Vojtěch Jarník

O mřížových bodech ve vícerozměrných elipsoidech

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., XXXVII (1928), No. 27, 19 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500450

ROZPRAVY II. TŘÍDY ČESKÉ AKADEMIE.
ROČNÍK XXXVII. ČÍSLO 27.

O mřížových bodech ve vícerozměrných elipsoidech.

Napsal

Vojtěch Jarník.

Předloženo dne 23. března 1928.

§ 1. Úvod.

Budiž $r \geqq 2$ celé číslo, $Q(u) = \sum\limits_{\mu,\nu=1}^{r} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu$ budiž positivně definitní kvadratická forma o determinantu D. Pro $x > 0$ položme $A_Q(x)$ rovno počtu mřížových bodů (t. j. bodů s celočíselnými souřadnicemi) v elipsoidu $Q(u) \leqq x$; $J_Q(x) = \dfrac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}$ budiž obsah tohoto elipsoidu. Roste-li x do nekonečna, je patrně $\lim\limits_{x=\infty} (A_Q(x) : J_Q(x)) = 1$. Vystupuje nyní otázka, s jakou rychlostí konverguje podíl $A_Q(x) : J_Q(x)$ k jedné; jinými slovy: položme

$$A_Q(x) - J_Q(x) = P_Q(x);$$

jest vyšetřiti, jakého „řádu" jest funkce $P_Q(x)$ při rostoucím x.

E. Landau[1]) ukázal: Jest

$$(1) \qquad P_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-\frac{r}{r+1}}\right), \quad P_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r-1}{4}}\right).$$

Pro $r = 2, 3$ je známo ještě poněkud více; definitivních výsledků však pro $r = 2, 3$ dosud dosaženo nebylo. Jinak jest tomu pro $r \geqq 4$. A. Walfisz a E. Landau[2]) dokázali: jsou-li $a_{\mu\nu}$ *racionální* čísla, jest

$$(2) \qquad P_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right) \text{ pro } r > 4, \; P_Q(x) = O(x \log^2 x) \text{ pro } r = 4.$$

[1]) Srovnej na př. Landau **(1)**, **(6)**; dále van der Corput **(1)**, Landau **(2)**, **(3)**, **(4)**, **(5)**, Szegö **(1)**. Odkazy se vztahují k seznamu literatury na konci tohoto paragrafu.

Naopak platí v tomto případě (racionální $a_{\mu\nu}$)[3])

$$P_Q(x) = \Omega(x^{\frac{r}{2}-1}). \tag{3}$$

Pro $r \geq 5$ máme tedy v tomto případě přesný řád funkce $P_Q(x)$; pro $r = 4$ zbývá sice ještě jakási neurčitost (mezi x a $x \log^2 x$), ale pouze logaritmického řádu. Ježto záleží pouze na poměrech koeficientu $a_{\mu\nu}$, platí tyto výsledky patrně poněkud obecněji vždy, když $a_{\mu\nu}$ jsou vesměs celistvé násobky téhož čísla.

Jaký je řád funkce $P_Q(x)$ v jiných případech? Mezi horním a dolním odhadem v (1) jest zde značná mezera; platí zde snad rovněž (2), (3), aspoň pro dosti velká r? Tento problém vyšetřoval A. Walfisz a dospěl k těmto výsledkům:[4])

Uvažujme formy $Q(u)$ specielního tvaru

$$Q(u) = \sum_{\mu,\nu=1}^{r-1} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu + \alpha u_r^2, \quad (a_{\mu\nu} \text{ racionální}, \alpha > 0 \text{ iracionální}, r \geq 10).$$

Pro tyto formy platí:

A) $P_Q(x) = o(x^{\frac{r}{2}-1})$;

t. j. (3) zde neplatí.

B) Tento odhad nedá se zlepšiti; t. j. jsou-li $a_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, \ldots, r-1$) dána a je-li $\varphi(x)$ kladná funkce, pro kterou $\varphi(x) = o(x^{\frac{r}{2}-1})$, lze nalézti iracionální číslo $\alpha > 0$ tak, že $P_Q(x) = \Omega(\varphi(x))$.

C) Abstrahujeme-li však od množství čísel α míry nulové, lze odhad sub A) dále zlepšiti:[5]) pro skoro všechna $\alpha > 0$ jest

$$P_Q(x) = O(x^{\frac{r}{2}-\frac{6}{5}} \log^{\frac{1}{4}} x).$$

Ve dvou pojednáních[6]) zabýval jsem se, pomocí jiné metody než Walfisz, systematicky studiem forem tvaru

$$Q(u) = \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \ldots + \alpha_r u_r^2 \quad (r \geq 4, \alpha_j > 0) \tag{4}$$

a dosáhl těchto výsledků:

1. Pro $r = 4$ je $P_Q(x) = O(x \log^2 x)$.
2. Pro $r = 5$ je $P_Q(x) = O(x^{\frac{3}{2}} \log x)$.
3. Je-li $r \geq 6$ a je li aspoň jedno z čísel $\frac{\alpha_j}{\alpha_1}$ ($j = 2, 3, \ldots, r$) ira-

[3]) Walfisz **(1)**, Landau **(7)**; dále viz Landau **(8)**, Petersson **(1)**, Walfisz **(5)**; pro případ $r = 4$ zvláště Landau **(3)**, Kloostermann **(1)**, Walfisz **(4)**.

[3]) Jarník v práci Landau **(8)**: dále Müntz **(1)**, **(2)**, Petersson **(1)**, Walfisz **(2)**, Jarník **(1)**, **(2)**.

[4]) Walfisz **(3)**.

[5]) „Míra" značí stále Lebesguovu míru; „skoro všechna $\alpha > 0$" značí: všechna $\alpha > 0$, vyjma nejvýše jisté množství čísel α míry nulové.

[6]) Jarník **(3)**, **(4)**.

cionální, je $P_Q(x) = o(x^{\frac{r}{2}-1})$ (a tento odhad nedá se zlepšiti). (Případ racionálních α_j je rozřešen vzorci (2), (3).)

4. Pro skoro všechny systémy kladných čísel $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ je

$P_Q(x) = O(x^{\frac{r}{4}+\varepsilon})$ pro každé $\varepsilon > 0$.

Výsledek sub 3. je tedy definitivní; ostatní výsledky však nikoliv.

První problém, který se nyní naskytá, jest tento: uvažujme určitou formu $Q(u)$; k ní přísluší určité číslo $\mu = \mu(Q)$, definované jakožto dolní hranice oněch čísel a, pro něž $P_Q(x) = O(x^a)$; je tedy $P_Q(x) = O(x^{\mu+\varepsilon})$, $P_Q(x) = \Omega(x^{\mu-\varepsilon})$ pro každé $\varepsilon > 0$.

Jest určiti toto číslo $\mu = \mu(Q)$.

