Vojtěch Jarník

Zum Theorie der diophantischen Approximationen

Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens, Oslo 1936, II, p. 11

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500759

ZUR THEORIE DER DIOPHANTISCHEN APPROXIMATIONEN

Von Vojtěch Jarník, Praha.

Kleine lateinische Buchstaben bedeuten ganze Zahlen, griechische Buchstaben — reelle Zahlen.

I. Sind $\theta_1, \cdots, \theta_n$ vorgegeben, so definiere man $\beta(\theta_1, \cdots, \theta_n)$ bzw. $\gamma(\theta_1, \cdots, \theta_n)$ als die obere Grenze derjenigen Zahlen α, für welche die Ungleichungen

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\theta_i + x_{n+1}\right| < \frac{1}{x^{n+\alpha}}, \quad 0 < x = \operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq n} |x_i|$$

bzw. die Ungleichungen

$$q > 0, \ |q\theta_i - p_i| < q^{-\frac{1+\alpha}{n}} \quad (1 \leqq i \leqq n)$$

unendlichviele Lösungen (in $x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}$ bzw. in $q, p_1, \cdots, p_n$) besitzen.

1) Es läßt sich zeigen, daß die durch den Khintchineschen Übertragungssatz

$$\beta \geqq \gamma \geqq \frac{\beta}{(n-1)\beta + n^2}$$

gegebenen Schranken für γ für jeden vorgegebenen Wert von β scharf sind.

2) Ist $\beta(\theta_1)$, $\beta(\theta_2)$ vorgegeben, so kann man scharfe Schranken für $\beta(\theta_1, \theta_2)$ und $\gamma(\theta_1, \theta_2)$ angeben.

II. Wenn $1 < k \leqq n$ ist und wenn aus $\sum_{i=1}^{n} x_i\theta_i + x_{n+1} = 0$ folgt $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1} = 0$, so hat man folgende Sätze:

1) Für *jedes hinreichend große* $t > 0$ kann man Zahlen $x_1, \cdots, x_{n+1}$ mit

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\theta_i + x_{n+1}\right| < t^{-n+k-1}, \quad |x_i| \leqq t \text{ für } 1 \leqq i \leqq n$$

finden, wobei mindestens k von den Zahlen $x_1, \cdots, x_n$ von Null verschieden sind.

2) Für *unendlichviele* $t > 0$ kann man Zahlen $x_1, \cdots, x_{n+1}$ mit

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\theta_i + x_{n+1}\right| < c(n)t^{-n+k-2}, \quad |x_i| \leqq t \text{ für } 1 \leqq i \leqq n$$

finden, wobei mindestens k von den Zahlen $x_1, \cdots, x_n$ von Null verschieden sind.

3) Die Exponenten $-n+k-1$, $-n+k-2$ sind scharf.