Waerden[12] svým dílem *Moderne algebra* [Wae37], které je z velké části založeno právě na práci Noetherové. Jeho kniha zahájila novou etapu moderní abstraktní algebry a významně přispěla k rozvoji této části matematiky.

Ve třicátých letech se začala formovat také teorie svazů. První zmínky vztahující se ke svazům se objevily sice už v polovině 19. století u Boola, Pierce a Dedekinda, za otce teorie svazů je však považován až G. Birkhoff[13]. Spolutvůrcem české terminologie v této oblasti je Borůvka, který v roce 1939 poprvé použil český termín „svaz" pro anglické slovo „lattice".

Rozvoj všech těchto matematických disciplín připravil vhodné podmínky a inspiroval amerického matematika Hasslera Whitneyho k napsání článku *On the abstract properties of linear dependence*[Whi35], v němž se poprvé objevil pojem **matroid**. Popsal matroid jako abstraktní zobecnění lineární nezávislosti v maticích (jak napovídá i samotné slovo matroid), a tudíž i jazyk celé této teorie z velké části odpovídá terminologii lineární algebry. Při definici matroidu se Whitney pokusil zachytit společné základní vlastnosti lineární závislosti v grafech a maticích. Whitneyho článek má tři části. V první části zavádí pojem matroid a podává několik ekvivalentních definic tohoto pojmu. Ve druhé části se věnuje některým speciálním typům matroidů, tématem poslední části je vztah mezi matroidy a maticemi.

Matroidy zůstaly dlouhou dobu bez větší odezvy. Koncepci lineární závislosti sice použil van der Waerden ve své výše zmíněné knize [Wae37], další práce uveřejnili například Birkhoff [Bir35], MacLane[14] [MacL36], Dilworth[15] [Dil41] a Rado[16] [Rad42], teprve v padesátých letech, kdy publikoval své práce o matroidech a grafech Tutte[17] [Tut58], však zájem o teorii matroidů a její aplikace rapidně stoupl.

Hassler Whitney

Hassler Whitney se narodil v roce 1907 v New Yorku. V roce 1928 absolvoval na univerzitě v Yale. Na Harvardu v roce 1932 získal doktorát, disertaci *The Coloring of Graphs* napsal pod vedením G. D. Birkhoffa[18]. V letech 1930 až 1935 vyučoval na Harvardu matematiku, v letech 1931 až 1933 byl členem *Národní výzkumné rady.* V roce 1935 se stal odborným asistentem, v roce 1940 byl jmenován docentem. V roce 1946 se stal profesorem a na Harvardu zůstal až do roku 1952, kdy přijal nabídku od *Institutu pro pokročilá studia* v Princetonu. Od roku 1953 do roku 1956 byl předsedou matematického výboru *National Research Council.* Byl redaktorem časopisů *American Journal of Mathematics* a *Mathematical Reviews.* V roce 1976 získal Národní medaili za vědu, v roce 1983 byl oceněn Wolfovou cenou a o dva roky později dostal Steelovu cenu. V roce 1977 odešel do důchodu a roku 1989 zemřel ve Švýcarsku.

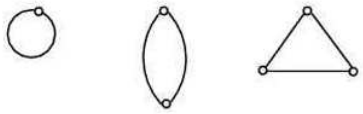
11 Emmy Noetherová (1882–1935), německá matematička.
12 Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996), nizozemský matematik.
13 Garrett Birkhoff (1911–1996), americký matematik.
14 Saunders Maclane (1909–2005), americký matematik.
15 Robert Palmer Dilworth (1914–1993), americký matematik.
16 Richard Rado (1906–1989), německý matematik maďarského původu.
17 William Thomas Tutte (1917–2002), anglicko-kanadský matematik.
18 George David Birkhoff (1884–1944), americký matematik, otec Garretta Birkhoffa.

Grafy a matice

Než ukážeme některé společné vlastnosti hran v grafech a sloupců v maticích, které vedly Whitneyho k zavedení matroidů, připomeňme si několik pojmů z teorie grafů.

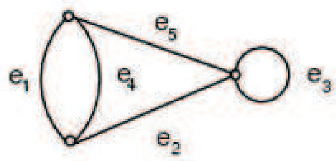
Grafem budeme nyní rozumět neorientovaný konečný graf, který může obsahovat násobné hrany i smyčky. *Smyčkou* rozumíme hranu vedoucí z uzlu do sebe samotného. Jsou-li v grafu dva uzly spojeny více než jednou hranou, mluvíme o tzv. *násobných hranách.*

Protože jsme povolili násobné hrany i smyčky, připouštíme i kružnice délek 1 a 2. Na následujícím obrázku jsou kružnice délek 1, 2 a 3.