K řešení tohoto problému podal jsem tento příspěvek:[7])

Budiž $\sigma \geq 2$, $r_j \geq 4$ $(j = 1, 2, \dots, \sigma)$; σ, r_j celá čísla, $r = r_1 + r_2 + \dots + r_\sigma$. Uvažujme všechny formy

$$(5)\qquad Q(u) = \beta_1(u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2 + \dots + u_{r_1,1}^2) + \beta_2(u_{1,2}^2 + \dots + u_{r_2,2}^2) + \dots + \beta_\sigma(u_{1,\sigma}^2 + \dots + u_{r_\sigma,\sigma}^2) \quad (\beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \dots, \beta_\sigma > 0)$$

Potom platí:

5. $P_Q(x) = \Omega(x^{\frac{r}{2}-\sigma})$.

6. Pro skoro všechny systémy kladných čísel $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\sigma$ jest

$P_Q(x) = \Omega(x^{\frac{r}{2}-\sigma} \log^{\frac{\sigma-1}{\sigma+1}} x)$.

7. Pro skoro všechny systémy kladných čísel $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\sigma$ jest

$P_Q(x) = O(x^{\frac{r}{2}-\sigma+\varepsilon})$ pro každé $\varepsilon > 0$.

Tedy specielně: pro „skoro všechny" takové formy Q jest $\mu(Q) = \frac{r}{2} - \sigma$.

Naskytá se ovšem ještě další otázka: u forem tvaru (5) (při $r_j \geq 4$) určili jsme $\mu(Q)$ pro všechny systémy kladných čísel $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\sigma$ vyjma jisté množství míry nulové. Jaké jest $\mu(Q)$ pro ony zanedbané systémy, tvořící množství míry nulové? Závisí snad μ nějakým jednoduchým způsobem na aritmetických vlastnostech čísel $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\sigma$? O této otázce pojednávám na jiném místě.[8])

V této práci chci dokázati tyto dvě věty:

Věta 1. Budiž $r \geq 4$ celé číslo; $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \dots, \alpha_r > 0$; $Q(u) = \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \dots + \alpha_r u_r^2$.

Potom jest

$$P_Q(x) = O(x^{\frac{r}{2}-1}) \text{ pro } r > 4$$
$$P_Q(x) = O(x \log^2 x) \text{ pro } r = 4.$$

[7]) Jarník **(3)**.
[8]) Jarník **(5)**.

Tato věta je pro $r \geqq 6$ obsažena v tvrzení 3, pro $r = 4$ v tvrzení 1. Pro $r = 5$ je výsledek nový.

Věta 2. Budiž $\sigma > 2$, $r_j > 0$ ($j = 1, 2, \ldots, \sigma$); σ, r_j celá čísla, $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma$, $\lambda = \sum_{j=1}^{\sigma} \mathrm{Min}\left(\frac{r_j}{4}, 1\right)$. Uvažujme všechny formy

$$Q(u) = \beta_1 (u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2 + \ldots + u_{r_1,1}^2) + \beta_2 (u_{1,2}^2 + \ldots + u_{r_2,2}^2) + \ldots + \beta_\sigma (u_{1,\sigma}^2 + \ldots u_{r_\sigma,\sigma}^2) \quad (\beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \ldots, \beta_\sigma > 0)$$

Pro skoro všechny systémy kladných čísel $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma$[9]*) jest*

$$P_Q(x) = O(x^{\frac{r}{2} - \lambda + \varepsilon}) \tag{6}$$

pro každé $x > 0$.

Tato věta obsahuje pro $r_j \geqq 4$ ($j = 1, 2, \ldots, \sigma$) tvrzení 7, pro $r_1 = r_2 = \ldots = r_\sigma = 1$ tvrzení 4.

Při důkazu tvrzení 1, 2, 4, 7 v práci Jarník **(3)** vycházel jsem při formách (4) z formule

$$A_Q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{x} - i\infty}^{\frac{1}{x} + i\infty} \Theta(\alpha_1 s)\, \Theta(\alpha_2 s) \ldots \Theta(\alpha_r s)\, e^{xs} \frac{ds}{s} \tag{7}$$

($\Theta(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 s}$), platné pro ona $x > 0$, jež se nedají vyjádřiti ve tvaru $x = \sum_{j=1}^{r} m_j^2 \alpha_j$ (m_j celá čísla). Tato metoda pracuje s relativně konvergentními integrály, což působí jisté potíže a vnáší mimo to do odhadů vždy přebytečný logaritmický faktor.[10])

V práci Jarník **(4)** použil jsem proto místo formule (17) integrovaného vzorce

$$\int_x^{x+z} A_Q(y)\, dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{x} - i\infty}^{\frac{1}{x} + i\infty} \Theta(\alpha_1 s) \ldots \Theta(\alpha_r s)\, e^{xs} (e^{zs} - 1) \frac{ds}{s^2};$$

tím dosáhne se absolutní konvergence použitých integrálů a odstraní se přebytečný logaritmický faktor při odhadech. Touto modifikací byl umožněn teprve důkaz tvrzení 3.

[9]) T. j. obšírněji: V σ-rozměrném euklidovském prostoru bodů o pravoúhlých souřadnicích $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma$ existuje množství N míry nulové tak, že pro každý bod $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$, neležící v N, pro který $\beta_1 > 0, \ldots, \beta_\sigma > 0$, platí (6) pro každé $\varepsilon > 0$.

[10]) Na př. místo 3. mohl jsem v oné práci pro $r \geqq 6$ dokázati pouze $P_Q(x) = O(x^{\frac{r}{2} - 1} \log x)$.

V této práci používám rovněž této modifikované metody; větu 1. by pomocí první metody vůbec nebylo možno dokázati, důkaz věty 2. pak probíhá při použití druhé metody jednodušeji než pomocí formule (7).

Poslední paragraf této práce obsahuje několik elementárních poznámek.

Literatura.

J. G. van der Corput:

(1) Over definiete kwadratische vormen, Niew Archief voor Wiskunde 13 (1919), str. 125—140.

V. Jarník:

(1) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Mathematische Zeitschrift 27 (1927), str. 154—160.

(2) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden; zweite Mitteilung, Mathematische Zeitschrift (v tisku).

(3) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Mathematische Annalen (v tisku).

(4) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden; zweite Abhandlung, Mathematische Annalen (v tisku).

(5) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Japanese Journal of Mathematics (v tisku).

H. D. Kloosterman:

(1) Über Gitterpunkte in vierdimensionalen Ellipsoiden, Mathematische Zeitschrift 24 (1925), str. 519—529.

E. Landau:

(1) Zur analytischen Zahlentheorie der definiten quadratischen Formen (Über die Gitterpunkte in einem mehrdimensionalen Ellipsoid), Berliner Akademieberichte 1915, str. 458—476.

