

Jarník, Vojtěch: Scholarly works

Vojtěch Jarník

Approximations diophantiennes linéaires et homogènes

Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1954, Amsterdam, Vol. I (1957),
p. 430

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/500540>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

APPROXIMATIONS DIOPHANTIENNES LINÉAIRES ET HOMOGENES

V. JARNÍK

Soit $\Theta = (\theta_{ji})$ ($j = 1, \dots, s; i = 1, \dots, r$) une matrice de rs nombres réels. Pour $t \geq 1$ posons

$$\psi(t) = \psi(\Theta, t) = \text{Min}_{1 \leq j \leq s} (\text{Max} |\theta_{j1}x_1 + \dots + \theta_{jr}x_r + x_{r+j}|),$$

où l'on prend le minimum pour tous les systèmes de nombres entiers x_1, x_2, \dots, x_{r+s} tels que $0 < \text{Max} (|x_1|, \dots, |x_r|) \leq t$. Soit $\alpha = \alpha(\Theta)$ resp. $\beta = \beta(\Theta)$ la borne supérieure de tous les nombres γ tels que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} t^r \psi(t) < +\infty \text{ resp. } \liminf_{t \rightarrow +\infty} t^r \psi(t) < +\infty.$$

On a donc $r/s \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$. Laissons de côté le cas banal, où $\psi(t) = 0$ à partir d'un certain t . Alors on sait encore que pour $r = 1$ on a $\alpha \leq 1$.

On peut démontrer les inégalités suivantes:

I. Pour $r = 2, s \geq 1$ on a $\beta \geq \alpha(\alpha - 1)$.

II. Pour $r > 2, s \geq 1, \alpha > (5r^2)^{r-1}$ on a $\beta \geq \alpha^{\frac{r}{r-1}} - 3\alpha$.

III. Dans le cas $r = 1, s \geq 2$ on doit supposer que, parmi les nombres de Θ , il y ait au moins deux nombres linéairement indépendants. Dans ce cas, on a $\beta \geq \frac{\alpha^2}{1 - \alpha}$ pour $\alpha < 1, \beta = +\infty$ pour $\alpha = 1$.

Le terme principal (pour $\alpha \rightarrow +\infty$) au second membre de I, II est $\alpha^{\frac{r}{r-1}}$ et ce terme est définitif, car, à chaque $a > 2^{r-1}$ on peut faire correspondre une matrice Θ telle que

$$\alpha = a, \beta = \alpha^{\frac{r}{r-1}}.$$

On a un résultat analogue dans le cas III.

On peut remplacer quelques-uns de ces résultats par des résultats plus précis.

PRAHA XVIII PEVNOSTNI I, CZECHOSLOVAKIA.