Souvislý graf, který neobsahuje jako podgraf žádnou kružnici, se nazývá *strom.* K*ostrou grafu G* rozumíme takový souvislý podgraf grafu G, který obsahuje všechny uzly grafu G a neobsahuje jako podgraf žádnou kružnici.

Říkáme, že podgraf grafu je *nezávislý*, jestliže neobsahuje kružnici. Množina hran nezávislého podgrafu se nazývá *nezávislá.* Například množina I všech nezávislých množin grafu G z následujícího obrázku 2 je množina $\{\emptyset$, $\{e_1\}$, $\{e_2\}$, $\{e_4\}$, $\{e_5\}$, $\{e_1, e_2\}$, $\{e_1\, e_5\}$, $\{e_2, e_4\}$ $\{e_2, e_5\}$, $\{e_4, e_5\}$.



Nezávislé množiny hran každého grafu splňují následující tři vlastnosti:

(I1) $\emptyset \in I$

(I2) $X \in I,\, Y \subseteq X \Rightarrow Y \in I$

(I3) $U,\, V \in I, |U| < |V| \Rightarrow \exists\, e \in V - U$ takový, že $U \cup \{e\} \in I$.

Množiny vytvořené z hran grafu G, které nejsou nezávislé, nazýváme *závislé*; množinu všech závislých množin grafu G označíme D. Pro graf G je $D = \{\{e_3\}, \{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_2, e_3\}, \{e_3, e_4\}, \{e_3, e_5\}\} \cup \{X \subseteq E;\, |X| \geqq 3\}$.

Množinu minimálních (vzhledem k inkluzi) závislých množin označíme C. Jde o ty množiny hran, které vytvoří v grafu G kružnici a neobsahují žádnou hranu, která by do této kružnice nepatřila. Pro graf G je tedy $C = \{\{e_3\}, \}e_1, e_4\}, \{e_1, e_2, e_5\}, \{e_2, e_4, e_5\}\}$. Je zřejmé, že platí:

(C1) $\emptyset \notin C$,

(C2) $C_1,\, C_2 \in C,\ C_1 \subseteq C_2,\ C_1 = C_2$.

Dále platí:

(C3) $C_1,\, C_2 \in C,\ C_{\neq}C_2,\ e \in C_1 \cap C_2 \Rightarrow \exists\, C_3 \in C$ taková, že $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.

Maximálním nezávislým množinám říkáme *báze.* (Jsou to ty nezávislé množiny, k nimž už nelze přidat žádný prvek navíc, aby zůstaly nezávislé.) Podobné vlastnosti jako jsme popsali u hran grafu, můžeme najít i u sloupců v matici. Připomeňme si, že *maticí* rozumíme obdélníkovou či čtvercovou tabulku prvků nějaké množiny. Dále budeme mluvit pouze o maticích reálných čísel.

Systémy sloupců matice mohou být lineárně závislé nebo lineárně nezávislé. Pokud je některý sloupec lineární kombinací jiných sloupců, říkáme, že jsou tyto sloupce *lineárně závislé.* V opačném případě se nazývají *lineárně nezávislé.* Množina lineárně nezávislých sloupců matice se nazývá *nezávislá.*

Je-li dána matice, množinu všech jejích nezávislých množin označíme I. Snadno se lze přesvědčit, že pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

jejíž sloupce označíme c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, je $I = \{\emptyset, \{c_1\}, \{c_2\}, \{c_4\}, \{c_5\}, \{c_1, c_2\}, \{c_1, c_5\}, \{c_2, c_4\}, \{c_2, c_5\}, \{c_4, c_5\}\}$ a tato množina zřejmě splňuje vlastnosti (I1) - (I3). Ostatní množiny vytvořené ze sloupců matice A jsou závislé.

Těchto a dalších podobných vlastností si všiml pravděpodobně i Whitney, a proto se pokusil vytvořit nějakou obecnější matematickou strukturu, která by všechny tyto vlastnosti splňovala. Tuto novou strukturu nazval *matroidem.*

V již zmiňovaném článku popsal celou řadu vlastností, které matroidy splňují.