(2) Über eine Aufgabe aus der Theorie der quadratischen Formen, Wiener Sitzungsberichte, Abt. IIa, 124 (1915), str. 445—468.

(3) Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen, Göttinger Nachrichten 1912, str. 687—771.

(4) Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen; zweite Abhandlung, Göttinger Nachrichten 1915, str. 209—243.

(5) Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen; dritte Abhandlung, Göttinger Nachrichten 1917, str. 96—101.

(6) Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen; vierte Abhandlung, Göttinger Nachrichten 1924, str. 137—150.

(7) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Mathematische Zeitschrift 21 (1924), str. 126—132.

(8) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, zweite Abhandlung, Mathematische Zeitschrift 24 (1925), str. 299—310.

Ch. H. Müntz:

(1) Über den Gebrauch willkürlicher Funktionen in der analytischen Zahlentheorie. I. Das Ellipsoidgitter in n Dimensionen, Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 24 (2) (1925), str. 81—93.

(2) Zur Gittertheorie n-dimensionaler Ellipsoide, Mathematische Zeitschrift 25 (1926), str. 150—165.

H. Petersson:

(1) Über die Anzahl der Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 5 (1926), str. 116—150.

G. Szegö:
(1) Beiträge zur Theorie der Laguerreschen Polynome. II.: Zahlentheoretische Anwendungen, Mathematische Zeitschrift 25 (1926), str. 388—404.
A. Walfisz:
(1) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Mathematische Zeitschrift 19 (1924), str. 300—307.
(2) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden; zweite Abhandlung, Mathematische Zeitschrift 26 (1927), str. 106—124.
(3) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden; dritte Abhandlung, Mathematische Zeitschrift 27 (1927), str. 245—268.
(4) Teilerprobleme, Mathematische Zeitschrift 26 (1927), str. 66—88.
(5) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln, Mathematische Zeitschrift 27 (1927), str. 469—480.

§ 2. Počátek důkazu věty 1. a 2.

Budiž $r \geqq 4$ celé číslo; $Q(u) = \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \ldots + \alpha_r u_r^2$ ($\alpha_j > 0$ pro $1 \leqq j \leqq r$). Pro $x > 0$ položme $A_Q(x)$ rovno počtu mřížových bodů v elipsoidu $\alpha_1 u_1^2 + \ldots + \alpha_r u_r^2 \leqq x$; jeho obsah jest

$$J_Q(x) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}\, \Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)};$$

položme ještě

$$A_Q(x) = J_Q(x) + P_Q(x).$$

Budiž

$$\Theta(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 s} \text{ pro } \Re(s) > 0.$$

Dirichletova řada

$$\Theta(\alpha_1 s)\, \Theta(\alpha_2 s) \ldots \Theta(\alpha_r s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \quad (0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots)$$

je pro $\Re(s) > 0$ absolutně konvergentní a pro $x > 0$ jest

$$\sum_{\lambda_n \leqq x} a_n = A_Q(x);$$

tedy

$$\int_0^x A_Q(y)\, dy = \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n (x - \lambda_n).$$

Použijeme-li známé formule

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{Ts}}{s^2}\, ds = Max\ (0, T) \quad (a > 0, T \text{ reálné}),$$

obdržíme pro $x > 0$, $a > 0$

$$\int_0^x A_Q(y)\,dy = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} e^{xs}\frac{ds}{s^2},$$

neboť integrand v pravo lze patrně integrovati člen po členu.

Budiž $z = z(x)$ funkce proměnné x, definovaná pro $x > 1$ a hovící nerovnosti $0 < z(x) < 1$. Potom jest tedy pro $x > 1$

$$(8)\qquad \int_x^{x\pm z} A_Q(y)\,dy = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \Theta(\alpha_1 s)\ldots\Theta(\alpha_r s)\, e^{xs}(e^{\pm zs}-1)\frac{ds}{s^2}.$$

Vyšetřování tohoto integrálu bude naším hlavním úkolem. Položme $A = \underset{1 \leq j \leq r}{Max}\frac{2\pi}{\alpha_j}$ a vyšetřujme především integrál

$$(9)\qquad J_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{x}-i\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\frac{A}{\sqrt{x}}} \Theta(\alpha_1 s)\ldots\Theta(\alpha_r s)\, e^{xs}(e^{\pm zs}-1)\frac{ds}{s^2}.$$

Podle známé transformační formule jest[11])

$$\Theta(\alpha_j s) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_j s}}\,(1+\Psi_j(s)),\ \text{kde}\ \Psi_j(s) = 2\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2\frac{\pi^2}{\alpha_j s}}.$$

Položme $s = \frac{1}{x} + t i$; potom jest

$$\Re\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{x}{1+x^2t^2} > c\ \text{pro}\ x > c,\ |t| \leq \frac{A}{\sqrt{x}}.$$

Tedy

$$|\Psi_j(s)| \leq 2e^{-\frac{\pi^2 x}{\alpha_j(1+x^2t^2)}}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 c}{\alpha_j}(m^2-1)} < c\,e^{-\frac{cx}{1+x^2t^2}}.$$

Pro $x > c$ je tedy

$$J_1(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}}\int_{-\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\frac{A}{\sqrt{x}}}\frac{e^{x\left(\frac{1}{x}+it\right)}}{\left(\frac{1}{x}+it\right)^{\frac{r}{2}+2}}\left(e^{\pm z\left(\frac{1}{x}+it\right)}-1\right)\left(1 + \mu c\, e^{-\frac{cx}{1+x^2t^2}}\right)dt.$$

Poznamenejme jednou pro vždy: pro $x > c$ jest především

[11]) Všechny odmocniny jest bráti s kladnou reálnou částí. c značí kladná čísla, závislá pouze na formě $Q(u)$; μ značí funkce libovolných proměnných, jejichž absolutní hodnota nepřesahuje 1. Různá c a μ nerozlišuji indexy.

$$
(10) \qquad \left| e^{\pm z\left(\frac{1}{x}+it\right)} - 1 \right| = \left| e^{\pm \frac{z}{x}} (\cos zt \pm i \sin zt) - 1 \right| =
$$
$$
= \left| \left(1 + \mu c \frac{z}{x}\right)(1 + \mu c z t) - 1 \right| = \mu c \frac{z}{x} + \mu c z t;
$$

za druhé

$$
(11) \qquad \left| e^{\pm z\left(\frac{1}{x}+it\right)} - 1 \right| = \mu c.
$$

Platí pak

$$
\int_{-\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\frac{A}{\sqrt{x}}} \frac{e^{x\left(\frac{1}{x}+it\right)}}{\left(\frac{1}{x}+it\right)^{\frac{r}{2}+2}} \left(e^{\pm z\left(\frac{1}{x}+it\right)} - 1\right) e^{-\frac{cx}{1+x^2t^2}}\, dt =
$$

$$
(12) \qquad = O\left(x^{\frac{r}{2}+1} z \int_0^{\frac{A}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-\frac{cx}{1+x^2t^2}}}{(1+x^2t^2)^{\frac{r}{4}+1}} (1 + x\,|t|)\, dt \right) =
$$

$$
= O\left(x^{\frac{r}{2}} z \int_0^{A\sqrt{x}} \frac{e^{-\frac{cx}{1+t^2}}}{(1+t^2)^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}}\, dt \right).
$$

Integrand posledního integrálu nabývá pro $t > 0$ svého maxima v bodě $1 + t^2 = \frac{cx}{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}$, je-li $x > c$; velikost tohoto maxima je $O\left(x^{-\frac{r}{4}-\frac{1}{2}}\right)$; je tedy výraz v (12) roven $O\left(x^{\frac{r}{4}} z\right)$.

Dále jest

$$
\int_{-\infty}^{-\frac{A}{\sqrt{x}}} \frac{e^{x\left(\frac{1}{x}+it\right)}}{\left(\frac{1}{x}+it\right)^{\frac{r}{2}+2}} \left(e^{\pm z\left(\frac{1}{x}+it\right)} - 1\right) dt = \int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} =
$$

$$
= O\left(\int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{\frac{z}{x} + zt}{t^{\frac{r}{2}+2}}\, dt \right) = O\left(x^{\frac{r}{4}} z\right).
$$

Konečně platí

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x\left(\frac{1}{x}+it\right)}}{\left(\frac{1}{x}+it\right)^{\frac{r}{2}+2}} \left(e^{\pm z\left(\frac{1}{x}+it\right)}-1\right) dt =$$

$$= \frac{1}{i} \int\limits_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \frac{e^{(x\pm z)s}}{s^{\frac{r}{2}+2}} ds - \frac{1}{i} \int\limits_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \frac{e^{xs}}{s^{\frac{r}{2}+2}} ds =$$

$$= \frac{2\pi}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+2\right)} \left((x \pm z)^{\frac{r}{2}+1} - x^{\frac{r}{2}+1}\right) = \pm \frac{2\pi}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} x^{\frac{r}{2}} z + O\left(x^{\frac{r}{2}-1} z^2\right).$$

Celkem jest tedy

$$(13) \quad J_1(x) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}} z}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}\, \Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} + O\left(x^{\frac{r}{4}} z\right) + O\left(x^{\frac{r}{2}-1} z^2\right).$$

Položme nyní, při daném $x > 1$, na interval $-\infty < t < +\infty$ všechny Fareyovy zlomky $\frac{h}{k}$, pro něž $0 < k < \sqrt{x}$, $h \gtreqless 0$, $(h, k) = 1$ a sestrojme ještě jejich medianty, t. j. body $\frac{h + h'}{k + k'}$, kde $\frac{h}{k}$, $\frac{h'}{k'}$ jsou dva sousední Fareyovy zlomky. Budiž $\mathfrak{B}_{h,k}$ interval, z leva uzavřený, z prava otevřený, jenž obsahuje Fareyův bod $\frac{h}{k}$ a jehož koncovými body jsou dvě sousední medianty. Jak známo, platí

$$(14) \qquad \mathfrak{B}_{h,k} = \left\langle \frac{h}{k} - \frac{\mu}{k\sqrt{x}}, \frac{h}{k} + \frac{\mu}{k\sqrt{x}} \right).$$

Z teorie transformací funkcí Θ je známo:[12]) je-li $\begin{pmatrix} l & m \\ n & p \end{pmatrix}$ celočíselná substituce, $lp - mn = 1$, $n > 0$, $\frac{p}{n} = \frac{2h}{k}$ $\left(\text{tedy } n = k \text{ nebo } n = \frac{k}{2}\right)$, jest

$$(15) \quad \Theta(\alpha_j s) = \frac{\mu c}{\sqrt{k\left(\alpha_j s - 2\pi i \frac{h}{k}\right)}} \, \Theta\left(-\pi i \frac{l \alpha_j s - m\pi i}{n \alpha_j s - p\pi i}\right) \, (1 \leqq j \leqq r),$$

[12]) A. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen, B. G. Teubner, Leipzig, 1903; str. 183—185.

kdež jest

$$\text{buď } \Theta(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 s} \qquad \text{nebo } \Theta(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m e^{-m^2 s}$$

$$\text{nebo } \Theta(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2 s}.$$

Je-li $s = \frac{1}{x} + ti$ a leží-li t v intervalu[13] $\frac{2\pi}{\alpha_j}\,\mathfrak{B}_{h,k}$, jest

$$\Re\left(-\pi i \frac{l\alpha_j s - m\pi i}{n\alpha_j s - p\pi i}\right) = \frac{\pi^2 \alpha_j}{x n^2\left(\frac{\alpha_j^2}{x^2} + \left(\alpha_j t - 2\pi\frac{h}{k}\right)^2\right)} > c,$$

neboť $\left|\alpha_j t - 2\pi\frac{h}{k}\right| < \frac{c}{k\sqrt{x}}$, $n \leqq k$. Pro $s = \frac{1}{x} + ti$, t v intervalu $\frac{2\pi}{\alpha_j}\,\mathfrak{B}_{h,k}$ je tedy podle (15)

$$(16) \qquad |\Theta(\alpha_j s)| < \frac{c}{\sqrt{k}\sqrt[4]{\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right)^2}}$$

a tedy

$$(17) \quad |\Theta(\alpha_j s)| < \frac{c}{\sqrt{k}}\, Min\left(\sqrt{x}, \frac{1}{\sqrt{\left|t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right|}}\right) \left[Min\left(a, \frac{1}{0}\right) = a\right].$$

Poznámky. 1. Interval $\frac{2\pi}{\alpha_j}\,\mathfrak{B}_{0,1}$ leží podle (14) v intervalu

$$\left\langle -\frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{1}{\sqrt{x}}\right);$$

jestliže tedy nějaký interval $\frac{2\pi}{\alpha_j}\,\mathfrak{B}_{h,k}$ má aspoň jeden bod v intervalu $\left\langle \frac{A}{\sqrt{x}}, +\infty\right)$, je nutně $h > 0$.

2. Leží-li t v intervalu $\frac{2\pi}{\alpha_j}\,\mathfrak{B}_{h,k}$ a je-li $h > 0$, je podle (14) $\left|t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right| < \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{1}{k\sqrt{x}}$ a tedy $c\frac{h}{k} < t < c\frac{h}{k}$ pro $x > c$. Obou těchto poznámek budeme často užívati.

[13]) Značí-li J interval $\langle a_1, a_2)$ a je-li $a_3 > 0$, značí $a_3 J$ interval $\langle a_1 a_3, a_2 a_3)$.

§ 3. Důkaz věty 1.