Základní pojmy a vlastnosti matroidů

Matroidem rozumíme uspořádanou dvojici (E, I), kde E je konečná množina a I je množina podmnožin množiny E splňující vlastnosti (I1)-(I3). Množinu E nazýváme *základní množinou* matroidu. Matroidy lze definovat několika různými, avšak ekvivalentními způsoby, z nichž mnohé byly popsány ve Whitneyho článku. K jejich definování lze kromě nezávislých množin použít také kružnice, báze, závislé množiny a další. Uvedené definici podle předchozího výkladu evidentně vyhovují nezávislé množiny v grafu i v matici.

Pořádkovou funkcí matroidu (E, I) nazýváme zobrazení $r: P(E) \rightarrow Z$ definované takto: $r(A) = \max\{|X|;\ X \in I, X \subseteq A$ (kde $P(E)$ značí systém všech podmnožin množiny E). *Řádem matroidu* (E, I) nazýváme číslo $r(E)$. Podmnožina $A \subseteq E$ se nazývá *uzavřená,* respektive *podprostor* či *flat* matroidu M, když pro všechny prvky $x \in E - A$ platí $r(A \cup \{x\}) = r(A) + 1$. (Jinak řečeno, k A nelze přidat žádný prvek bez zvětšení řádu.)

Matroidy, jejichž řád je nejvýše roven třem, mají velmi užitečnou geometrickou reprezentaci v rovině. Mluvíme o tzv. *eukleidovské reprezentaci v rovině.* Mějme matroid M třetího řádu, jehož základní množina má n prvků. Těchto n prvků znázorníme jako body v rovině a křivkou spojíme body každé uzavřené množiny A, pro níž platí $|A| \geqq 3,\ r(A) = 2$. Potom bázi matroidu M tvoří všechny tříprvkové podmnožiny základní množiny, které nejsou v diagramu spojeny křivkou. Je jednoduché se přesvědčit, že každý diagram v rovině, skládající se z bodů a křivek takových, že každá dvojice křivek se protíná v nejvýše jednom bodě, reprezentuje matroid, jehož báze jsou tříprvkové podmnožiny bodů, které nejsou v diagramu spojeny křivkou.

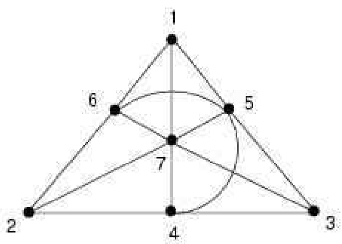
Příklady matroidů

Matroid tedy můžeme vytvořit z grafu (resp. matice) následovně. Základní množinu matroidu tvoří všechny hrany daného grafu (resp. sloupce dané matice). Množinu I potom tvoří nezávislé množiny grafu (resp. množina lineárně nezávislých sloupců matice). Matroid, který získáme výše popsaným způsobem z matice A značíme $M[A]$ a nazýváme jej *vektorový matroid.* Matroid získaný z grafu G nazýváme *cyklický* a značíme jej $M(G)$.

Matice A a graf G uvedené dříve byly voleny tak, aby matroidy z nich vytvořené byly izomorfní (matroidy M a N jsou izomorfní, jestliže mezi základními množinami matroidů existuje taková bijekce ϕ, že $\forall X \subseteq E(M) : \phi X)$ je nezávislá v $N \Leftrightarrow X$ je nezávislá v M). Matroid, který je izomorfní s cyklickým matroidem, se nazývá *grafový.* Tak například matroid $M[A]$, který jsme získali z matice A, je grafový.

Dalším typem matroidu je *uniformní* matroid $U_{k,n}$ řádu k. Základní množina E uniformního matroidu $U_{k,n}$ má n prvků, množina nezávislých množin je $I = \{X \in P(E),\ |X| \leqq k\}$. Báze uniformního matroidu řádu k jsou všechny k-prvkové podmnožiny základní množiny, kružnice jsou všechny $(k+1)$-prvkové podmnožiny základní množiny. Platí: $r(A) = |A|$ pro $|A| \leqq k, r(A) = k$ pro $|A| \geqq k$.

Matroid, v němž je každá podmnožina základní množiny nezávislá, se nazývá *volný.* Jedná se vlastně o speciální případ uniformního matroidu, v němž $k = n$.