Abychom dokázali větu 1, stačí dokázati

$$(18)\qquad J_2(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{x}+i\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\infty} \Theta(\alpha_1 s)\ldots\Theta(\alpha_r s)\, e^{xs}(e^{\pm s}-1)\frac{ds}{s^2} = \begin{cases} O(x^{\frac{r}{2}-1}) \text{ pro } r > 4 \\ O(x \log^2 x) \text{ pro } r = 4. \end{cases}$$

Neboť, klademe-li v (9) $z = z(x) = 1$, jest podle (8)

$$\int_x^{x\pm 1} A_Q(y)\,dy = J_1(x) + J_2(x) + \bar{J}_2(x),$$

kde $\bar{J}_2(x)$ jest veličina soujemně sdružená k $J_2(x)$ a tedy podle (13), (18)

$$\int_x^{x\pm 1} A_Q\,dy = \pm J_Q(x) + O(x^{\frac{r}{2}-1}\log^{\varphi} x)$$

$$(\varphi = 0 \text{ pro } r > 4,\ \varphi = 2 \text{ pro } r = 4).$$

Ježto $A_Q(x)$ je neklesající funkcí proměnné x, jest

$$J_Q(x) - O(x^{\frac{r}{2}-1}\log^{\varphi} x) = \int_{x-1}^{x} A_Q(y)\,dy < A_Q(x) \leq \int_x^{x+1} A_Q(y)\,dy = J_Q(x) + $$
$$+ O(x^{\frac{r}{2}-1}\log^{\varphi} x)$$

a tedy

$$A_Q(x) = J_Q(x) + O(x^{\frac{r}{2}-1}\log^{\varphi} x),$$

jak bylo dokázati.

Abychom odhadli integrál v (18), použijeme především známé nerovnosti $a_1 a_2 \ldots a_r \leq \frac{a_1^r + a_2^r + \ldots + a_r^r}{r}$, platné pro $a_j \geq 0$ $(1 \leq j \leq r)$. Jest tedy

$$|J_2(x)| \leq \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\int_{\frac{1}{x}+i\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\infty} |\Theta^r(\alpha_j s)\, e^{xs}(e^{\pm s}-1)\frac{ds}{s^2}| <$$

$$< c\sum_{j=1}^{r}\int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} |\Theta^r(\alpha_j s)|\, Min(1, t)\frac{dt}{t^2} \quad \left(s = \frac{1}{x} + ti\right)$$

(podle (10), (11)). Integrační dráhu rozdělíme na intervaly $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$, při čemž podle poznámky 1. § 2. jest $h > 0$ a podle poznámky 2. § 2. jest v intervalu $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ stále $t > c\frac{h}{k}$. Funkci Θ odhadneme konečně podle (16). Jest tedy

$$\int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} |\Theta^r(\alpha_j s)| \, Min(1, t) \frac{dt}{t^2}$$

$$\leq c \sum_{h>0, k} \frac{Min\left(1, \frac{k}{h}\right)}{k^{\frac{r}{2}-1} h} \int_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} \frac{dt}{\left[\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right)^2\right]^{\frac{r}{4}}}$$

$$< c\, x^{\frac{r}{2}-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{r}{4}}} \sum_{h>0,k} \frac{Min\left(1, \frac{k}{h}\right)}{k^{\frac{r}{2}-1} h}$$

$$< c\, x^{\frac{r}{2}-1} \sum_{0<k\leq\sqrt{x}} \frac{\log (k+1)}{k^{\frac{r}{2}-1}} < c\, x^{\frac{r}{2}-1} \log^{\varphi}(x)$$

pro $x > c$, jak bylo dokázati.

§ 4. Důkaz věty 2.

Budiž nyní $\sigma \geq 2$, $r_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots \sigma)$, $r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma = r$, $r > 4$, σ, r_j celistvá čísla. Uvažujme všechny formy

$$Q(u) = \beta_1 (u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2 + \ldots + u_{r_1,1}^2)$$
$$+ \beta_2 (u_{1,2}^2 + \ldots + u_{r_2,2}^2) \quad \ldots + \beta_\sigma (u_{1,\sigma}^2 + \ldots + u_{r_\sigma,\sigma}^2),$$

pro něž $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0, \ldots, \beta_\sigma > 0$. Věta 2. tvrdí: pro skoro všechny systémy kladných hodnot $\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_\sigma$ jest

$$P_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-\lambda+\varepsilon}\right)$$

pro každé $\varepsilon > 0$. Při tom jest

$$\lambda = \sum_{j=1}^{\sigma} Min\left(\frac{r_j}{4}, 1\right).$$

Abychom tuto větu dokázali, stačí dokázati: pro skoro všechny systémy kladných hodnot $\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_\sigma$ jest

$$(19)\quad J_3(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{x}+i-\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\infty} \Theta^{r_1}(\beta_1 s)\,\Theta^{r_2}(\beta_2 s)\ldots\Theta^{r_\sigma}(\beta_\sigma s)\,(e^{\pm x^{-\frac{r}{4}}s}-1)\,e^{xs}\frac{ds}{s^2} =$$

$$= O\left(x^{\frac{r}{4}-\lambda+\varepsilon}\right)$$

pro každé $\varepsilon > 0$. Neboť podle (8), (9) jest pro $z = x^{-\frac{r}{4}}$

$$\int_x^{x\pm x^{-\frac{r}{4}}} A_Q(y)\,dy = J_1(x) + J_2(x) + J_3(x),$$

kde $J_3(x)$ je veličina soujemně sdružená s $J_3(x)$; podle (13), (19) je tedy

$$\int_x^{x\pm x^{-\frac{r}{4}}} A_Q(y)\,dy = \quad J_Q(x)\,.\,x^{-\frac{r}{4}} + O(1) + O(x^{-1}) + O(x^{\frac{r}{4}-\lambda+\varepsilon})$$

$$= \pm J_Q(x)\,.\,x^{-\frac{r}{4}} + O(x^{\frac{r}{2}-\lambda+\varepsilon})\,x^{-\frac{r}{4}},$$

neboť $\lambda \leqq \frac{r}{4}$. Ježto $A_Q(x)$ je neklesající funkcí proměnné x, platí tedy

$$J_Q(x) + O(x^{\frac{r}{2}-\lambda+\varepsilon}) = x^{\frac{r}{4}}\int_{x-x^{-\frac{r}{4}}}^{x} A_Q(y)\,dy \leqq A_Q(x)$$

$$\leqq x^{\frac{r}{4}}\int_x^{x+x^{-\frac{r}{4}}} A_Q(y)\,dy = J_Q(x) + O(x^{\frac{r}{2}-\lambda+\varepsilon}),$$

a tedy

$$P_Q(x) = O(x^{\frac{r}{2}-\lambda+\varepsilon}),$$

jak bylo dokázati.

Ježto součet spočetného množství množství míry nulové je opět množství míry nulové, stačí patrně dokázati:

Ke každému páru kladných čísel $\bar{C}, \bar{D}$, pro něž $0 < \bar{C} < \bar{D}$, lze nalézti v σ- rozměrném prostoru bodů $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$ množství $N(\bar{C}, \bar{D})$ míry nulové tak, že pro každý bod krychle $\bar{W} : \bar{C} < \beta_j \leqq \bar{D}$, který neleží v $N(\bar{C}, \bar{D})$, platí

$$(19)\quad J_3(x) \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{x}+i\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\infty} \Theta^{r_1}(\beta_1 s)\ldots\Theta^{r_\sigma}(\beta_\sigma s)\,(e^{\pm x^{-\frac{r}{4}}s}-1)\,e^{xs}\frac{ds}{s^2}$$

$$= O(x^{\frac{r}{4}-\lambda+\varepsilon})$$

pro každé $\varepsilon > 0$.

Zvolme při pevném $x > 1$ nějaký bod $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$ z krychle W. Ke každému t integračního intervalu $\langle \frac{A}{\sqrt{x}}, \infty)$ existuje pro každé j $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ právě jeden pár celistvých čísel h_j, k_j tak, že t leží v intervalu $\frac{2\pi}{\beta_j} \mathfrak{B}_{h_j, k_j}$. Tyto hodnoty h_j, k_j jsou tedy určité funkce proměnné t, závislé ovšem ještě na $x, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma$. Utvořme nyní ke každému systému celistvých čísel $n_1, n_2, \ldots, n_\sigma$; $h_1, h_2, \ldots, h_\sigma$; $k_1, k_2, \ldots, k_\sigma$, pro něž $h_j \geqq 0$, $0 < k_j \leqq \sqrt{x}$, $(h_j, k_j) = 1$ množství oněch hodnot t intervalu $\langle \frac{A}{\sqrt{x}}, \infty)$, jež leží v průřezu σ intervalů $\frac{2\pi}{\beta_j} \mathfrak{B}_{h_j, k_j}$ a hoví σ nerovnostem

$$(20) \qquad \frac{1}{2^{n_j+1} k_j \sqrt{x}} < \frac{\beta_j}{2\pi} t - \frac{h_j}{k_j} \leqq \frac{1}{2^{n_j} k_j \sqrt{x}} \quad (j = 1, 2, \ldots, \sigma);$$

toto množství označme $Q(h; k; n)$. Poněvadž v intervalu $\frac{2\pi}{\beta_j} \mathfrak{B}_{h_j, k_j}$ jest $\frac{\beta_j}{2\pi} t - \frac{h_j}{k_j} \leqq \frac{1}{k_j \sqrt{x}}$, jsou všechna množství $Q(h; k; n)$, pro něž aspoň jedno z čísel n_j je záporné, prázdná; podle § 2, poznámky 1, jsou také ona množství $Q(h; k; n)$ prázdná, pro něž aspoň jedno h_j je rovno nule. Konečně jest každý bod t intervalu $\langle \frac{A}{\sqrt{x}}, \infty)$ obsažen právě v jednom množství $Q(h; k; n)$, vyjma spočetné množství bodů $t = \frac{2\pi}{\beta_j} \frac{h_j}{k_j}$. Stačí tedy, dokážeme-li: Pro skoro všechny body $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$ krychle W jest

$$\sum_{(h); (k); (n)} \int_{Q(h; k; n)} \Theta^{r_1}(\beta_1 s) \ldots \Theta^{r_\sigma}(\beta_\sigma s) \left(e^{\pm x - \frac{r}{4} s} - 1\right) \frac{dt}{t^2} = O\left(x^{\frac{r}{4} - \lambda + \varepsilon}\right)$$

pro každé $\varepsilon > 0$. Při tom, jak jsme zjistili, můžeme se omeziti na ona $Q(h; k; n)$, pro něž $h_j > 0$, $n_j \geqq 0$. Z důvodů symetrie smíme se konečně omeziti na ona $Q(h; k; n)$, pro něž

$$2^{n_1} k_1 > 2^{n_2} k_2 \geqq \ldots \geqq 2^{n_\sigma} k_\sigma;$$

to v následujícím učiníme.

Buďtež nyní l; $m_1, m_2, \ldots, m_\sigma$; $n_1, n_2, \ldots, n_\sigma$ celistvá čísla větší nebo rovná nule.

Množství $Q(h; k; n)$ budeme počítati k „třídě $[l; m; n]$", jestliže

$$2^l \leqq h_1 < 2^{l+1}, \; 2^{m_j} \leqq k_j < 2^{m_j+1} \quad (j = 1, 2, \ldots, \sigma).$$

Každé množství $Q(h; k; n)$ patří tedy právě k jedné třídě. Nemá-li množství $Q(h; k; n)$ třídy $[l; m; n]$ býti prázdné, musí vzhledem k (20) (a ježto $2^{n_1} k_1 \geqq 2^{n_j} k_j$ pro $j = 2, 3, \ldots, \sigma$) býti

$$\left| \frac{1}{\beta_1} \frac{h_1}{k_1} - \frac{1}{\beta_j} \frac{h_j}{k_j} \right| < \frac{c}{2^{n_j} k_j 2^\varrho} \quad (j = 2, 3, \ldots, \sigma),$$

kdež celistvé číslo ϱ je určeno podmínkou $2^\varrho \leq \sqrt{x} < 2^{\varrho+1}$. V práci I dokázal jsem tuto větu (Hilfssatz 5):

Budiž $0 < C < D$, $a > 0$, $\sigma \geq 2$, σ celistvé; potom existuje v krychli W: $C \leq \gamma_j \leq D$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ σ — rozměrného prostoru množství $N(C, D, a)$ míry nulové, jež má tuto vlastnost:

Ke každému bodu $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\sigma)$ krychle W, jenž nepatří k množství $N(C, D, a)$, existuje číslo celé kladné $\varrho_0 = \varrho_0(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\sigma, a)$, takže pro každý systém celých čísel

$$l;\ m_1, m_2, \ldots, m_\sigma;\ n_2, n_3, \ldots, n_\sigma, \varrho$$

větších nebo rovných nule mají nerovnosti

$$\left| \frac{h_1}{k_1} \gamma_1 - \frac{h_j}{k_j} \gamma_j \right| < \frac{a}{2^{n_j} k_j 2^\varrho},$$

$$2^l \leq h_1 < 2^{l+1},\ 2^{m_1} \leq k_1 < 2^{m_1+1},\ 2^{m_j} \leq k_j < 2^{m_j+1} \ (j = 2, 3, \ldots, \sigma)$$

nejvýše

$$[(\varrho + 1)(l + 1) \prod_{j=1}^{\sigma} (m_j + 1) \prod_{j=2}^{\sigma} (n_j + 1)]^2 \frac{2^{l + m_1 + m_2 + \ldots + m_\sigma}}{2^{n_2 + n_3 + \ldots + n_\sigma}\, 2^{\varrho(\sigma-1)}} = \mathfrak{M}$$

řešení v celistvých číslech h_j, k_j $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$, je-li $\varrho > \varrho_0$.