Zajímavým typem matroidu je tzv. *Fanův*[19] *matroid*(viz hořejší obrázek). Jedná se o matroid, jehož základní množina je tvořena prvky $x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_7$, báze tohoto matroidu jsou všechny tříprvkové podmnožiny základní množiny, kromě množin $\{x_1,\ x_2,\ x_6\}$, $\{x_1,\ x_4, x_7\}$, $\{x_1,\ x_3,\ x_5\}$, $\{x_2,\ x_3,\ x_4\}$, $\{x_2,\ x_5,\ x_7\}$,

[19] Gino Fano (1871–1952), italský matematik.

$\{x_3, x_6, x_7\}$, $\{x_4, x_5, x_6\}$. Jde vlastně o projektivní rovinu 2. řádu. Znázornění Fanova matroidu v eukleidovské reprezentaci je na obrázku.

Teorie matroidů se stala jednou z nejrychleji se rozvíjejících částí diskrétní matematiky a nachází uplatnění v celé řadě matematických disciplín. Podrobnější popis vývoje teorie matroidů lze nalézt například v knize [Kun86].

Literatura

[Bir35] Birkhoff, G.: *Abstract linear dependence and lattices.* American Journal of Mathematics **57** 1935), 800-801.

[Bor26] Borůvka, O.: *O jistém problému minimálním.* Práce Moravské přírodovědecké společnosti **3** (1926), 37-58.

[Bor77] Borůvka, O.: *Několik vzpomínek na matematický život v Brně.* Pokroky matematiky,fyziky a astronomie **22** (1977), 91–99.

[Bor96] *Otakar Borůvka.* Universitas Masarykiana, Brno 1996.

[Cay89] Cayley, A.: *A theorem on trees.* Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics **23** (1889), 376–378.

[Dil41] Dilworth, R. P.: *Ideals in Birkhoff lattices.* Trans. Amer. Math. Soc. **49** (1941), 325–353.

[Dil41b] Dilworth, R. P.: *Arithmetic theory of Birkhoff lattices.* Duke Math. J. **8** (1941), 286–299.

[Dil44] Dilworth, R. P.: *Dependence relations in semimodular lattice.* Duke Math. J. **11** (1944), 575– 587.

[Cho38] Choquet, G.: *Etude de certains réseaux de routes.* Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris **206** (1938), 310–311.

[Jar30] Jarník, V.: *O jistém problému minimálním.* (Z dopisu panu O. Borůvkovi.), Práce Moravské Přírodovědecké společnosti **6** (1930), 57–63.

[Kon36] König, D.: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen.* Leipzig 1936.

[Kru56] Kruskal, J. B.: *On the shortest spanning tree of a graph.* Proc. AMS **7** (1956), 48–50.

[Kun86] Kung, J. P. S.: *A SourceBook in Matroid Theory.* Boston, Birkhäuser 1986.

[MacL36] MacLane, S.: *Some interpretations of abstract linear dependence in terms of projective geometry.* American Journal of Mathematics **58** (1936), 236–240.

[Noe83] Noether, E.: *Gesammelte Abhandlungen – Collected Papers.* Ed. N. Jacobson, Springer 1983.

[Oxl92] Oxley, J.: *Matroid Theory.* New York, Oxford University Press Inc., New York, 1992.

[Pri57] Prim, R. C.: *Shortest connection networks and some generalizations.* Bell Syst. Tech. J. **36** (1957), 1389–1401.

[Rad42] Rado R.: *A theorem on independence relations.* Quart. J. Math. **13** (1942), 83–89.

[Rad49] Rado R.: *Axiomatic treatment of rank in infinite sets.* Canad. J. Math. **1** (1949), 337–343.

[Tut59] Tutte, W. T.: *Matroids and graphs.* Trans. Amer. Math. Soc. **90** (1959), 527–552.

[Tut58] Tutte, W. T.: *A homotopy theory for matroids I, II.* Trans. Amer. Math. Soc. **88** (1958), 144–174.

[Wae37] van der Waerden, B. L.: *Moderne Algebra.* Vol. 1., Berlin, Springer-Verlag, 1937.

[Wel95] Welsh, D. J. A.: *Handbook of Combinatorics.* Massachusetts, The MIT Press Cambridge, 1995.

[Whi35] Whitney, H.: *On the abstract properties of linear dependence.* American Journal of Mathematics **57** (1935), 509–533.

Doc. RNDr. Eduard Fuchs, CSc.
Katedra matematiky
PřF MU
Janáčkovo nám. 2a
602 00
e-mail: fuchs@math.muni.cz

Mgr. Zuzana Voglová
Katedra matematiky
PřF MU
Janáčkovo nám. 2a
Brno 602 00 Brno
e-mail: zuzana.voglova@foxis.cz