Užijeme-li této věty pro $C = \frac{1}{D}$, $D = \frac{1}{C}$, $a = c$, $\gamma_j = \frac{1}{\beta_j}$, zjistíme toto:

V krychli $\bar{W}$ leží množství $N(\bar{C}, \bar{D})$, jež má tyto vlastnosti:

1. Probíhá-li bod $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$ množství $N(\bar{C}, \bar{D})$, probíhá bod $\left(\frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}, \ldots, \frac{1}{\beta_\sigma}\right)$ jisté množství míry nulové.

2. Ke každému bodu $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$ z množství $\bar{W} - N(C, D)$ existuje celistvé číslo $\varrho_0 = \varrho_0(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma) \geq 0$ tak, že pro každé $\varrho > \varrho_0$ (tedy pro všechna $x \geq 2^{2(\varrho_0+1)}$) a pro každý systém celých čísel

$$l;\ m_1, m_2, \ldots, m_\sigma;\ n_1, n_2, \ldots, n_\sigma$$

větších nebo rovných nule jest počet oněch množství $Q(h; k; n)$ třídy $(l; m; n)$, jež nejsou prázdná, nejvýše roven

$$\mathfrak{M}' = 2^{\sigma-1} [\log x \,.\, (l + 1) \prod_{j=1}^{\sigma} (m_j + 1) \prod_{j=2}^{\sigma} (n_j + 1)]^2 \frac{2^{l + m_1 + m_2 + \ldots + m_\sigma}}{2^{n_2 + n_3 + \ldots + n_\sigma}\, x^{\frac{\sigma-1}{2}}}$$

Z 1. plyne ovšem, že také

3. množství $N(\bar{C}, \bar{D})$ má míru rovnou nule.

Budiž nyní až do konce tohoto §

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$$

pevný bod množství $W - (C, \bar{D})$; a budiž $x > 2^{2(\varrho_0+1)}$. Třídy $[l; m$ ...] rozdělíme na $\sigma + 1$ skupin $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{\sigma\}$ takto: jestliže ... é τ z čísel $2^{m_j+n_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ jsou větší nebo rovna $\sqrt{x}$, t. j. je ...e

$$2^{m_1+n_1} \geqq 2^{m_2+n_2} \ldots \geqq 2^{m_\tau+n_\tau} \geqq \sqrt{x} > 2^{m_{\tau+1}+n_{\tau+1}} \geqq \ldots \geqq 2^{m_\sigma+n_\sigma},$$

budeme třídu $[l; m; n]$ počítati do skupiny $\{\tau\}$. Stačí tedy, dokážeme-li: pro náš bod $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$, pro každé $s > 0$ a pro každé $\tau = 0, 1, \ldots \sigma$ jest

$$(21) \quad \sum_{(h); (k); (n)} \int_{Q(h;k;n)} | \Theta^{r_1}(\beta_1 s) \ldots \Theta^{r_\sigma}(\beta_\sigma s) (e^{\pm x^{-\frac{r}{4}} s} - 1) | \frac{dt}{t^2} = O(x^{\frac{r}{4} - \lambda + \varepsilon}),$$

jestliže $Q(h; k; n)$ probíhá všechna množství $Q(h; k; n)$ třídy $\{\tau\}$, jež nejsou prázdná a pro něž $2^{n_1} k_1 \geqq 2^{n_2} k_2 > \ldots \geqq 2^{n_\sigma} k_\sigma$.

V množství $Q(h; k; n)$ třídy $[l; m; n]$, jež patří ke skupině $\{\tau\}$, jest podle (10), (11), (17) a podle poznámky 2, § 2 integrand v (21) menší než

$$c\, Min\left(1, x^{-\frac{r}{4}} \frac{2^l}{2^{m_1}}\right) \cdot \frac{2^{2m_1}}{2^{2l}} \cdot \frac{x^{\frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_\tau}{2}}}{2^{\frac{m_1 r_1 + \ldots + m_\tau r_\tau}{2}}} \cdot x^{\frac{r_{\tau+1} \cdots r_\sigma}{4}}\, 2^{\frac{n_{\tau+1} r_{\tau+1} \cdots n_\sigma r_\sigma}{2}}$$

míra množství $Q(h; k; n)$ je podle (20) menší než

$$c\, 2^{-m_1-n_1} x^{-\frac{1}{2}};$$

konečně počet množství $Q(h; k; n)$ třídy $[l; m; n]$, jež nejsou prázdná, je nejvýše roven $\mathfrak{M}$. Jest tedy příspěvek všech množství $Q(h; k; n)$ třídy $[l; m; n]$ k integrálu v (21) nejvýše roven[14])

$$c\, x^{\frac{r_1 + \ldots + r_\tau}{2} + \frac{r_{\tau+1} + \ldots + r_\sigma}{4} - \frac{\sigma}{2}} \log^2 x\, Min\,(2^{m_1}, 2^l x^{-\frac{r}{4}}).$$

$$\frac{(l+1)^2}{2^l} \prod_{j=1}^{r} \frac{(m_j+1)^2}{2^{m_j\left(\frac{r_j}{2}-1\right)}} \prod_{j=1}^{r} \frac{(n_j+1)^2}{2^{n_j}} \prod_{j=\tau+1}^{\sigma} (m_j+1)^2\, 2^{m_j} \prod_{j=\tau+1}^{\sigma} \frac{(n_j+1)^2}{2^{n_j\left(\frac{r_j}{2}-1\right)}}.$$

Tento výraz jest sčítati přes celistvá nezáporná čísla $l; m_1, \ldots, m_\sigma; n_1, \ldots, n_\sigma$, hovící podmínkám

$$2^{m_j+n_j} \geqq \sqrt{x} \text{ pro } j \leqq \tau,\ 2^{m_j+n_j} < \sqrt{x} \text{ pro } j > \tau,\ 2^{m_j} \leqq \sqrt{x}.$$

Vychází

$$1. \quad \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)^2}{2^l} Min\,(2^{m_1}, 2^l x^{-\frac{r}{4}}) < c\, x^{-\frac{r}{4}} \log^3 x.$$

[14]) Připojen je ještě nadbytečný faktor $(n_1 + 1)^2 > 1$.

2. $$\sum_{\substack{2^{m_j+n_j} > \sqrt{x} \\ 2^{m_j} \leqq \sqrt{x}}} \frac{(m_j+1)^2 (n_j+1)^2}{2^{m_j\left(\frac{r_j}{2}-1\right)} 2^{n_j}} \leqq c \log^2 x \sum_{2^{m_j} \leqq \sqrt{x}} \frac{(m_j+1)^2}{2^{m_j\left(\frac{r_j}{2}-1\right)}} \frac{2^{m_j}}{\sqrt{x}}$$

$$< c \frac{\log^2 x}{\sqrt{x}} \left\{ \begin{array}{l} \log^2 x \text{ pro } r_j > 5 \\ \log^3 x \text{ pro } r_j = 4 \\ x^{1-\frac{r_j}{4}} \log^2 x \text{ pro } r_j = 1, 2, 3 \end{array} \right.$$

3. $$\sum_{2^{m_j+n_j} < \sqrt{x}} (m_j+1)^2 (n_j+1)^2 \, 2^{m_j} 2^{n_j\left(\frac{r_j}{2}-1\right)}$$

$$< c \log^4 x \sum_{2^{n_j} < \sqrt{x}} \frac{\sqrt{x}}{2^{n_j}} 2^{n_j\left(\frac{r_j}{2}-1\right)}$$

$$\leqq c \sqrt{x} \log^4 x \, . \left\{ \begin{array}{l} x^{\frac{r}{4}-1} \text{ pro } r_j \geqq 5 \\ \log x \text{ pro } r_j = 4 \\ 1 \text{ pro } r_j = 1, 2, 3 \end{array} \right.$$

Z 1. 2. 3. plyne, že integrál v (21) je nejvýše roven

$$c \, x^{\frac{r}{4}-\lambda} \log^{3+5\sigma} x = O\left(x^{\frac{r}{4}-\lambda+\varepsilon}\right)$$

pro každé $\varepsilon > 0$. Tím je věta dokázána; dokonce je možno v ní místo $O\left(x^{\frac{r}{2}-\lambda+\varepsilon}\right)$ psáti $O\left(x^{\frac{r}{2}-\lambda} \log^{3+5\sigma} x\right)$.

Exponent $3+5\sigma$ u logaritmu by ostatně bylo snadno ještě snížiti.

§ 5. **Poznámky.**

Věta 2. dává ve spojení s tvrzením 5. nebo 6. prvního paragrafu přesnou hodnotu veličiny $\mu(Q)$ pro „skoro všechny“ formy uvažovaného tvaru, je-li $r_j \geqq 4$. Jak je tomu, není-li $r_j > 4$ pro všechna $j = 1, 2, \ldots, \sigma$? Uvažujme třeba případ $\sigma = 2$, t. j. formy

$$Q(u) = \beta_1 (u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \beta_2 (u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_r^2)$$
$$(\beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \ r = r_2 + r_1) \text{ a budiž } r \geqq 8.$$

Je-li $r_1 \geqq 4$, $r_2 > 4$, jest pro skoro všechny kladné systémy β_1, β_2

$$P_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\right) \text{ pro každé } \varepsilon > 0,$$

a podle tvrzení 5

$$P_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-2}\right).$$

Je-li $r_1 = 1, 2, 3$ (a tedy $r_2 \geqq 5$), je pro skoro všechny kladné systémy β_1, β_2

(22) $$P_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{r_1}{4}+\varepsilon}\right)$$

pro každé $\varepsilon > 0$.[15])

Zde se naskytuje otázka: není možno také v tomto případě ($r_1 < 4$) snížiti exponent v rovnici (22) na $\frac{r}{2} - 2 + \varepsilon$?

Tuto otázku lze velmi snadno zodpověděti negativně pro $r_1 = 1$. Platí totiž:

Věta 3. Budiž $r \geqq 2$; $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$,

$$Q(u) = \beta_1 u_1^2 + \beta_2 (u_2^2 + \dots, + u_r^2).$$

Potom jest

$$P_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-\frac{3}{2}}\right).$$

Důkaz. Budiž $A'(x)$ počet mřížových bodů v kouli $v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_{r-1}^2 \leqq x$; pro $x > 0$ je patrně

$$A'(x) = \sum_{0 \leqq n \leqq x} F(n),$$

kdež $F(n)$ značí počet vyjádření čísla n jakožto součtu $r - 1$ čtverců. Kdyby bylo $F(n) = o\left(n^{\frac{r}{2}-\frac{3}{2}}\right)$, bylo by $A'(x) = o\left(x^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}}\right)$, což je ve sporu s okolností, že $A'(x)$ jest pro velká x asymptoticky rovno obsahu koule $v_1^2 + \dots, + v_{r-1}^2 \leqq x$, čili

$$\lim_{x=\infty} \frac{A'(x)\,\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{x^{r-1}\,\pi^{\frac{r-1}{2}}} = 1.$$

Existuje tedy jisté kladné číslo a, závislé pouze na r, a nekonečně mnoho kladných celistvých čísel $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \dots$ ($\xi_1 < \xi_2 < \dots$) tak, že $F(\xi_m) \geqq a\,\xi_m^{\frac{r-3}{2}}$.

Na povrchu elipsoidu

$$\beta_1 u_1^2 + \beta_2 (u_2^2 + \dots, + u_r^2) = \beta_2 \xi_m$$

leží aspoň $a\,\xi_m^{\frac{r-3}{2}}$ mřížových bodů; totiž všechny body $(0, u_2, \dots, u_r)$ takové, že $u_2^2 + \dots + u_r^2 = \xi_m$. Prochází-li x rostouc hodnotou $\beta_2 \xi_m$, mění se tedy $A_Q(x)$ skokem, jehož velikost je aspoň $a\,\xi_m^{\frac{r-3}{2}}$; t. j. $A_Q(\beta_2 \xi_m) - A_Q(\beta_2 \xi_m - 0) > a\,\xi_m^{\frac{r-3}{2}}$. Ježto $J_Q(x)$ je spojitou funkcí proměnné

[15]) Pro $r_1 = 1$ tedy speciálně $O\left(x^{\frac{r}{2}-\frac{5}{4}+\varepsilon}\right)$, kdežto Walfiszův výsledek C) z § 1 dává pouze $O\left(x^{\frac{r}{2}-\frac{6}{5}} \log^{\frac{1}{4}} x\right)$.

x, jest také $P_Q(\beta_2 \xi_m) - P_Q(\beta_2 \xi_m - 0) \geqq a\, \xi_m^{\frac{r-3}{2}}$, a tedy aspoň jedno z čísel $|P_Q(\beta_2 \xi_m)|$, $|P_Q(\beta_2 \xi_m - 0)|$ je rovno aspoň $\frac{a}{2} \xi_m^{\frac{r-3}{2}} = \frac{a}{2 \beta_2^{\frac{r-3}{2}}}$. $(\beta_2 \xi_m)^{\frac{r-3}{2}}$; tedy je $P_Q(x) = \Omega(x^{\frac{r-3}{2}})$, jak bylo dokázati.

Göttingen, 15. března 1928.